

**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**  
о диссертации Утебаева Бахадыра Даулетбай улы  
«Компактные и монотонные разностные схемы для гиперболических  
уравнений первого порядка и параболических уравнений»,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.07 – «вычислительная математика»

**1. Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которой она представлена к защите.**

*Объектом исследования* диссертационной работы Утебаева Б.Д. являются разностные схемы, аппроксимирующие линейные, полулинейные и квазилинейные гиперболические уравнения первого порядка, а также уравнения параболического типа. *Основным предметом исследования* диссертационной работы являются такие свойства указанных разностных схем как компактность и монотонность. Тема диссертации и ее содержание соответствуют отрасли физико-математических наук и специальности 01.01.07 – «вычислительная математика».

**2. Актуальность темы диссертации.**

Задачи, которые приводят к решению дифференциальных уравнений в частных производных, возникают в теории упругости, гидродинамике, теории горения, математической биологии, экологии и других областях. Большинство этих уравнений, как правило, являются нелинейными, их аналитического решения, как правило, найти невозможно. Поэтому применение численных методов для нахождения решений таких задач получает все более широкое распространение в научных исследованиях.

В настоящее время в теории численных методов решения задач математической физики много усилий направлено на разработку разностных схем высокого порядка точности. Востребованность схем повышенной точности, построенных на стандартных шаблонах и называемых компактными, не вызывает сомнений, поскольку подобные схемы позволяют при меньшем числе точек разностной сетки получить большую точность. Благодаря свойствам высокой точности компактные разностные схемы привлекают все большее внимание многих исследователей для решения различных задач. К настоящему времени существует обширная литература, посвященная таким схемам, многие из которых стали уже классическими. Однако вопрос нельзя считать закрытым. Поэтому представленные в данной работе исследования, посвященные построению компактных и монотонных разностных схем для различных уравнений математической физики, являются весьма актуальными.

**3. Степень новизны результатов диссертации и научных положений, выносимых на защиту.**

В диссертации Б.Д. Утебаева построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы на стандартных шаблонах, аппроксимирующие

линейные, полулинейные и квазилинейные гиперболические уравнения первого порядка, а также параболические уравнения.

Построены и исследованы монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для одномерного и двумерного уравнений переноса. Получены оценки точности разностного решения в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае.

Для параболических уравнений на стандартных шаблонах построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы, доказаны устойчивость и монотонность компактных схем, аппроксимирующих полулинейные уравнения Фишера.

Для одномерного и двумерного обобщенных уравнений Фишера с нелинейной конвекцией разработаны компактные разностные схемы, доказана их монотонность, получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе двусторонних оценок сеточного решения.

#### **4. Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.**

Все утверждения диссертации, их доказательства, заключительные выводы и рекомендации сформулированы корректно, строго математически обоснованы, достоверны и имеют законченный характер. Диссертация содержит все необходимые библиографические ссылки, имеющие отношение к ее теме или используемым в ней методам доказательств.

#### **5. Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию.**

Результаты диссертации имеют в основном теоретический характер и относятся к области фундаментальных исследований.

*Научная значимость* результатов диссертации Утебаева Б.Д. заключается в том, что Автором построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы на стандартных шаблонах, аппроксимирующие линейные, полулинейные и квазилинейные гиперболические уравнения первого порядка, а также параболические уравнения.

*Практическая значимость.* Результаты диссертации могут быть использованы при построении компактных разностных схем для различных типов уравнений математической физики и их последующем применении при численном моделировании. Результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории разностных схем.

Экономическую и социальную значимость результатов диссертации оценить в настоящее время не представляется возможным.

#### **6. Опубликованность результатов диссертации в научной печати.**

Основные положения и результаты диссертации в полной мере изложены в 11 опубликованных научных работах, из них 5 статей опубликованы в изданиях, соответствующих п. 19 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь», 6 тезисов докладов международных научных конференций. Три научные статьи опубликованы в известных российских журналах.

## **7. Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК.**

Диссертация состоит из содержания, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 99 страниц текста. Список использованных источников содержит 114 наименований, из которых 11 – собственные публикации автора. Диссертация удовлетворяет требованиям п.п. 20–26 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь».

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертационной работы, ее результатам и основным положениям, выносимым на защиту.

## **8. Замечания по диссертации.**

Диссертация не свободна от недостатков и отсутствия ответов на ряд возникающих вопросов.

1. В каком смысле схема для уравнения теплопроводности является безусловно монотонной при весе, большем единицы? (Стр. 43).

2. В диссертации выписано много выражений для погрешности аппроксимации, однако при этом не указан тот факт, что аппроксимация рассчитана на точном решении задачи.

3. Не является ли неконсервативность схемы (4.4) на стр. 60 препятствием для ее сходимости?

4. Правило Рунге (2.45) в работе применяется как в случае немалых, так и малых шагов по различным независимым переменным. Просьба пояснить его применение при исследовании сходимости, в особенности по временной переменной (стр. 58, 73, 79 и др.).

5. Есть ли среди построенных монотонных схем схемы, которые не удовлетворяют условию монотонности Фридрихса?

6. В работе есть неизбежное количество опечаток и описок, которые сообщены Автору.

Данные замечания, однако, не являются критическими и не влияют на значимость полученных в диссертации результатов и их качество.

## **9. Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует.**

Представленная диссертация Утебаева Б.Д. свидетельствует, что научная квалификация ее Автора соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «вычислительная математика».

## **10. Выводы.**

Представленная диссертация Утебаева Бахадыра Даулетбай улы «Компактные и монотонные разностные схемы для гиперболических уравнений первого порядка и параболических уравнений» является квалификационной научной работой, выполненной под научным руководством доктора физико-математических наук, профессора, члена-корреспондента НАН Беларуси Матуса Петра Павловича. Она удовлетворяет всем требованиям ВАК Беларуси (п.п. 20–26 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых

званий в Республике Беларусь)), предъявляемым к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «вычислительная математика».

Предлагаю присудить Утебаеву Бахадыру Даулетбай улы ученую степень кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «вычислительная математика» за:

1) результаты построения и исследования монотонных разностных схем условной аппроксимации и произвольного порядка точности для одномерного и двумерного гиперболических уравнений первого порядка и доказательства оценок точности разностных схем в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае;

2) результаты построения и исследования монотонных и компактных разностных схем на стандартных шаблонах для линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений и полученные априорные оценки решений полулинейного уравнения Фишера, определяющих устойчивость;

3) результаты построения и исследования компактных и монотонных разностных схем для одномерного и двумерного обобщенных уравнений Фишера с нелинейной конвекцией.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,  
главный научный сотрудник,  
исполняющий обязанности заведующего отделом  
«Вычислительные методы и математическое моделирование»  
Федерального государственного учреждения  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук»

М.П. Галанин

Подпись М.П. Галанина заверяю  
Ученый секретарь  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,  
к.ф.-м.н.



А.А. Давыдов

05. 12. 2022