ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права
УДК 517.956.32

РУДЬКО
Ян Вячеславович

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск 2025

Работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Научный руководитель	**Корзюк Виктор Иванович,** доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Беларуси, профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета Белорусского государственного университета
Официальные оппоненты	**Полосин Алексей Андреевич,** доктор физико-математических наук, доцент, профессор по кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
	Столярчук Иван Игоревич, кандидат физико-математических наук, инженер-программист в ООО «Нэкстсофт»
Оппонирующая организация	**Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»**

Защита состоится «19» ноября 2025 г. в 13:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.

Тел. ученого секретаря совета (+375–17)–378–17–62, email: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке имени Якуба Коласа Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан «15» октября 2025 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение в случае разрывных начальных и граничных условий довольно часто встречается в различных приложениях, например, при изучении распространение ударных волн в среде[1,2,3].

Отметим, что само исследование ударных явлений сопряжено с рядом трудностей:

1. Время, в течении которого протекает процесс удара, является чрезвычайно коротким – порядка 10^{-4} – 10^{-2} сек. (практически мгновенным)[4].

2. Распространение волн смещений и напряжений в твердых телах не поддается, вообще говоря, непосредственным наблюдениям опять же из-за быстрого изменения напряжения во времени, малости смещений и высокой скорости волнового фронта[5].

Поэтому важным является изучение свойств математических моделей, описывающих ударные и другие процессы. В основе многих моделей лежит волновое уравнение с негладкими начальными и граничными условиями. В этом направлении возникают сложности, связанные с математическим определением, построением и интерпретацией решения[6].

Для решения смешанных задач с разрывными граничными и начальными данными в основном используются интегральные преобразования, например, преобразование Фурье, преобразование Лапласа и иные интегральные и функциональные преобразования. Однако эти методы обычно не охватывают все возможные случаи задания условий Коши[7], так как обратные интегральные преобразования, как правило, сходятся к полусумме левостороннего и правостороннего пределов. Поэтому для решения таких задач были разработаны различные методы, например, метод контурного интеграла[8]. Хотя этот метод, как и метод Фурье[9], не является универсальным, он позволил

---

[1] Журавков, М. А. Математические модели механики твердых тел / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

[2] Бидерман, В. Л. Теория удара / В. Л. Бидерман. – М. : Машгиз, 1952. – 76 с.

[3] Lessen, M. Thermoelastic waves and thermal shock / M. Lessen // J. Mech. Phys. Solids. – 1959. – Vol. 7, № 2. – P. 77–84.

[4] Малышев, Б. М. Измерение продолжительности удара / Б. М. Малышев // Вестник МГУ. – 1952. – № 5. – С. 3–12.

[5] Александров, Е. В. Прикладная теория и расчеты ударных систем / Е. В. Александров, В. Б. Соколинский. – М. : Наука, 1969. – 199 с.

[6] Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

[7] Bateman, H. Physical problems with discontinuous initial conditions / H. Bateman // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1930. – Vol. 16, № 3. – P. 205–211.

[8] Расулов, М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений / М. Л. Расулов. – М. : Наука, 1964. – 464 с.

[9] Гайдук, С. И. Задача о поперечных колебаниях упруго–вязкого стержня / С. И. Гайдук // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 9. – С. 1518–1536.

построить обобщенные решения многих задач из теории динамического удара, см. [9, 10, 11, 12] и цитированную литературу. Также отметим классический метод – метод характеристик. Он может использоваться для получения качественного описания ударных явлений[13], для решения некоторых краевых задач теории удара[14] и позволяет не отождествлять функции, различающиеся на множестве нулевой меры Лебега.

Несмотря на большое число работ по этой тематике, остались открытыми следующие вопросы исследования некоторых линейных смешанных задач для одномерного волнового уравнения с разрывными начальными и граничными условиями на предмет построения решений как классических решений смешанных задач с условиями сопряжения. В частности, к ним относятся: первая смешанная задача для волнового уравнения в четверти плоскости, задача о продольном абсолютно неупругом ударе по упругому однородному полубесконечному стержню с упруго защемленным (или свободным) концом в случае прилипания ударившего груза после удара, задача о продольном ударе по упругому однородному полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза после удара, смешанная задача в криволинейной полуполосе.

Изучение этих задач является целью настоящей диссертации. Предложено определение решения как классическое решение задач с условиями сопряжения, найдены критерии и признаки существования и единственности решения при заданной гладкости исходных функций.

Основным методом исследования является метод характеристик.

Актуальность темы диссертации заключается в том, что исследуемыми в данной работе задачами моделируются физические процессы колебаний и ударов в сплошных средах. Полученные результаты позволяют анализировать и прогнозировать развитие таких процессов.

Научная новизна результатов диссертационного исследования заключается в построении решения в явном аналитическом виде смешанных задач для волнового уравнения с разрывными начальными и краевыми условия-

[10]Гайдук, С. И. Задача о поперечном ударе по прямоугольной упруговязкой плите с опертыми краями / С. И. Гайдук // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 75–80.

[11]Гайдук, С. И. Математическое рассмотрение некоторых задач, связанных с теорией продольного удара по конечным стержням / С. И. Гайдук // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 11. – С. 2009–2025.

[12]Гайдук, С. И. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням / С. И. Гайдук // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1233–1243.

[13]Bityurin, A. A. Waves induced by the longitudinal impact of a rod against a stepped rod in contact with a rigid barrier / A. A. Bityurin, V. K. Manzhosov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – Vol. 73, № 2. – pp. 162–168.

[14]Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М. : «Высшая школа», 1970. – 712 с.

ми как классическое решение задач с условиями сопряжения, доказательстве их существования и единственности при выполнении определенных условий гладкости и согласования заданных функций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертационной работы соответствует направлению «Математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных)», включенному в перечень Приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы, утвержденный Указом Президента Республики Беларусь от 07.05.2020 № 156. Работа над диссертацией проводилась сначала в отделе прикладной математики, а затем в отделе дифференциальных уравнений Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси». Тема диссертации утверждена ученым советом Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» (протокол № 9 от 23.12.2022).

Результаты диссертационного исследования получены в рамках следующих научно-исследовательских программ:

1. НИР «Разработка методов решения линейных и нелинейных задач для уравнений с частными производными математической физики» по заданию «Разработка методов решения и исследования линейных и нелинейных задач для уравнений с частными приозводными» ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

2. НИР по гранту Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики «Актуальные задачи теории уравнений смешанного типа» по соглашению № 075-15-2022-284.

3. НИР по гранту НАН Беларуси «Задачи с негладкими граничными условиями для гиперболических уравнений» по договору № 2023-25-019 от 3 апреля 2023 г.

4. НИР по гранту НАН Беларуси «Решение задач с негладкими граничными условиями для гиперболических уравнений» по договору № 2024-25-141 от 1 апреля 2024 г.

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Цель исследования – нахождение критериев и признаков согласования на исходные данные (правую часть уравнений, начальные и граничные условия, коэффициенты уравнения, функции, задающие границу области) для существования единственного решения смешанных задач для волнового уравнения с разрывными граничными и начальными условиями.

Для достижения этой цели диссертацией были изучены следующие задачи:

1. Первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения с разрывными начальными условиями.

2. Задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае прилипания ударившего груза к стержню после удара.

3. Задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара.

4. Смешанная задача в криволинейной полуполосе для волнового уравнения

Объект исследования — смешанные задачи для волнового уравнения с разрывными начальными и граничными условиями.

Предмет исследования — существование, единственность решений, условия согласования на исходные данные смешанных задач для волнового уравнения с разрывными начальными и граничными условиями.

Научная новизна

Рассмотренные в данной диссертации смешанные задачи для волнового уравнения с негладкими граничными условиями не исследовались ранее на предмет существования и единственности решений как классических решений задач с условиями сопряжения на характеристиках. В ходе изучения задач получены следующие результаты:

1. Теоремы существования и единственности решений согласно введенным определениям, содержащие необходимые и достаточные условия согласования, и представления решений в явном аналитическом виде следующих смешанных задач с разрывными данными:

а) Первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения с разрывными начальными условиями.

б) Задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае прилипания ударившего груза к стержню после удара.

в) Смешанная задача в криволинейной полуполосе для волнового уравнения с разрывными начальными условиями.

2. Теорема существования и единственности решения согласно введенному определению, содержащая достаточные условия согласования, и представления решения в явном аналитическом виде задачи о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара.

Практическая значимость исследования заключается в том, что с его помощью можно разработать алгоритмы для построения решения смешанных задач.

Результаты данного исследования можно использовать в учебном процессе при чтении лекций и проведении практических занятий по курсам «Уравнения математической физики», «Дифференциальные уравнения с частными производными», «Дополнительные главы уравнений математической физики», «Математическое моделирование динамических процессов», «Теоретическая механика», «Механика сплошных сред», «Механика деформируемого твердого тела», применять на спецкурсах, в лабораторных работах.

Положения, выносимые на защиту

Теоремы существования и единственности решений, содержащие необходимые и достаточные условия согласования, и представления решений в явном аналитическом виде следующих смешанных задач с разрывными данными:

а) Первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения с разрывными начальными условиями.

б) Задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае прилипания ударившего груза к стержню после удара.

в) Смешанная задача в криволинейной полуполосе для волнового уравнения с разрывными начальными условиями.

Теорема существования и единственности решения, содержащая достаточные условия согласования, и представления решения в явном аналитическом виде задачи о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара.

Личный вклад соискателя

Все работы опубликованы в соавторстве. Изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. В совместных работах [1-А–14-А] научному руководителю академику НАН Беларуси, д. ф.-м. н., профессору В. И. Корзюку принадлежит научная идея исследования и формулировка задач. В совместных работах [6-А; 8-А; 12-А; 14-А] с В. В. Колячко соавтору принадлежат вспомогательные результаты, связанные с постановкой условий согласования напряжений на разрывах исходя из положений механики сплошных сред. Анализ этих условий, и получение из них следствий в виде утверждений, лемм и теорем принадлежат соискателю.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы докладывались на научных конференциях:

1. Международная математическая конференция «Седьмые Богданов-

ские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова, Минск, 1 – 4 июня 2021 г.

2. XIII Белорусская математическая конференция, Минск, 22–25 ноября 2021 г.

3. Международная научная конференция «Partial Differential Equations and Related Topics» (PDERT'22), Белгород, 15–19 июля 2022 г.

4. Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 23–25 ноября 2023 г.

5. Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», посвященная 90 летию со дня рождения академика Т. Д. Джураева, Ташкент, 24–26 октября 2024 г.

6. XIV Белорусская математическая конференция, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г.

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, в том числе в 8 статьях в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общий объем 3.6 авт. л.), 6 тезисах и материалах докладов международных научных конференций.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, общей характеристики работы, введения, 5 глав, заключения, библиографического списка.

Полный объём диссертации составляет 101 страницу, 20 рисунков. Библиографический список содержит 97 наименований, в том числе 14 собственных публикаций соискателя ученой степени, и занимает 8 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** описан физический смысл уравнений и граничных условий, для которых в настоящей диссертации рассматриваются смешанные задачи, проведен аналитический обзор литературы по теме исследования и выделены основные существующие методы решения задач с разрывными данными, их преимущества и недостатки. Дано описание метода характеристик как основного метода исследования. Приведен развернутый выбор направления исследований и общая концепция работы.

Во **второй главе** рассматривается первая смешанная задача для волнового уравнения с разрывным условием Коши. В разделе 2.1 приводится постановка задачи, а именно: на замыканиях $\overline{\Omega_1}$ и $\overline{\Omega_2}$ областей

$$\Omega_1 = \{(t,x) : (t,x) \in Q \wedge x - at > 0\}$$

и

$$\Omega_2 = \{(t,x) : (t,x) \in Q \wedge x - at < 0\},$$

где $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$, двух независимых переменных (t,x) рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

где $a > 0$. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\begin{gathered} u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x \in (0,\infty), \end{cases} \end{gathered} \tag{2}$$

на другой части границы — граничное условие Дирихле

$$u(t,0) = \mu(t), \qquad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

Предложим, что функции f, φ, ψ_2, μ достаточно гладкие, а именно:

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \psi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \mu \in C^2([0,\infty)).$$

В разделе 2.2 рассмотрена вспомогательная задача для волнового уравнения (1) в замыканиях $\overline{Q^{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots 6$, областей

$$Q^{(1)} = Q \cap \{(t,x) : x + at < x^*, x - at < x^*, x - at > 0\},$$

$$Q^{(2)} = Q \cap \{(t,x) : x + at > x^*, x - at > x^*, x - at > 0\},$$
$$Q^{(3)} = Q \cap \{(t,x) : x + at > x^*, x - at < x^*, x - at > 0\},$$
$$Q^{(4)} = Q \cap \{(t,x) : x + at < x^*, x - at < x^*, x - at < 0\},$$
$$Q^{(5)} = Q \cap \{(t,x) : x + at > x^*, x - at > -x^*, x - at < 0\},$$
$$Q^{(6)} = Q \cap \{(t,x) : x - at < -x^*\}.$$

К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\infty),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x \in [0,x^*), \quad x^* > 0, \\ \tilde{\psi}_2(x), & \qquad x \in (x^*,\infty), \end{cases} \tag{4}$$

и граничное условие (3). При этом полагаем, что

$$\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)),$$

$\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x \in (x^*,\infty)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$.

В этом разделе вводится определение решения задачи (1), (3), (4). Для этого определим функции $u^{(i)}$ как локальные решения задачи (1), (3), (4) в областях $Q^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,6$. Пусть

$$u(t,x) = u^{(i)}(t,x)\,, \quad (t,x) \in Q^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots,6. \tag{5}$$

Определение 1 [1-A, 2-A]. *Функцию* u, *определяемую формулой* (5), *назовем решением вспомогательной задачи* (1), (3), (4), *если* $u^{(j)} \in C^2\Big(\overline{Q^{(j)}}\Big)$ *для каждого* $j = 1,2,\ldots 6$, *функция* $u^{(j)}$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в* $Q^{(j)}$, *функция* u *удовлетворяет первому из* (4) *условию*

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad x \in [0,\infty),$$

и граничному условию (3), *функция* $u^{(1)}$ *удовлетворяет второму из* (4) *условию Коши на полуоткрытом отрезке* $[0,x^*)$, *функция* $u^{(2)}$ *удовлетворяет этому условию на полупрямой* (x^*,∞). *Функции* $u^{(j)}$ *на границах* $\partial Q^{(j)}$ *раздела области* Q *удовлетворяют соответствующим условиям сопряжения*

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t, at - x^*) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t, x^* - at) =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t, x^* + at) = \frac{\delta\psi}{2},$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^-\right](t, at - x^*) = \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^-\right](t, x^* - at) =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^- - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^+\right](t, x^* + at) = a\frac{\delta\psi^{(1)}}{2},$$
$$[u^+ - u^-](t, at) = \varphi(0) - \mu(0),$$
$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t, at) = \psi_1(0) - D\mu(0)\,,$$
$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^-\right](t, at) = a^2 D^2\varphi(0) + f(0,0) - D^2\mu(0).$$

где

$$\delta\psi = \tilde{\psi}_2(x^*) - \tilde{\psi}_1(x^*), \;\; \delta\psi^{(1)} = D\tilde{\psi}_2(x^*) - D\tilde{\psi}_1(x^*)$$

Здесь использованы обозначения $()^{\pm}$ — предельные значения функции u и ее производных $\partial_t^k \partial_x^p u$ с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е.

$$\left(\frac{\partial^{k+p}}{\partial t^k \partial x^p} u\right)^{\pm}(t, r(t)) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\partial^{k+p}}{\partial t^k \partial x^p} u(t, r(t) \pm \Delta t)\,,$$

где $k \geq 0$, $p \geq 0$ и r – функция действительного переменного.

В разделе 2.3 получены следующие теоремы.

Теорема 1 [1-A, 2-A]. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций:*

$$\begin{gathered} f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \\ \tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty)), \quad \mu \in C^2([0,\infty)), \end{gathered} \tag{6}$$

то существует единственное решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения 1.*

Теорема 2 [1-A, 2-A]. *Пусть выполняются условия* (6). *Тогда решение задачи* (1), (3), (4) *в смысле определения 1 принадлежит классу* $C(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда* $\mu(0) = \varphi(0)$.

Теорема 3 [1-A, 2-A]. *Пусть выполняются условия* (6). *Тогда решение задачи* (1), (3), (4) *в смысле определения 1 принадлежит классам*

$$C^1\Big(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}}\Big) \quad и \quad C^1\Big(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\Big),$$

тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Теорема 4 [1-A, 2-A]. *Пусть выполняются условия* (6). *Тогда решение задачи* (1), (3), (4) *в смысле определения 1 принадлежит классам*

$$C^2\left(\overline{Q^{(1)}}\cup\overline{Q^{(2)}}\cup\overline{Q^{(3)}}\right)\quad \text{и}\quad C^2\left(\overline{Q^{(4)}}\cup\overline{Q^{(5)}}\cup\overline{Q^{(6)}}\right),$$

тогда и только тогда, когда $D\tilde{\psi}_1(x^*)=D\tilde{\psi}_2(x^*)$ *и* $\tilde{\psi}_1(x^*)=\tilde{\psi}_2(x^*)$.

В разделе 2.4 приведена развернутая формулировка задачи (1), (3), (4) как задачи с условиями сопряжения.

В разделе 2.5 предельным переходом получено решение основной задачи (1) – (3), определяемое следующим образом:

Определение 2. *Пусть при* $x^*\to 0$ *существуют всюду в* $\overline{Q}$ *поточечные пределы решения задачи* (1), (3), (4) *в смысле определения 1 и его частных производных до второго порядка включительно. Тогда функцию* u *назовем решением задачи* (1) – (3), *если она являются поточечным пределом решений задачи* (1), (3), (4) *в смысле определения 1 при* $x^*\to 0$.

В разделе 2.5 также сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 5 [1-A, 2-A, 9-A]. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1\left(\overline{Q}\right),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi_2\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^2([0,\infty)).$$

Тогда решение задачи (1) – (3) *в смысле определения 2 при является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$D^2\mu(0)=a^2D^2\varphi(0)+f(0,0),\quad D\mu(0)=\psi_1,\quad \mu(0)=\varphi(0).$$

Кроме того, оно принадлежит классу

$$C\left(\overline{Q}\right)\cap C^2\left(\overline{\Omega_1}\right)\cap C^2\left(\overline{\Omega_2}\right)$$

и удовлетворяет условиям сопряжения

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t,at)=\psi_2(0+)-D\mu(0),$$

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right](t,at)=\frac{D\mu(0)-\psi_2\left(0+\right)}{a},$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^+-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^-\right](t,at)=a^2D^2\varphi(0)-D^2\mu(0)+f(0,0),$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^+-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^-\right](t,at)=\frac{a^2D^2\varphi(0)-D^2\mu(0)+f(0,0)}{a^2},$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)^+-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)^-\right](t,at)=\frac{D^2\varphi(0)-a^2D^2\mu(0)-f(0,0)}{a}.$$

В **третьей главе** рассматривается задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню. В разделе 3.1, следуя[15] приводится математическая модель исходной задачи, а именно: на замыканиях $\overline{\Omega_1}$ и $\overline{\Omega_2}$ областей требуется найти решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям Коши (2) и граничному условию

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial}{\partial x} + c^2\right)u(t,0) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & t = 0, \\ \mu_2(t)\,, & t \in (0,\infty), \end{cases} \tag{7}$$

причем величина μ_1 не задается произвольно[16], а зависит от функций f, φ, ψ и будет определена в дальнейшем.

В разделе 3.2 рассматривается вспомогательная задача

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2,\ldots,6, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x < \infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x > x^*, \end{cases} \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial}{\partial x} + c^2\right)u(t,0) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t), & t < a^{-1}x^*, \\ \tilde{\mu}_2(t), & t > a^{-1}x^*, \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

причем

$$x^* > 0, \quad \tilde{\mu}_1(0) = \mu_1, \quad \tilde{\psi}_1(0) = \psi_1, \quad \tilde{\psi}_2 = \psi_2|_{[x^*,\infty)}, \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_2|_{[a^{-1}x^*,\infty)}.$$

Определение 3 [6-A]. *Непрерывную функцию u назовем решением задачи (8), если u дважды непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = f(t,x)$$

на множествах $\overline{Q^{(j)}}$ для всех $j = 1,2,\ldots,6$, первому начальному условию

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \ge 0,$$

второму условию Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \tilde{\psi}(x)$$

на множестве $[0,x^*) \cup (x^*,\infty)$ и граничному условию

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial}{\partial x} + c^2\right)u(t,0) = \tilde{\mu}(t)$$

[15] Манжосов, В. К. Модели продольного удара / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 160 с.

[16] Гайдук, С. И. Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 668–685.

на множестве
$$\big[0,a^{-1}x^*\big)\cup\big(a^{-1}x^*,\infty\big).$$
Кроме того, функция u *на характеристиках*
$$x-at=x^*,\ \ x+at=x^*,\ \ x-at=0\ \ \text{и}\ \ x-at=-x^*$$
удовлетворяет условиям сопряжения:
$$\begin{aligned}&[(u)^+-(u)^-](t,at+x^*)=[(u)^+-(u)^-](t,x^*-at)=0,\\&[(u)^+-(u)^-](t,at)=[(\partial_t u)^+-(\partial_t u)^-](t,at)=0,\\&[(u)^+-(u)^-](t,at-x^*)=0,\quad [(\partial_t u)^+-(\partial_t u)^-](t,at-x^*)=C^{(1)}.\end{aligned}$$

Введем определение решения исходной задачи (1), (2), (7).

Определение 4 [3-A, 4-A, 6-A]. *Пусть при* $x^*\to 0$ *существуют всюду в* $\overline{Q}$ *поточечные пределы решения задачи* (8) *в смысле определения 1 и его частных производных до второго порядка включительно. Тогда функцию* u *назовем решением задачи* (1), (2), (7), *если она являются поточечным пределом решений задачи* (8) *в смысле определения 1 при* $x^*\to 0$.

В разделе 3.3 сформулированы и доказаны следующие теоремы.

Теорема 6 [6-A]. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций:*
$$\begin{gathered}f\in C^1\big(\overline{Q}\big),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \tilde\psi_1\in C^1([0,x^*]),\quad \tilde\psi_2\in C^1([x^*,\infty]),\\ \tilde\mu_1\in C^1\big(\big[0,a^{-1}x^*\big]\big),\quad \tilde\mu_2\in C^1\big(\big[a^{-1}x^*,\infty\big)\big),\end{gathered}\tag{9}$$
то существует единственное решение задачи (8) *в смысле определения 3.*

Теорема 7 [6-A]. *Пусть выполняются условия* (9). *Тогда решение задачи* (8) *в смысле определения 3 принадлежит классу* $C^1\big(\overline{Q}\big)$, *тогда и только тогда, когда* $\tilde\psi_1(x^*)=\tilde\psi_2\,(x^*)$ *и* $C^{(1)}=0$.

Теорема 8 [6-A]. *Пусть выполняются условия* (9). *Тогда решение задачи* (8) *в смысле определения 3 принадлежит классам*
$$C^2\Big(\overline{Q^{(1)}}\cup\overline{Q^{(2)}}\cup\overline{Q^{(3)}}\Big)\quad \text{и}\quad C^2\Big(\overline{Q^{(4)}}\cup\overline{Q^{(5)}}\cup\overline{Q^{(6)}}\Big),$$
тогда и только тогда, когда выполняются условия
$$\tilde\mu_2\left(\frac{x^*}{a}\right)=\tilde\mu_1\left(\frac{x^*}{a}\right),\quad D\tilde\psi_1(x^*)=D\tilde\psi_2(x^*),\quad C^{(1)}=0,\quad \tilde\psi_1(x^*)=\tilde\psi_2(x^*).$$

В разделе 3.4 предельным переходом решается задача (1), (2), (7).

Теорема 9 [4-A, 6-A, 11-A, 12-A]. *Пусть выполняются условия гладкости для заданных функций:*
$$f\in C^1\big(\overline{Q}\big),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi_2\in C^1([0,\infty)),\quad \mu_2\in C^1([0,\infty)).$$

Решение задачи (1), (2), (7) *в смысле определения 4 является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования*

$$\mu_1 = f(0,0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0).$$

Кроме того, оно принадлежит классу $C\big(\overline{Q}\big) \cap C^2\big(\overline{\Omega_1}\big) \cap C^2\big(\overline{\Omega_2}\big)$ *и удовлетворяет условиям сопряжения*

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t, at) = 0.$$

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right](t, at) = \frac{\left(\dfrac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \dfrac{\psi_2\,(0+)}{2}\right)}{a}.$$

Ослабить условия гладкости исходных данных в частном случае $c = 0$ позволяет следующее утверждение.

Утверждение 2 [3-A, 10-A]. Если в задачах (1), (2), (6) и (7) положить $c = 0$, то в теоремах 6 – 9 можно понизить требования гладкости исходных данных с

$$\tilde{\mu}_1 \in C^1\big(\big[0, a^{-1}x^*\big]\big), \quad \tilde{\mu}_2 \in C^1\big(\big[a^{-1}x^*, \infty\big)\big), \quad \mu_2 \in C^1([0,\infty))$$

до

$$\tilde{\mu}_1 \in C\big(\big[0, a^{-1}x^*\big]\big), \quad \tilde{\mu}_2 \in C\big(\big[a^{-1}x^*, \infty\big)\big), \quad \mu_2 \in C([0,\infty))$$

соответственно.

В разделе 3.5 рассматривается вопрос о выборе константы $C^{(1)}$ для построения физически корректного решения.

В разделе 3.6 проводится сравнение метода характеристик с преобразованием Лапласа.

В разделе 3.7 для задачи (1), (2), (7) в простейшем случае

$$\varphi \equiv \psi_2 \equiv \mu \equiv 0, \quad f \equiv 0, \quad E = 7 \times 10^8, \quad \rho = 2,7, \quad S = 0,64,$$

$$k = 10^6, \quad M = 750, \quad v = 2000.$$

построено решение u и графики функций $u|_{t_k}$ $\partial_t u|_{t_k}$, $E\partial_x u|_{t_k}$, в различные моменты времени t_k.

В **четвертой главе** рассматривается задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара. В разделе 4.1 на основе[15] поставленная задача сведена к решению двух смешанных задач (в данном диссертационном исследовании мы рассматриваем более общий случай когда числа a_1 и a_2 не обязательно равные), а именно:

1) в замыканиях $\overline{\Upsilon_1}$ и $\overline{\Upsilon_2}$ областей

$$\Upsilon_1 = \{(t,x) : (t,x) \in Q_1 \wedge x - a_1 t > 0\}$$

и

$$\Upsilon_2 = \{(t,x) : (t,x) \in Q_1 \wedge x - a_1 t < 0\},$$

где $Q_1 = (0,T) \times (0,\infty)$, требуется найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_1(t,x) = f_1(t,x), \tag{10}$$

при начальных условиях

$$u_1(0,x) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x > 0, \end{cases} \tag{11}$$

и граничном условии

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial}{\partial x} + c^2\right) u_1(t,0) = \begin{cases} \mu_0, & t = 0, \\ \mu_1(t), & 0 < t \leq T, \end{cases} \tag{12}$$

2) в замыканиях $\overline{\Theta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, областей

$$\Theta_i = \left\{(t,x) : (t,x) \in Q_2 \wedge (t - T, x) \in \tilde{Q}_i\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

где

$$\begin{gathered}
Q_2 = (0,\infty) \times (T,\infty), \\
\tilde{Q}_1 = Q \cap \{(t,x) : x + a_2 t < a_2 T, x - a_2 t < a_2 T, x - a_2 t > 0\}, \\
\tilde{Q}_2 = Q \cap \{(t,x) : x + a_2 t > a_2 T, x - a_2 t > a_2 T, x - a_2 t > 0\}, \\
\tilde{Q}_3 = Q \cap \{(t,x) : x + a_2 t > a_2 T, x - a_2 t < a_2 T, x - a_2 t > 0\}, \\
\tilde{Q}_4 = Q \cap \{(t,x) : x + a_2 t < a_2 T, x - a_2 t < a_2 T, x - a_2 t < 0\}, \\
\tilde{Q}_5 = Q \cap \{(t,x) : x + a_2 t > a_2 T, x - a_2 t > -a_2 T, x - a_2 t < 0\}, \\
\tilde{Q}_6 = Q \cap \{(t,x) : x - a_2 t < -a_2 T\}
\end{gathered}$$

требуется найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_2(t,x) = f_2(t,x), \tag{13}$$

при начальных условиях

$$u_2(t = T, x) = u_1(T,x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(t = T, x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(T,x), \quad x \geq 0, \tag{14}$$

и граничном условии

$$\left(h - \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(t,0) = \mu_2(t), \qquad t > T. \tag{15}$$

В разделе 4.2 рассматривается вспомогательная задача. В замыканиях областях $Q^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, требуется найти решение уравнения (1) при начальных условиях

$$\begin{gathered} u(0,x) = \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(x), & x \in [0, x^*), \\ \tilde{\varphi}(x^*), & x = x^*, \\ \tilde{\varphi}_2(x), & x \in (x^*, \infty), \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x \in [0, x^*), \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \in (x^*, \infty), \end{cases} \end{gathered} \tag{16}$$

и граничном условии

$$\left(h - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,0) = \tilde{\mu}\,(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t), & t < \dfrac{x^*}{a}, \\ \tilde{\mu}_2(t), & t > \dfrac{x^*}{a}. \end{cases} \tag{17}$$

где $\tilde{\varphi}(x^*) = \tilde{\varphi}_1(x^* - 0) = \tilde{\varphi}_2(x^* + 0)$. Решение этой вспомогательной задачи определим следующим образом.

Определение 5 [7-А]. *Непрерывную функцию* v *назовем решением задачи* (1), (16), (17), *если и дважды непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет уравнению* (1) *на множествах* $\overline{Q^{(j)}}$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots, 6$, *первому начальному условию* $u(0,x) = \tilde{\psi}(x)$, $x \geq 0$, *второму условию Коши* $\partial_t u(0,x) = \tilde{\psi}(x)$ *на множестве* $[0, x^*) \cup (x^*, \infty)$ *и граничному условию* (17) *на множестве*

$$\big[0, a^{-1}x^*\big) \cup \big(a^{-1}x^*, \infty\big).$$

Кроме того, функция v *на характеристиках* $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ *и* $x + at = x^*$ *удовлетворяет условиям сопряжения:*

$$\begin{gathered} [(v)^+ - (v)^-](t, at + x^*) = [(v)^+ - (v)^-](t, x^* - at) = 0, \\ [(v)^+ - (v)^-](t, at) = 0, \\ [(v)^+ - (v)^-](t, at - x^*) = 0. \end{gathered}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 10 [7-А]. *Пусть выполняются условия гладкости для заданных функций:*

$$f \in C^1\big(\overline{Q}\big), \quad \tilde{\varphi}_1 \in C^2([0, x^*]), \quad \tilde{\varphi}_2 \in C^2([x^*, \infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*]),$$

$$\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)), \quad \tilde{\mu}_1 \in C\big([0,a^{-1}x^*]\big), \quad \tilde{\mu}_2 \in C\big([a^{-1}x^*,\infty)\big),$$

Задача (1), (16), (17) *имеет единственное решение в смысле определения 5.*

В разделе 4.3 рассматривается сначала задача (10)–(12).

Определение 6 [7-A]. *Пусть выполняется условие*

$$f_1(0,0) - \mu_0 + c^2\varphi(0) + a_1^2 D^2\psi(0) + b^2 D\varphi(0) = 0.$$

Тогда функцию u_1 *из класса*

$$C\big(\overline{Q_1}\big) \cap C^2\big(\overline{\Upsilon_1}\big) \cap C^2\big(\overline{\Upsilon_2}\big),$$

назовем решением задачи (10)–(12)*, если она удовлетворяет уравнению* (10) *на множествах* $\overline{\Upsilon_1}$ *и* $\overline{\Upsilon}_2$*, начальным условиям* (11)*, граничному условию* (12) *на множестве* $(0,T]$ *и условиям сопряжения:*

$$[(u_1)^+ - (u_1)^-]\,(t,a_1t) = 0.$$

$$\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^-\right](t,a_1t) = \frac{\left(\dfrac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \dfrac{\psi_2\,(0+)}{2}\right)}{a_1}.$$

где $C^{(1)}$ *— это некоторая наперед заданная вещественная константа, определяемая постановкой конкретной задачи. Ее вычисление приведено в главе 3 (раздел 3.5).*

Теорема 11 [7-A]. *Пусть выполняются условия гладкости*

$$f_1 \in C^1([0,T]\times[0,\infty)), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)),$$
$$\psi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^1([0,T]).$$

Тогда задача (10)–(12) *имеет единственное решение* u_1 *в смысле определения 5.*

Затем рассматривается задача (13)–(15).

Определение 7 [7-A]. *Функцию* u_2 *назовем решением задачи* (14) – (16)*, если функция* $u\colon (t,x) \ni [0,\infty)\times[0,\infty) \mapsto u_2\,(t+T,x) \in \mathrm{R}$ *является решением задачи* (1), (16), (17)*, в смысле определения 4, в которой в которой число* $a = a_2$ *и функции*

$$\tilde{\varphi} : x \to u_1\,(T,x), \tilde{\psi} : x \to u_1\,(T,x), \tilde{\mu} : t \to \mu_2(t+T), f : (t,x) \to f_2(t+T,x).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 12 [7-A, 13-A]. *Пусть выполняются условия гладкости:*

$$f_1 \in C^1([0,T]\times[0,\infty)), \quad f_2 \in C^1([T,\infty)\times[0,\infty)), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)),$$

$$\psi_2 \in C^1([0,\infty)), \quad \mu_1 \in C^1\left([0,T]\right), \quad \mu_2 \in C^1([T,\infty)).$$

Тогда задача (13) – (15) *имеет единственное решение* u_2 *в смысле определения 7.*

При этом решение исходной задачи из волновой теории удара находится по формуле

$$u(t,x) = \begin{cases} \left. u_1(t,x)\right|_{a_1=a}, & x \geq 0, \quad t \in [0,T), \\ \left. u_2(t,x)\right|_{a_2=a}, & x \geq 0, \quad t \in [T,\infty). \end{cases}$$

В разделе 4.4 показано как можно определить величину T, характеризующую длительность удара.

В **пятой главе** рассматривается смешанная задача для волнового уравнения в криволинейной полуполосе. В разделе 5.1 в замыкании $\overline{Q}$ криволинейной области $Q = \{(t,x) : t \in (0,\infty) \wedge x \in (\gamma(t), l)\}$, где l — положительное действительное число, двух независимых переменных $(t,x) \in \overline{Q} \subset \mathrm{R}^2$, приведена постановка задачи для волнового уравнения (1) в замыкании $\overline{Q^{(i,j)}}$, $i,j = 0,1,2\ldots, \ \ |i-j| \leq 1$, областей $Q^{(i,j)}$

$$\begin{aligned} &Q^{(0,0)} = Q \cap \{(t,x) : x - at \in [0,l] \wedge x + at \in [0,l]\}, \\ &Q^{(1,0)} = Q \cap \{(t,x) : x - at \in [\gamma_-(r_1), 0] \wedge x + at \in [0,l]\}, \\ &Q^{(0,1)} = Q \cap \{(t,x) : x - at \in [0,l] \wedge x + at \in [l, l + al_1]\}, \\ &Q^{(i,j)} = Q \cap \{(t,x) : x - at \in [\gamma_-(r_i), \gamma_-(r_{i-1})] \wedge x + at \in \\ &\in [l + al_{j-1}, l + al_j]\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $r_0 = l_0 = 0$, $l_i = r_{i-1} + a^{-1}\left(l - \gamma\left(r_{i-1}\right)\right)$, $r_i = \Phi_+(l + al_{i-1})$ (функция Φ_+ будет определена в дальнейшем), с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) + \begin{cases} 0, & x \in [0,l), \\ v, & x = l, \end{cases} \quad x \in [0,l], \tag{19}$$

и граничными условиями

$$u(t,\gamma(t)) = \mu_1(t)\,, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,l) = \mu_2(t)\,, \quad t \in [0,\infty)\,. \tag{20}$$

Также полагаем, что

$$\begin{gathered} \gamma \in C^1\left([0,\infty)\right),\, D\gamma\left(t\right) \in (-a,a) \text{ для всех } t \in [0,\infty), \\ \lim_{t \to +\infty} \gamma(t) \pm at = \pm\infty \end{gathered} \tag{21}$$

и кривые $x = \gamma(t)$ и $x = l$ не пересекаются.

В разделе 5.1 также изучены некоторые свойства области Q, в которой рассматривается задача, и доказана корректность разбиения (18) области Q на подобласти $Q^{(i,j)}$, $i,j=0,1,2\dots$, $|i-j|\le 1$.

Введем функции $\gamma_+ : [0,\infty) \ni t \mapsto \gamma(t)+at$ и $\gamma_- : [0,\infty) \ni t \mapsto \gamma(t)-at$. Нам также понадобятся обратные к функциям γ_+ и γ_-, которые обозначим символами Φ_+ и Φ_-, соответственно, т.е. $\Phi_+(\gamma(t)+at)=t$ и $\Phi_-(\gamma(t)-at)=t$.

В разделе 5.2 рассматривается частный случай задачи (1), (19)–(21):

$$v=0. \tag{22}$$

Справедлива теорема.

Теорема 13 [8-А]. *Пусть выполняются условия гладкости*

$$\begin{aligned} &\varphi \in C^2([0,l]), \quad \psi \in C^1([0,l]), \quad \mu_1 \in C^2([0,\infty)),\\ &\mu_2 \in C([0,\infty)), \quad \gamma \in C^2([0,\infty)), \quad f \in C^1\big(\overline{Q}\big). \end{aligned} \tag{23}$$

Смешанная задача (1), (19) – (22) *имеет единственное решение в классе* $C^2\big(\overline{Q}\big)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu_1(0)-\varphi(0)=0. \tag{24}$$

$$D\mu_1(0)-\psi(0)+D\gamma(0)\,D\varphi(0)=0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &D^2\mu_1(0)-\Big(a^2+(D\gamma(0))^2\Big)\,D^2\varphi(0)-f(0,0)-\\ &-2D\mu(0)\,D\psi(0)-D^2\gamma(0)\,D\varphi\,(0)=0 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\mu_2(0)-f(0,l)-bD\varphi(0)-a^2D^2!\,(l)=0. \tag{27}$$

В разделе 5.3 рассматривается общий случай задачи (1), (27)–(29).

Определение 8 [8-А, 14-А]. *Функция u является решением задачи* (1), (19) – (21), *если она представима в виде $u=u_1+u_2$, где u_1 является классическим решением задачи* (1), (19) – (22) *и u_2 удовлетворяет уравнению* (1) *на множествах $\overline{Q^{(i,j)}}$, $i,j=0,1,2\dots$, $|i-j|\le 1$, с $f\equiv 0$, начальным условиям*

$$u_2(0,x)=\frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x)=0, x\in[0,l],$$

граничным условиями (20) с $\mu_1=\mu_2\equiv 0$, и следующием условиям согласования:

$$[(u_2)^+-(u_2)^-](t,x=\gamma_-(r_i)+at)=0, \tag{28}$$

$$[(u_2)^+-(u_2)^-](t,x=l+al_i-at)=0, \quad i=0,1,2\dots, \tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^{-}\right](t, x = l + al_i - at) = \\
&= \begin{cases} v, & i \equiv 0 \pmod 2, \\ 0, & i \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots
\end{aligned} \tag{30}
$$

Теорема 14 [8-А, 14-А]. *Пусть выполняются условия гладкости* (23)*. Тогда смешанная задача* (1)*,* (19) – (21) *имеет единственное решение в смысле определения 8 тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования* (24) – (27)*.*

Выбор условий согласования (30) обуславливается следующим утверждением.

Утверждение 7 [8-А]. Пусть выполнены условия (23). Тогда решение задачи (1), (19) – (21) в смысле определения 8 физически корректно, если выполняется условие

$$
D\gamma(r_j) = 0, \quad j = 0, 1, 2 \ldots, \quad j \equiv 1 \pmod 2).
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В настоящей диссертации получены следующие результаты:

1. Теоремы существования и единственности решений как решений смешанных задач с условиями сопряжения на характеристиках, содержащие необходимые и достаточные условия согласования, и представления решений в явном аналитическом виде следующих смешанных задач с разрывными данными:

а) Первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения с разрывными начальными условиями [1-А, 2-А, 9-А].

б) Задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае прилипания ударившего груза к стержню после удара [3-А, 4-А, 6-А, 10-А, 11-А, 12-А].

в) Смешанная задача в криволинейной полуполосе для волнового уравнения с разрывными начальными условиями [5-А, 8-А, 14-А].

2. Теорема существования и единственности решения как решения смешанной задачи с условиям сопряжения на характеристиках, содержащая достаточные условия согласования, и представления решения в явном аналитическом виде задачи о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара [7-А, 13-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационного исследования могут найти широкое применение при моделировании различных ударных процессов, описываемых одномерным волновым уравнением, в том числе и на ЭВМ. Также результаты исследования можно использовать при проведении лекционных и практических занятий по математическому моделированию, теоретической механике, теории упругости. В дальнейшем, они могут найти применение в последующих исследованиях различных задач для гиперболических уравнений.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий

1-А. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 6. – С. 657–662.

2-А. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 23–32.

3-А. Корзюк, В. И. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 417–427.

4-А. Корзюк, В. И. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2022. – Т. 2. – С. 34–46.

5-А. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Differential Equations. – 2023. – V. 59. – P. 1075–1089.

6-А. Корзюк, В. И. Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько, В. В. Колячко // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – Т. 3. – С. 6–18.

7-А. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи о продольном ударе по упругому однородному полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 2. – С. 95–105.

8-А. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи в криволинейной полуполосе для волнового уравнения с разрывными начальными условиями / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько, В. В. Колячко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 4. – С. 271–278.

Тезисы и материалы докладов научных конференций

9-A. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. математической конференции, посвящ. 100-летию со дня рождения профессора Ю.С.Богданова, г. Минск, 1–4 июня 2021 г. / Институт математики НАН Беларуси; ред.: С. Г. Красовский. – Минск, 2021. – С. 179–181.

10-A. Корзюк, В. И. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // XIII Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., 22–25 ноября 2021 г., г. Минск: в 2 ч. / Национальная академия наук Беларуси [и др.]; сост. В. В. Лепин. – Минск, 2021. – Ч. 1. – С. 64–66.

11-A. Корзюк, В. И. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Уравнения в частных производных и смежные проблемы (PDERT'22) : сб. материалов междунар. конф., г. Белгород, 15–19 июля 2022 г. / НИУ «БелГУ»; под ред. В. Б. Васильева, И. С. Ломова. – Белгород, 2022. – С. 81–83.

12-A. Korzyuk V. I. Solution of a Problem of a Longitudinal Impact on a Semi-Infinite Elastic Rod / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko, V. V. Kolyachko // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: тезисы докладов международной научной конференции, 23–25 ноября 2023 г., г. Ташкент: в 2 ч. / Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; редкол.: А.К. Уринов и др. – Фергана, 2023. – Ч. 1. – С. 354–355.

13-A. Korzyuk, V. I. Mixed problem from the theory of longitudinal impact on an elastic semi-infinite rod in the case of separation of the impacting body after the collision / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // XIV Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., 28 октября – 1 ноября 2024 г., г. Минск: в 3 ч. / Национальная академия наук Беларуси [и др.]; сост. Т. С. Бусел. – Минск, 2024. – Ч. 2. – С. 109–110.

14-A. Korzyuk, V. I. Classical solution of a problem of the longitudinal impact on a rod with a moving boundary / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko, V. V. Kolyachko // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: тез. докл. междунар. научной конференции посвященной 90-летию со дня рождения академика Т.Д. Джураева, Ташкент, 24–26 октября 2024 г. / Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; редкол.: М. М. Арипов [и др.]. – Ташкент, 2024. – С. 84.

РЭЗЮМЭ

Рудзько Ян Вячаслававіч

Змешаныя задачы з нягладкімі ўмовамі для хвалёвага раўнання

Ключавыя словы: хвалёвае раўнанне, змешаная задача, разрыўныя пачатковыя ўмовы, разрыўныя краявыя ўмовы, класічнае рашэнне, умовы ўзгаднення, умовы спалучэння, падоўжны ўдар, метад характарыстык.

Мэта даследавання: знаходжанне неабходных і дастатковых умоў узгаднення на зыходныя дадзеныя (правую частку раўнанняў, пачатковыя і гранічныя ўмовы, каэфіцыенты раўнання, функцыі, якія задаюць мяжу вобласці) для існавання адзінага рашэнні змешаных задач для хвалёвага раўнання з разрыўнымі межавымі і пачатковымі ўмовамі.

Метады даследавання: метад характарыстык, метад лімітавага пераходу і іншыя метады матэматычнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Сфармуляваны тэарэмы існавання і адзінасці класічных рашэнняў наступных задач з разрыўнымі дадзенымі: першая змешаная задача ў чвэрці плоскасці для хвалёвага раўнання, задача аб падоўжным удары па пругкім паўбясконцым стрыжню у выпадку прыліпання ўдарылага грузу да стрыжня пасля ўдару, задача аб падоўжным удары па пругкім паўбясконцаму стрыжню ў выпадку аддзялення ўдарылага грузу ад стрыжня пасля ўдару, змешаная задача ў крывалінейнай паўпалосе для хвалёвага раўнання. Атрыманы ўяўленні ў відавочным аналітычным выглядзе рашэнняў вышэйпералічаных задач.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна прымянення. З дапамогай вынікаў даследавання можна распрацаваць алгарытмы для пошуку рашэнняў як у аналітычным выглядзе, так і ў лікавым. Знойдзеныя ўмовы спалучэння даюць магчымасць эфектыўна будаваць набліжаныя рашэнні, у тым ліку і разрыўныя, пры парушэнні ўмоў узгаднення.

Таксама вынікі дадзенага даследавання можна выкарыстоўваць у навучальным працэсе пры чытанні лекцый і правядзенні практычных заняткаў па курсах, звязаных з матэматычным мадэляваннем.

РЕЗЮМЕ

Рудько Ян Вячеславович

Смешанные задачи с негладкими условиями для волнового уравнения

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанная задача, разрывные начальные условия, разрывные краевые условия, классическое решение, условия согласования, условия сопряжения, продольный удар, метод характеристик.

Цель исследования: нахождение необходимых и достаточных условий согласования на исходные данные (правую часть уравнений, начальные и граничные условия, коэффициенты уравнения, функции, задающие границу области) для существования единственного решения смешанных задач для волнового уравнения с разрывными граничными и начальными условиями.

Методы исследования: метод характеристик, метод предельного перехода и другие методы математического анализа.

Полученные результаты и их новизна. Сформулированы теоремы существования и единственности решений следующих задач с разрывными данными: первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения, задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае прилипания ударившего груза к стержню после удара, задача о продольном ударе по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего груза от стержня после удара, смешанная задача в криволинейной полуполосе для волнового уравнения. Получены представления в явном аналитическом виде решений вышеперечисленных задач.

Рекомендации по использованию и области применения. С помощью результатов исследования можно разработать алгоритмы для поиска решений как в аналитическом виде, так и в численном. Найденные условия сопряжения позволяют эффективно строить приближенные решения, в том числе и разрывные, при нарушении условий согласования.

Также результаты данного исследования можно использовать в учебном процессе при чтении лекций и проведении практических занятий по курсам, связанным с математическим моделированием.

SUMMARY

Rudzko Jan Viaczaslavavicz

Mixed problems with nonsmooth conditions for the wave equation

Keywords: wave equation, mixed problem, discontinuous initial conditions, discontinuous boundary conditions, classical solution, matching conditions, conjugation conditions, longitudinal impact, method of characteristics.

Aim of the research: finding the necessary and sufficient matching conditions for the initial data (the right-hand side of the equations, initial and boundary conditions, equation coefficients, functions defining the boundary of the domain) for the existence of a unique solution to mixed problems for the wave equation with discontinuous boundary and initial conditions.

Research methods: method of characteristics, limit passage method and other methods of mathematical analysis.

Obtained results and their novelty. Theorems of existence and uniqueness of solutions of the following problems with discontinuous data are formulated: the first mixed problem in a quarter plane for the wave equation, the problem of a longitudinal impact on an elastic semi-infinite rod in the case of sticking of the striking load to the rod after the impact, the problem of a longitudinal impact on an elastic semi-infinite rod in the case of separation of the striking load from the rod after the impact, a mixed problem in a curvilinear half-strip for the wave equation. Explicit analytical representations of solutions to the above problems are obtained.

Recommendations for usage and scope of application. Using the results of the research, it is possible to develop algorithms for finding solutions both in analytical and numerical form. The found conjugation conditions allow us to construct effectively approximate solutions, including discontinuous ones, when the matching conditions are violated. The results of this study can also be used in the educational process when giving lectures and conducting practical classes in courses related to mathematical modeling.