

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт математики

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**XIV БЕЛОРУССКАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ,
посвященная 65-летию
Института математики НАН Беларуси**

Материалы Международной
научной конференции

В трех частях

Часть 3

Алгебра, геометрия и топология

Вычислительная математика

Математическая криптография и анализ данных

Дискретная математика и математическая кибернетика

Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 года

Минск
«Беларуская навука»
2024

УДК 51
ББК 22.1
Ч-54

Составитель

кандидат физико-математических наук Т. С. Бусел

Ч-54 XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г. В трех частях. Часть 3. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 163 с.

ISBN 978-985-08-3224-5.

Третья часть сборника материалов на Международной научной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» содержит доклады по следующим направлениям: алгебра, геометрия и топология, вычислительная математика, математическая криптография и анализ данных, дискретная математика и математическая кибернетика.

Для научных работников, преподавателей и студентов, а также всех, кто интересуется математикой.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-985-08-3224-5 (ч. 3)
ISBN 978-985-08-3221-4

© ГНУ «Институт математики НАН Беларуси», 2024
© Оформление. РУП «Издательский дом «Белорусская наука». 2024

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ»

Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В. Обобщенная эрмитова геометрия на однородных многообразиях и группах Ли	7
Банару М.Б., Банару Г.А. О геодезических точках b -мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли	9
Бедрицкий А.С. О топологически равномерно непрерывном отображении	10
Бедрицкий А.С., Тимохович В.Л. О некоторых функториальных свойствах гиперпространств	12
Берник В.И., Васильев Д.В., Калоша Н.И. Об оценках числа полиномов с заданными ограничениями на величины дискриминантов	13
Бородич Р.В., Каморников С.Ф. О подгруппах фраттиниёва типа в конечных группах	14
Буриченко В.П. Несколько результатов, касающихся быстрого умножения матриц	16
Васильев А.Ф., Васильева Т.И. Взаимно перестановочные произведения подгрупп конечных групп и формации	18
Васильев Д.В., Иванова В.О., Калоша Н.И., Сурай Е.В. Диофантовы приближения с приводимыми полиномами в метрической теории чисел	19
Васильева Т.И. Об одном обобщении субмодулярных подгрупп конечных групп	20
Васьковский М.М., Фирсов М.А., Бабаева П.Д. О трансцендентности критических значений параметров обобщённой теоремы Штейнера-Лемуса	22
Вечтомов Е.М. Некоторые классы полуколец, являющихся связками полуколец над дистрибутивной решеткой	23
Вечтомов Е.М., Петров А.А. Полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами	25
Григорьев Д.С., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О симметрических потоках Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью	27
Жук Т.Д., Сафонов В.Г. О характеристике π -разрешимых и π -сверхразрешимых конечных групп	28
Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. О некоторых вопросах, связанных с σ -проблемой Кегеля-Виландта	30
Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О строении метрик Эйнштейна и инвариантных солитонов Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с полусимметрической связностью	31
Княгина В.Н. О произведении двух сверхразрешимых B -групп	33
Коледа Д.В. О пространственной плотности алгебраических точек фиксированной степени	34
Корецкий А.О. О существовании четырёхмерного гиперэллиптического малого накрытия	36
Корлюкова И.А., Кудин А.С., Пантелеева Ж.И. Количество целочисленных полиномов большой высоты с малой производной в корне	38
Корлюкова И.А., Морозова И.М., Шамукова Н.В. Белорусские математики – создатели кафедры истории математики в московском университете М.Я. Выгодский и С.А. Яновская	39
Костин А.В. Теорема Кейси и преобразования Лагерра	41
Куница В.Н. Интегрируемость f -структур на четырехмерной группе осциллятора	42
Кухарев А.В. Коммутативные консервативные Нот-алгебры и их связь с йордоновыми Нот-алгебрами	43
Мамонтов А.С. Аксиальные алгебры и связанные с ними группы	44
Матвеев Г.В., Говорушко И.О., Янчевский В.И. О модулярном разделении секрета в специальной линейной группе	45
Мелихова Е.В. f -вектор мечено-порядковых многогранников	46

Можей Н.П. Связности на четырехмерных почти симплектических пространствах	47
Монахов В.С., Сохор И.Л. Конечные группы с submodule-подгруппами	49
Наумик М.И. О максимально локальных полугруппах линейных отношений	50
Нестеров А.С., Сорокина М.М. σ_Ω -свободные формации конечных групп	51
Осиновская А.А. Подмодули Вейля в ограничениях представлений простых алгебраических групп на подгруппы $SL_2(K)$	52
Павлушко П.А., Трофимук А.А. О композиционных факторах конечных групп с заданной перестановочностью некоторых систем подгрупп	53
Петров В.А. Симметрические пространства и когомологии алгебраических групп	54
Путилов С.В. О нормализаторах нециклических силовских подгрупп в конечных группах	55
Сарвари А. Абелевы группы с нильпотентными эндоморфизмами специального вида	56
Сафонова И.Н., Скрундь В.В. Тотально σ -локальные формации I_∞^σ -длины ≤ 4	57
Субботин В.И. О доказательствах существования и полноты списка некоторых трёхмерных симметричных многогранников	59
Тыщенко В.Ю. Топологическая сопряженность абелевых групп дробно-линейных действий с одной неподвижной точкой на одномерном комплексном проективном пространстве	60
Хайруллоев Ш.А. О нулях дзета-функции Римана, расположенные на коротких промежутках критической прямой	62
Ядченко А.А. О неприводимых компонентах подстановочных представлений и нормальных подгруппах конечных групп	63
Ageev S.M., Kantun-Montiel A.L. Equivariant fibrations and extensors for locally compact groups	64
Bashkirov E.L. On the torsion in multiplicatively closed subsets of power associative algebras	65
Beniash-Kryvets V.V., Novikova V.Y. The Tits alternative for generalized tetrahedron groups	65
Galt A.A. On G -permutable and hereditarily G -permutable subgroups in finite simple groups	67
Goutor A.G. Polynomials over division rings	67
Erokhovets N.Yu. Manifolds realized as orbit spaces of non-free \mathbb{Z}_2^k -actions on real moment-angle manifolds	69
Kurbanbaev T.K., Uzakbaev N.E. Description of 3-dimensional Leibniz complex diassociative algebras	71
Lawrence S.A. Symmetry groups of toroidal polyhedral	73
Malinin D. Rings generated by character values and representations of finite groups	75
Murashka V.I. Some aspects of the computational theory of formations of finite groups	75
Nikonorov Yu.G. Finite homogeneous metric spaces with special properties	77
Staroletov A.M. The minimal polynomials of elements in the ordinary representations of symmetric groups	78
Stepanov S., Tsyganok I., Mikeš J. On minimal and stable minimal hypersurfaces in Euclidean spaces and Riemannian manifolds	79
Tikhonov S.V. Genus of division algebras over fields with infinite transcendence degree	80

СЕКЦИЯ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Абрашина-Жадаева Н.Г. К численным моделям для многомерных задач математической физики	82
Авлас А.Н., Громыко Г.Ф. Математическая модель и численный метод для нахождения модуля упругости композиционного порошкового материала	84
Волков В.М., Дун Цзинхуэй, Расолько Г.А. Об эффективности спектрального метода на основе полиномов Чебышева для решения некоторых задач численного анализа	85
Громыко Г.Ф., Заяц Г.М. Экранирование импульсных электромагнитных полей плоским намагниченным экраном из пермаллоя	87

Громько Г.Ф., Мацука Н.П., Шевцов А.И. Приложение математической модели расчета эффективных модулей упругости композиционного порошкового материала для разработки упрочняющих градиентных покрытий на основе TiC	89
Игнатенко М.В. Об интерполяционных формулах в случае узлов и значений функции, одновременно являющихся квадратными матрицами	91
Лаврова О.А., Полевилов В.К. Численное моделирование задач феррогидростатики с учетом диффузии магнитных наночастиц	92
Малиев Э.Е., Лиходед Н.А. Предобусловленный блочный алгоритм последовательной верхней релаксации для систем специального вида	94
Малютин В.Б., Нуржанов Б.О. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов	96
Матысик О.В. Регуляризация некорректных уравнений первого рода в полунорме гильбертова пространства	98
Переварюха А.Ю. Модель инвазионной активности популяций при триггерном противодействии	98
Подберезский А.В., Громько Г.Ф. Численный метод расчета течения крови с нелинейной вязкостью в сосудах	100
Репников В.И. К вопросу о корректировке свойств одношаговых численных методов решения задачи Коши	103
Рябов К.С. Метод математической аппроксимации работы головного мозга как сети фазовых осцилляторов	103
Таранчук В.Б., Баровик Д.В. Инструменты интерактивного компьютерного анализа и визуализации динамики лесных пожаров	104
Туен В.Т.К. Трехслойные компактные разностные схемы для параболического уравнения	106
Утебаев Б.Д. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений	108
Чуйко М.М., Королёва О.М. Численное решение задач конвекции несжимаемой жидкости в двумерных нерегулярных областях	109
Beshtokov M.KH. Difference scheme of higher order of accuracy for a loaded heat equation with boundary conditions of the first kind	111
Dinata S.A.W. Multi Input Intervention Analysis with Noise Model Triple Seasonal ARMA	113
Faleichik B.V. Second-order stabilized monotonic approximations to exponent and induced numerical methods for stiff odes	114
Lomonosov T.A., Zlotnik A. Application of a semi-explicit fourth-order vector compact scheme for the wave equations with non-smooth data	116
Maksimau M.S., Lemeshevsky S.V. Radial solution of helium using spectral tensor-train decomposition	118

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КРИПТОГРАФИЯ И АНАЛИЗ ДАННЫХ»

Агиевич С.В. Латентность XS-схем	120
Байзаков А.Б., Шаршенбеков М.М. Линейная оболочка и криптостойкость M-матриц высокого порядка	121
Волошко В.А. Касательное пространство многообразия стационарных двоичных цепей Маркова: свойства и приложения	123
Гайдук А.Н. О применении динамического теста монобит для статистического тестирования случайных и псевдослучайных последовательностей	124
Лавренов Е.С. Матричные соотношения в XS-схемах блочных криптосистем	125
Мальцев М.В. О частотных статистиках, используемых для оценки качества генераторов случайных и псевдослучайных числовых последовательностей	127
Миронова А.В., Абрамович М.С. Классификация текстов по тематике	128

Палуха В.Ю., Латушкин К.В., Харин Ю.С. О модификации программного комплекса «ЭАДП» для проверки сложной гипотезы об s -мерной равномерности	130
Пириштук И.К., Вакулич Д.В. Оценка безопасности объектов информационных технологий на основе корреляционного анализа	132
Сафиуллин Т.Т. Применение методов машинного обучения и нейронных сетей для обнаружения аномалий в сетевом трафике	134
Трубей А.И., Волошко В.А., Данилевич М.К., Куркин Я.А. Оценка независимости статистических тестов батареи NIST SP 800-22	135

СЕКЦИЯ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА»

Асташкин С.В., Лыков К.В. Обобщение теоремы Эрдёша-Спенсера о раскрасках на взвешенные гиперграфы	138
Бенедиктович В.И. Спектральные условия панцикличности для t -жестких графов	139
Воблый В.А. Асимптотическое перечисление помеченных слабо связанных орграфов	141
Дугинов О.И. Сложность решения задачи бикликового разбиения вершин хордальных двудольных графов и выпуклых двудольных графов	142
Климашевский Е.С., Орлович Ю.Л. Специальные остовные подграфы в локально связанных графах	143
Котов В.М. Семи онлайн версия задачи теории расписаний	145
Лепин В.В. Задача кластеризации с перекрытием	146
Лепин В.В. Задача о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса в графе и квадратичная оптимизация	148
Найденко В.Г. Логическая характеристика класса вычислительной сложности AM	150
Романчак В.М. Концепция измерения отношений (теория измерений)	151
Селиверстов А.В., Зверков О.А. О системах нескольких уравнений по модулю три	152
Таразевич Ю.Г. Синтез гиперконтактных и контактно-трансформаторных схем	154
Шафранский Я.М., Романов В.И. Программный комплекс для формирования расписания работы предприятия как инструмент анализа при закупке оборудования (на примере ОАО «МОГОТЕКС»)	156
Liskovets V.A. An implementation of the Fine and Catalan numbers in chess composition	158
Pilipchuk L.A., Ramanouski Y.V. Towards methods of estimation of homogeneous flow in a bidirectional network: suboptimal solutions	160
Zadarazhniuk H.A. Spectral gaps of Cayley graphs of complex reflection groups	162

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ»

ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ НА ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ГРУППАХ ЛИ

В.В. Балащенко, Д.В. Вылегжанин

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
balashchenko@bsu.by, vylegzhanin@bsu.by

Почти эрмитовы структуры J ($J^2 = -id$, $g(JX, JY) = g(X, Y)$) на римановых многообразиях (M, g) , интенсивно изучаемые с 1970-х, почти сразу были обеспечены широким спектром инвариантных примеров на однородных многообразиях (А.Грей, В.Ф.Кириченко и др.), которые сразу и до настоящего времени широко используются в дифференциальной геометрии, глобальном анализе, теоретической физике и др. Тем самым возникло направление, которое можно охарактеризовать как *однородная эрмитова геометрия*. Особенно интересным оказался класс приближенно келеровых структур (NK -структур, в оригинале, *nearly Kähler*), который в размерности 6 позволил получить яркие и удивительные результаты, включая совсем недавние [1].

В 1980-х В.Ф.Кириченко создал обширную концепцию *обобщенной эрмитовой геометрии* [2–3], в которой фундаментальным объектом стали метрические f -структуры К.Яно ($f^3 + f = 0$, $g(fX, Y) + g(X, fY) = 0$), естественно обобщающие почти эрмитовы структуры. Впоследствии В.Ф.Кириченко, А.С.Грицансом, В.В.Балащенко были введены специальные классы метрических f -структур, в т.ч. с использованием композиционного тензора f -структуры, имеющего следующий вид (см.[2–3]): $T(X, Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y)$, где ∇ – связность Леви-Чивита метрики g . Так, эрмитовы f -структуры (Hf -структуры) задаются требованием $T(X, Y) = 0$, а структуры класса G_1f (G_1f -структуры) определяются условием $T(X, X) = 0$ [4]. Далее, для киллинговых f -структур ($Killf$ -структур) определяющее условие $\nabla_X(f)X = 0$ [5]. Приближенно келеровы f -структуры (NKf -структуры) задаются условием $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ [6], а обобщенные приближенно келеровы f -структуры ($GKNKf$ -структуры) - условием $f\nabla_{fX}(f)fX = 0$. Последние 3 типа f -структур обобщают в разной степени важнейший класс приближенно келеровых почти эрмитовых структур.

В отличие от почти эрмитовых структур, инвариантные примеры для классов метрических f -структур появились не сразу, а лишь в начале 2000-х. Это стало возможным благодаря обнаружению и полному описанию канонических структур классического типа на однородных регулярных Φ -пространствах (в частности, однородных k -симметрических пространствах) [7]. Оказалось, что канонические f -структуры [7] на естественно редутивных однородных k -симметрических пространствах позволяют предъявить обширный ресурс инвариантных NKf -структур, Hf -структур, а также структур иных классов в обобщенной эрмитовой геометрии (см., например, [6], [8], [4] и библиографию в [4]). Серия окончательных результатов была получена для канонических f -структур на произвольных однородных k -симметрических пространствах [9–10]. Более того, созданная техника для наборов канонических f -структур позволила построить инвариантные обобщенные эрмитовы структуры произвольного ранга [11], что стало инвариантной реализацией идеи В.Ф.Кириченко в самом общем виде. Тем самым возникло направление, которое можно назвать *однородной обобщенной эрмитовой геометрией*.

Продолжая обзор в этом направлении, отметим результаты поиска и исследования левоинвариантных обобщенных эрмитовых структур многих отмеченных выше классов на нильпотентных и разрешимых группах Ли, метрика которых не является естественно редутивной. Для разрешимых групп Ли первой из рассмотренных стала группа гиперболических движений плоскости (известный пример О.Ковальского 3-мерного риманова 4-симметрического пространства). Доказано, что каноническая f -структура на этой группе является эрмитовой f -структурой, однако не является ни интегрируемой, ни приближенно келеровой (см. [4]). Обобщением этого примра стала разрешимая

группа Ли $(G_n \equiv \mathbb{R}^{2n+1}, g)$, которая является однородным римановым $(2n+2)$ -симметрическим пространством (конструкция М.Божека, 1980). Используя технику канонических структур, предъявлена на этой группе обобщенная эрмитова структура (g, f_1, \dots, f_n, T) ранга n [12].

Важную роль играют левоинвариантные f -структуры на нильпотентных группах Ли, среди которых особо можно выделить разного рода обобщения классической 3-мерной группы Гейзенберга. Одним из самых интересных примеров в этом направлении стали канонические f -структуры на 6-мерной обобщенной (в смысле А.Каплана) группе Гейзенберга, реализованной как однородное риманово 4- и 6-симметрическое пространство [13]. Отметим, что эта группа Ли явилась первым мотивирующим примером геодезически орбитального пространства, метрика которого не является естественно редуکتивной, что стало основой крупного научного направления (см. [14]).

Для левоинвариантных f -структур на нильпотентных группах Ли индекса 2 получен ряд общих результатов, отражающих их связь с классами обобщенной эрмитовой геометрии (совм. с П.А.Дубовиком). Наряду с этим, филиформные группы Ли, которые имеют максимальный индекс нильпотентности, также обладают f -структурами отмеченных выше классов NKf , Hf и др. В частности, рассмотрены в этом смысле все 6-мерные филиформные группы Ли [15].

Недавние исследования связаны с построением левоинвариантных метрических f -структур на всех 3-мерных разрешимых группах Ли. На этих группах предъявлены левоинвариантные метрические f -структуры практически всех упомянутых выше классов в обобщенной эрмитовой геометрии (совм. с В.Н.Куницей). Отметим также исследование всех левоинвариантных базовых f -структур ранга 2 на 4-мерной группе осциллятора.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь на 2021-2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных G -расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли», № гос. регистрации 20211882.

Литература

1. Foscolo L., Haskins M., *New G_2 -holonomy cones and exotic nearly Kähler structure on S^6 and $S^3 \times S^3$* // Annals of Mathematics. 2017. Vol. 185, No 1. P. 59–130.
2. Кириченко В. Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры* // Известия АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 6. С. 1208–1223.
3. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. М.: МПГУ, 2003.
4. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Однородные пространства: теория и приложения: монография*. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.
5. Грицанс А. С. *О геометрии киллинговых f -многообразий*. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 4. С. 149–150.
6. Балащенко В. В. *Однородные приближенно келеровы f -многообразия* // Доклады РАН. 2001. Т. 376, № 4. С. 439–441.
7. Балащенко В. В., Степанов Н. А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах* // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 3–34.
8. Балащенко В. В. *Инвариантные f -структуры на естественно редуکتивных однородных пространствах* // Изв. вузов. Математика. 2008. № 4. С. 3–15.
9. Балащенко В. В., Самсонов А. С. *Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных k -симметрических пространствах* // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 295–298.
10. Самсонов А. С. *Приближенно келеровы и эрмитовы f -структуры на однородных Φ -пространствах порядка k в случае специальных метрик* // Сиб. матем. журнал. 2011. Т. 52, № 6. С. 1373–1388.
11. Вылегжанин Д. В. *Обобщенная эрмитова геометрия на многообразии с f -структурами* // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6. С. 25–32.
12. Балащенко В. В., Вылегжанин Д. В. *Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ -пространствах конечного порядка* // Изв. вузов. Математика. 2004. № 10. С. 33–44.
13. Balashchenko V. V. *Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group* // Kragujevac Journal of Mathematics. 2011. Vol. 35, No 2. P. 209–222.
14. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. *Римановы многообразия и однородные геодезические*. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.
15. Дубовик П. А. *Эрмитовы f -структуры на 6-мерных филиформных группах Ли* // Известия вузов. Математика. 2016. № 7. С. 34–43.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТОЧКАХ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М.Б. Банару, Г.А. Банару

Смоленский государственный университет, Пржевальского 4, 214000 Смоленск, РФ,
mihail.banaru@yahoo.com

1. Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав развивается с 60-х годов прошлого века. Среди многих известных математиков, которые работали в этой области, мы особо выделим американского специалиста Альфреда Грея и российского геометра Вадима Фёдоровича Кириченко. В.Ф. Кириченко, среди прочего, провел полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли [1]. Отметим, что обзор [2] содержит значительную часть достижений в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав (естественно, кроме результатов, полученных в последнее десятилетие).

2. Напомним [3], что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразии с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется эрмитовой, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} (J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Известно [3], что в алгебре Кэли $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\bar{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbf{O} , $X \rightarrow \bar{X}$ — оператор сопряжения в \mathbf{O} . Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры октав, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением: $J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2)$, $\alpha = 1, 2$, где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p , $X \in T_p(M^6)$. Точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры октав. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ будем считать подмногообразиями общего типа.

3. В уже упомянутой нами работе [1] В.Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав (в репере, адаптированном почти эрмитовой структуре):

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_{h^c]} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h_{c]} \omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^g_{j]} + \sum_{\varphi} T_{a[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j,$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Как в [1] и [2], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$ — кронекеровская дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, D_h^c = D_{h\hat{c}}, D^h_c = D_{\hat{h}\hat{c}}; D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, D_{\hat{c}\hat{j}} = \mp T_{\hat{c}\hat{j}}^8 - iT_{\hat{c}\hat{j}}^7,$$

где $\{T_{kj}^\varphi\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [1].

Рассмотрим тензор Вейля конформной кривизны 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав. Этот тензор, как известно [6], определяется следующим равенством:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2} (ric_{ik} g_{jl} + ric_{jl} g_{ik} - ric_{il} g_{jk} - ric_{jk} g_{il}) + \frac{K}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} g_{il} - g_{jl} g_{ik}).$$

Здесь R — тензор римановой кривизны (тензор Римана–Кристоффеля), ric — тензор Риччи; n — размерность многообразия, K — его скалярная кривизна.

Нами получен следующий результат, связанный с геодезическими точками эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Теорема. Тензор Вейля конформной кривизны обращается в нуль в геодезической точке 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли в том и только том случае, если скалярная кривизна в этой точке также равна нулю.

Заметим, что о скалярной кривизне эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ известно, что она всегда неположительна, а ее тождественное обращение в нуль соответствует тривиальному случаю, когда $M^6 \subset \mathbf{O}$ является плоскостью; в этом случае эрмитова структура на таком подмногообразии неизбежно окажется келеровой [7].

Литература

1. Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. № 8. С. 32—38.
2. Banaru M. B. *Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra* // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, No 3. P. 354—388.
3. Gray A. *Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products* // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, No 4. P. 614—620.
4. Банару М. Б., Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 205—206.
5. Банару М. Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 5. С. 3—16.
6. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. Одесса: Печатный дом, 2013.
7. Banaru M. B., Banaru G. A. *A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra* // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

А.С. Бедрицкий

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, bedrickiAS@bsu.by

Введение. Одной из задач, возникающей в теории экспоненциальных пространств, является задача о непрерывном продолжении отображения $X \xrightarrow{f} Y$ до отображения $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$ ($\exp X$, $\exp Y$ — множества всех непустых замкнутых подмножеств пространств X и Y соответственно, как правило с некоторой топологией). Понятие топологически равномерно непрерывного отображения

возникло при решении этой задачи (см. [1]) в случае, когда пространства X и Y метризуемы, а на экспонентах $\text{exp}X$ и $\text{exp}Y$ задана инфимальная топология. Коротко об этой топологии. Для метризуемого пространства X , топология на экспоненте $\text{exp}X$ может быть задана метрикой Хаусдорфа $\hat{\rho}$, соответствующей некоторой допустимой (т.е. согласованной с топологией) метрике ρ на X . Введенную таким образом топологию на $\text{exp}X$ обозначим через $\tau_{\hat{\rho}}$. При этом эквивалентные метрики ρ и σ на X могут порождать различные топологии $\tau_{\hat{\rho}}$ и $\tau_{\hat{\sigma}}$ на $\text{exp}X$ (подробнее см., например, [2, с. 441]). Таким образом, возникает семейство топологий $\mathcal{T} = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, где Ω_X — множество всех допустимых метрик на X . В частично упорядоченном по включению семействе всех топологий на множестве $\text{exp}X$ для указанного семейства \mathcal{T} определены точные нижняя τ_{inf} и верхняя τ_{sup} грани. Инфимальная топология τ_{inf} является пересечением всех топологий вида $\tau_{\hat{\rho}}$, а супремальная τ_{sup} задается предбазой $\cup\{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$ (подробнее о топологии τ_{inf} см. работы [3], [4], о топологии τ_{sup} см. работу [5]). Экспоненту $\text{exp}X$, снабженную инфимальной топологией, обозначим через $\text{exp}_{\text{inf}}X$.

Далее в докладе топологически равномерно непрерывные отображения будем коротко называть TUC-отображениями или отображениями, удовлетворяющими условию (TUC) (Topologically Uniformly Continuous).

Определение 1 [1]. Непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ назовем TUC-отображением (или отображением, удовлетворяющим условию (TUC)), если для любой метрики $\rho \in \Omega_X$ существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$, при которой отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ между метрическими пространствами (X, ρ) и (Y, σ) равномерно непрерывно.

Для отображения $X \xrightarrow{f} Y$ продолжение на экспоненты $\text{exp}X$ и $\text{exp}Y$ можно определить как отображение $\text{exp}X \xrightarrow{g} \text{exp}Y$, для которого выполняется условие: $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любой точки $x \in X$. Здесь в качестве такого продолжения мы рассматриваем отображение $\text{exp}X \xrightarrow{\tilde{f}} \text{exp}Y$, заданное формулой $\tilde{f}(F) = [f(F)]_Y$, где $F \in \text{exp}X$, а $[\cdot]_Y$ — оператор замыкания в пространстве Y . В [1] была доказана следующая

Теорема 1. Если отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC), то продолжение $\text{exp}_{\text{inf}}X \xrightarrow{\tilde{f}} \text{exp}_{\text{inf}}Y$ непрерывно.

Также было показано, что при некоторых дополнительных требованиях теореме 1 можно обратить.

Теорема 2. Если пространство Y локально компактно и со счетной базой, а отображение $\text{exp}_{\text{inf}}X \xrightarrow{\tilde{f}} \text{exp}_{\text{inf}}Y$ непрерывно, то отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC).

Замечание. Ответ на вопрос о необходимости условия (TUC) для непрерывности отображения $\text{exp}_{\text{inf}}X \xrightarrow{\tilde{f}} \text{exp}_{\text{inf}}Y$ (X и Y метризуемы) докладчику не известен.

Определение TUC-отображения можно отнести к так называемым "внешним" определениям, ввиду использования в нем понятия метрики. В связи с этим возникает задача изучения "внутренних" свойств таких отображений. Оказывается, в определенном смысле TUC-отображения близки к совершенным отображениям.

Ясно, что образ $f(X)$ при TUC-отображении $X \xrightarrow{f} Y$ может состоять из одной точки. Остальные случаи (т.е., когда $f(X)$ неодноточечно) описывает

Теорема 3. Пусть отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC). Тогда либо f совершенно, либо удовлетворяет одному из следующих условий:

A) существует точка $y_0 \in f(X)$, прообраз которой не компактен, и при этом множество $f(X)$ компактно, а отображение $X \setminus f^{-1}(y_0) \xrightarrow{f} Y \setminus \{y_0\}$ совершенно;

B) существует замкнутое в X множество F и точка $y_0 \in f(X)$ такие, что $y_0 \in [f(F)]_Y \setminus f(F)$, и при этом множество $f(X)$ компактно, а отображение $X \setminus f^{-1}(y_0) \xrightarrow{f} Y \setminus \{y_0\}$ совершенно;

C) существует точка $y_0 \in Y \setminus f(X)$ такая, что $y_0 \in [f(X)]_Y$, и при этом $[f(X)]_Y = f(X) \cup \{y_0\}$, множество $[f(X)]_Y$ компактно, а отображение $X \xrightarrow{f} Y \setminus \{y_0\}$ совершенно.

Обращение теоремы 3 получено при некоторых дополнительных условиях.

Теорема 4. *Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC), если выполняется одно из условий A), B), C) из теоремы 3, либо отображение f совершенно, а пространство Y локально компактно и со счетной базой.*

Замечание. Ответ на вопрос о выполнении условия (TUC) для произвольного совершенного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ (X и Y метризуемы) докладчику не известен.

Литература

1. Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л. *О функториальных свойствах некоторых топологий гиперпространства* // Изв. вузов. Матем. в печати.
2. Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986
3. Costantini C., Vitolo P. *On the infimum of the Hausdorff metric topologies* // Proc. London Math. Soc. 1995. Vol. 70. P. 441–480.
4. Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л. *О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства* // Труды ин-та математики. 2023. Т. 31, № 2. С. 15–27.
5. Beer G. A., Himmelberg C. J., Prikry K., van Vleck F. S. *The locally finite topology on 2^X* // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 101, No 1. P. 168–172.

О НЕКОТОРЫХ ФУНКТОРИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРПРОСТРАНСТВ

А.С. Бедрицкий, В.Л. Тимохович

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, bedrickiAS@bsu.by, timvlaleo@gmail.com

Введение. В статье [1] исследовались функториальные свойства экспоненты (или гиперпространства) $\text{exp}_V X$ топологического T_1 -пространства X с топологией Виеториса, а именно: было найдено необходимое и достаточное условие (условие (ω_0) — модификация условия (WO) Харриса [2]) непрерывности отображения $\text{exp}_V X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_V Y$, где $\bar{f}(F) = [f(F)]_Y$, а $[\cdot]_Y$ — оператор замыкания в пространстве Y , являющегося продолжением на экспоненты $\text{exp}_V X$ и $\text{exp}_V Y$ (т.е. $\bar{f}(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любой точки $x \in X$) непрерывного отображения $X \xrightarrow{f} Y$, а также показано, что такое продолжение, в определенном смысле, единственное. Это позволило выделить категорию (категория (T_1, ω_0) T_1 -пространств и ω_0 -отображений), представляющую естественную (максимально обширную) область определения возникающего таким образом функтора exp_V , ставящего в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ этой категории его непрерывное продолжение $\text{exp}_V X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_V Y$. Долад посвящен результатам, полученным при решении аналогичной задачи в случаях, когда на экспоненте $\text{exp} X$ заданы топология Фелла τ_F и локально конечная топология τ_{LF} . Напомним, что предбаза топологии τ_{LF} состоит из множеств вида $U^+ = \{F \in \text{exp} X \mid F \subset U\}$, где U — открытое в X множество, и $\mathcal{A}^- = \{F \in \text{exp} X \mid F \cap U \neq \emptyset \text{ для любого } U \in \mathcal{A}\}$, где \mathcal{A} — локально конечное семейство открытых в X множеств; предбазу топологии τ_F составляют множества $U^+ = \{F \in \text{exp} X \mid F \subset U\}$, где множество $X \setminus U$ замкнуто и компактно, и $V^- = \{F \in \text{exp} X \mid F \cap V \neq \emptyset\}$, где V — открытое в X множество. Экспоненту с топологией τ_{LF} (топологией τ_F) обозначим через $\text{exp}_{LF} X$ (через $\text{exp}_F X$ соответственно).

Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение, U — открытое в X множество, V — открытое в Y множество. Множества U и V называют f -согласованными и пишут $U \overset{f}{\succ} V$, если $[f(F)]_Y \subset V$ для любого замкнутого в X множества $F \subset U$.

Определение 1 [1]. Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называют ω_0 -отображением (или отображением удовлетворяющим условию (ω_0)), если для любого замкнутого в X множества F и любой окрестности V множества $[f(F)]_Y$ существует окрестность U множества F такая, что $U \overset{f}{\succ} V$.

Теорема 1. *Отображение $\text{exp}_{LF} X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_{LF} Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (ω_0) .*

Отметим, что в определенном смысле такое продолжение единственно, а именно справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\text{exp}_{LF} X \xrightarrow{s} \text{exp}_{LF} Y$ — непрерывное продолжение отображения $X \xrightarrow{f} Y$ и $g(A) = [f(A)]_Y$ для любого замкнутого в X дискретного множества $A \subset X$. Тогда $g = \bar{f}$.

Теорема 1 позволяет сформулировать

Следствие 1. Отображение exp_{LF} из категории (T_1, ω) , T_1 -пространств и ω -отображений, в категорию TOP_1 , топологических T_1 -пространств и непрерывных отображений, ставящее в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ категории (T_1, ω) его непрерывное продолжение $\text{exp}_{LF} X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_{LF} Y$ является ковариантным функтором.

Замечание. Для функтора exp_{LF} (как и для функтора exp_V) категория (T_1, ω) является естественной (максимально обширной) областью определения.

Определение 2. Непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ назовем (ω) сосопр-отображением (или отображением удовлетворяющим условию $((\omega)$ сосопр)), если для любого замкнутого в X множества F и любой окрестности V множества $[f(F)]_Y$ с компактным дополнением $Y \setminus V$ (такие открытые множества называют кокомпактными) существует окрестность U множества F с компактным дополнением $X \setminus U$ такая, что $U \xrightarrow{f} V$.

Теорема 3. Отображение $\text{exp}_F X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_F Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию $((\omega)$ сосопр).

Для непрерывного отображения $\text{exp}_F X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_F Y$ имеет место результат, аналогичный теореме 2.

Теорема 4. Пусть $\text{exp}_F X \xrightarrow{s} \text{exp}_F Y$ — непрерывное продолжение отображения $X \xrightarrow{f} Y$ и $g(A) = f(A)$ для любого конечного множества $A \subset X$. Тогда $g = \bar{f}$.

Как и в случае топологии τ_{LF} сформулируем следствие (аналогичное следствию 1), вытекающее из теоремы 3.

Следствие 2. Отображение exp_F из категории $(T_1, (\omega)$ сосопр), T_1 -пространств и (ω) сосопр-отображений, в категорию TOP_1 , топологических T_1 -пространств и непрерывных отображений, ставящее в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ категории $(T_1, (\omega)$ сосопр) его непрерывное продолжение $\text{exp}_F X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_F Y$ является ковариантным функтором.

Замечание (аналогичное замечанию к следствию 1). Для функтора exp_F категория $(T_1, (\omega)$ сосопр) является естественной (максимально обширной) областью определения.

Литература

1. Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л. Модификация условия (WO) Харриса и функториальные свойства экспоненты и расширения Волмэна // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 4–11.
2. Harris D. The Wallman compactification as a functor // General Top. and Appl. 1971. Vol. 1, No 3. P. 273–281.

ОБ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ПОЛИНОМОВ С ЗАДАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВЕЛИЧИНЫ ДИСКРИМИНАНТОВ

В.И. Берник, Д.В. Васильев, Н.И. Калоша

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
{bernik, kalosha, vasilyev}@im.bas-net.by

Многие задачи теории диофантовых приближений тесно связаны с величинами и распределением дискриминантов целочисленных полиномов. Пусть задан полином с целыми коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

степени $\deg P = n$, высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$, имеющий корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. При $n \geq 2$ число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\alpha_i - \alpha_j|^2$$

называется дискриминантом полинома $P(x)$.

Из данного определения напрямую следует, $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни. Кроме того, хорошо известно, что $D(P) \in \mathbb{Z}$. К. Малер и Х. Давенпорт показали, что от величины $|D(P)|$ зависит расстояние между $x \in \mathbb{R}$ и ближайшим к x корнем $P(x)$. Основываясь на этих неравенствах, Б. Фолькман доказал гипотезу Малера для полиномов третьей степени. Многочисленные приложения дискриминантов зависят от количества полиномов $P(x)$ в классе

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = n, H(P) \leq Q, 0 < |D(P)| < Q^{2n-2-2v}, Q \in \mathbb{N}\}$$

при фиксированном n , $0 \leq v \leq n-1$, и $Q \rightarrow \infty$.

В получении оценок снизу и сверху для $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ принимали участие В.Г. Спринджук, М. Додсон, О. Куксо, Д. Коледа. Приведем наиболее сильные на сегодняшний день результаты.

Наилучшая известная оценка снизу получена в работе [1], где В.В. Бересневич, В.И. Берник и Ф. Гётце доказали, что при подходящей положительной величине $c_1(n)$ верно асимптотическое неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \geq c_1(n) Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}, \quad 0 \leq v \leq n-1. \quad (1)$$

Этот результат основан на глубоких теоремах В.В. Бересневича, Д. Клейнбока и Г.А. Маргулиса, использующих методы теории динамических систем. Данная оценка является, скорее всего, неулучшаемой с точностью до констант.

Асимптотически совпадающие с (1) оценки сверху получены лишь для $n \leq 3$, в общем случае известные результаты явно допускают значительные улучшения. Недавно Д.А. Бодягин доказал [2], что при любом $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) \leq c_2(\varepsilon) Q^{4-\frac{5}{3}v+\varepsilon}, \quad 0 \leq v \leq 2. \quad (2)$$

Мы предлагаем метод, позволяющий получить оценку (2) для полиномов четвертой степени при $0 \leq v \leq 2$ и некоторых интервалов в промежутке $2 \leq v \leq 3$, который основан на недавнем результате [3].

Литература

1. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. *Integral polynomials with small discriminants and resultants* // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.04.022>
2. Badziahin D. *Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve* // 2024. arXiv preprint arXiv:2403.17685.
3. Берник В. И., Васильев Д. В., Калоша Н. И., Пантелеева Ж. И. *Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делимыми на большую степень простого числа* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2023. Т. 67, № 4. С. 271–278. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278>

О ПОДГРУППАХ ФРАТТИНИЕВА ТИПА В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Р.В. Бородич, С.Ф. Каморников

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,
borodich@gsu.by, sfkamornikov@mail.ru

Пусть θ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [1], назовем отображение θ *подгрупповым функтором*, если $(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ каждой группы G .

Подгрупповой функтор θ называется *m -функтором*, если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит группу G и некоторые ее максимальные подгруппы. Подгруппа $\Phi_\theta(G)$, равная пересечению всех подгрупп из $\theta(G)$, называется *подгруппой Фраттини* типа, индуцированной *m -функтором* θ , или, короче, *θ -подгруппой Фраттини* группы G .

Подгрупповой *m -функтор* называется *регулярным*, если выполняются следующие два условия:

- 1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ всегда следует $MN/N \in \theta(G/N)$;
- 2) из $M/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $M \in \theta(G)$.

Бэр в [2] доказал, что если P – нормальная силовская подгруппа группы G , то $\Phi(P) = P \cap \Phi(G)$. В [3] доказано, что если H – нормальная холлова подгруппы группы G , то $\Phi(H) = H \cap \Phi(G)$. В основе доказательства лежат классический результат Л.А. Шеметкова из [4] о существовании π -дополнений к нормальным подгруппам.

Будем говорить, что подгрупповой *m -функтор* θ *обладает Hall Φ -свойством*, если $\Phi_\theta(H) = H \cap \Phi_\theta(G)$ для любой нормальной холловой подгруппы H каждой группы G .

В 2007 году Л.А. Шеметковым были отмечены следующие две задачи, открывающие новые свойства холловых подгрупп:

- 1) *Найти все m -функторы, обладающие Hall Φ -свойством.*
- 2) *Найти все регулярные m -функторы, обладающие Hall Φ -свойством.*

В данной работе строятся бесконечные серии новых регулярных и нерегулярных *m -функторов*, обладающих *Hall Φ -свойством*.

Пусть \mathfrak{S} – класс всех простых групп (включая и абелевы простые группы). Следуя [1], для класса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ через $E\mathfrak{X}$ обозначим класс всех тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат \mathfrak{X} . Простая проверка показывает, что $E\mathfrak{X}$ – формация Фиттинга.

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Класс \mathfrak{F} называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) \mathfrak{F} – нормально наследственный класс;
- 2) из $G = AB$, где A и B – нормальные подгруппы группы G , принадлежащие \mathfrak{F} , всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Из определения класса Фиттинга следует, что для любого класса \mathfrak{X} простых групп в каждой группе G существует наибольшая нормальная $E\mathfrak{X}$ -подгруппа, равная произведению всех ее нормальных $E\mathfrak{X}$ -подгрупп. Эта подгруппа обозначается $G_{E\mathfrak{X}}$ и называется *$E\mathfrak{X}$ -радикалом* группы G .

Пусть далее \mathfrak{X} – некоторый класс простых групп и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ – подгрупповой *m -функтор*, выделяющий в каждой группе G все ее максимальные подгруппы, содержащие $G_{E\mathfrak{X}}$. Простая проверка показывает, что

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}}),$$

т.е. подгруппа $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$ совпадает с полным прообразом в G группы $\Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Следующая теорема устанавливает, что подгрупповой *m -функтор* $\theta_{E\mathfrak{X}}$ обладает *Hall Φ -свойством*.

Теорема 1. *Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс простых групп. Если H – нормальная холлова подгруппа группы G , то $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.*

Если \mathfrak{X} – пустой класс, то $E\mathfrak{X}$ – класс единичных групп, а значит, в этом случае $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Таким образом, теорема 1 включает отмеченные выше результаты Бэра и Берковича.

Если π – некоторое множество простых чисел и \mathfrak{X} – класс всех простых π -групп, то $E\mathfrak{X} = \mathfrak{B}_\pi$ – класс всех π -групп и $G_{E\mathfrak{X}} = O_\pi(G)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел, и θ_π – подгрупповой *m -функтор*, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π . Этот подгрупповой *m -функтор* является регулярным. Следуя [1], подгруппу Фраттини типа группы G , индуцированную *m -функтором* θ_π , будем обозначать $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ – подгрупповой *m -функтор*, выделяющий в каждой группе все ее

максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p , θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [5] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Отметим, что в общем случае m -функторы $\theta_{\mathbb{F}_\pi}$ и θ_π различны. В отличие от m -функтора $\theta_{\mathbb{F}_\pi}$ m -функтор θ_π является регулярным. В то же время подгруппы фраттиниева типа, индуцированные m -функторами $\theta_{\mathbb{F}_\pi}$ и θ_π , в любой конечной группе совпадают.

Теорема 2. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда для любой группы G имеет место равенство $\Phi_{\mathbb{F}_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что:

– если H — нормальная холлова подгруппа группы G , то $\Phi_\pi(H) = H \cap \Phi_\pi(G)$ для любого множества π простых чисел;

– если R — нормальная силовская подгруппа группы G , то $\Phi_p(R) = R \cap \Phi_p(G)$ для любого простого числа p .

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211749).

Литература

1. Каморников С.Ф., Селькин М.В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*. Мн: Белорусская наука, 2003.
2. Baer R. *Supersoluble immersion* // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.
3. Berkovich Y. *Alternate proofs of some basic theorems of finite groups theory* // Glasnik Matem. 2005. Vol. 40. P. 207–233.
4. Шеметков Л.А. *О существовании π -дополнений к нормальным подгруппам конечных групп* // ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 1. С. 50–52.
5. Deskins W.E. *A condition for the solvability of a finite group* // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5, No 2. P. 306–313.

НЕСКОЛЬКО РЕЗУЛЬТАТОВ, КАСАЮЩИХСЯ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

В.П. Буриченко

Лаборатория теории и приложений конечных групп Института математики НАН Беларуси,

Кирова 32а, 246000 Гомель, Беларусь, vpburich@gmail.com

Рассматриваются билинейные алгоритмы быстрого умножения матриц, типа алгоритма Штрассена. Через $r(m, n, p)$ обозначаем минимальное число умножений (билинейную сложность), необходимое для умножения $m \times n$ матрицы на $n \times p$ матрицу. Известны следующие оценки (справедливые для любого основного поля):

$r(2, 2, 2) = 7$, $r(2, 2, 3) = 11$, $r(2, 2, 4) = 14$, $r(2, 2, n) \geq 3n + 2$ при $n \geq 5$, $r(3, 2, 3) \in \{14, 15\}$, $19 \leq r(3, 3, 3) \leq 23$.

(Все ссылки на эти результаты, а также дальнейшие литературные указания, могут быть найдены в [1] и [2], а в настоящем тезисе нам пришлось их опустить из-за ограничения объема).

Теорема 1 ([1]). $r(3, 2, 3) = 15$.

В [2] автором было введено понятие о симметриях алгоритмов матричного умножения, и предложено для поиска новых коротких алгоритмов изучать алгоритмы с достаточно большой группой симметрий (определение группы автоморфизмов алгоритма см. ниже). В дальнейшем эта идея получила развитие в работах ряда авторов. Для реализации такого подхода желательно заранее выяснить, как может выглядеть группа автоморфизмов $\text{Aut}(\mathcal{A})$ искомого алгоритма (например, гипотетического алгоритма сложности ≤ 22 для умножения 3×3 матриц).

Теорема 2 ([3]). Если \mathcal{A} — алгоритм билинейной сложности ≤ 22 для умножения двух 3×3 матриц, то $\text{Aut}(\mathcal{A})$ изоморфна подгруппе в $S_{22} \times S_3$.

Теорема 3. В условиях предыдущей теоремы $\text{Aut}(\mathcal{A})$ не содержит подгрупп порядка 17 или 19.

(готовится к печати).

Напомним определение группы автоморфизмов алгоритма, ограничиваясь случаем умножения квадратных матриц. Пусть $M_n(K) = \langle e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n \rangle$ — пространство $n \times n$ матриц над полем K . Тензор

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n = \sum_{i,j,k=1}^n e_{ij} \otimes e_{jk} \otimes e_{ki} \in M_n(K)^{\otimes 3}$$

называется структурным тензором алгебры $M_n(K)$. Известно, что алгоритмы билинейной сложности r для умножения $n \times n$ матриц находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями тензора \mathcal{T}_n в виде

$$\mathcal{T}_n = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i \otimes w_i, \quad u_i, v_i, w_i \in M_n(K) \quad (1)$$

На пространстве $M_n(K)^{\otimes 3}$ действует некоторая группа линейных преобразований (“группа изотропии тензора \mathcal{T}_n ”). Именно, $\Gamma = \Gamma^0 \rtimes S_3$, где Γ^0 состоит из всех преобразований вида

$$T(a, b, c) : x \otimes y \otimes z \mapsto axb^{-1} \otimes byc^{-1} \otimes cza^{-1}, \quad a, b, c \in GL(n, K).$$

Легко видеть, что $T(a, b, c)$ зависит лишь от классов преобразований a, b, c в проективной группе $PGL(n, K)$ и, таким образом, $\Gamma^0 \cong PGL(n, K)^{\times 3}$. Элементы же из дополнительного множителя S_3 действуют как

$$(123)(x \otimes y \otimes z) = z \otimes x \otimes y, \quad (12)(x \otimes y \otimes z) = y^t \otimes x^t \otimes z^t$$

(легко видеть, что эта группа S_3 действительно нормализует Γ^0).

Группа Γ сохраняет \mathcal{T}_n , и, таким образом, действует на множестве всех разложений вида (1). Группой автоморфизмов алгоритма \mathcal{A} называется подгруппа в Γ , сохраняющее множество $\{u_i \otimes v_i \otimes w_i \mid i = 1, \dots, r\}$.

Как абстрактная группа (т.е. безотносительно действия на пространстве $M_n(K)^{\otimes 3}$) группа Γ может быть описана следующим образом: $\Gamma = PGL(n, K)^{\times 3} \rtimes S_3$, где S_3 действует (сопряжением) как

$$(123)(a, b, c) = (c, a, b), \quad (12)(a, b, c) = (b^\vee, a^\vee, c^\vee),$$

где $a \mapsto a^\vee$ — контраградиентный автоморфизм группы $PGL(n, K)$, т.е. $[x]^\vee = [(x^t)^{-1}]$, где $x \in GL(n, K)$, а $[x]$ есть класс матрицы x в проективной группе.

Автор имеет основания думать, что гипотетический оптимальный алгоритм для умножения 3×3 матриц имеет группу, порядок которой лежит в промежутке $[10, 100]$ (или, по крайней мере, его полная группа симметрий имеет такую подгруппу). В этой связи, имея в виду теорему 2 (и еще один результат из [3], ограничивающий возможный вид группы), возникает следующий вопрос.

Вопрос. Пусть $\Gamma = PGL(3, \mathbb{C})^{\times 3} \rtimes S_3$ — группа, описанная выше, в частном случае $K = \mathbb{C}$, $n = 3$. Описать, с точностью до сопряженности, подгруппы $X < \Gamma$ такие, что $|X| \leq 100$, X изоморфно некоторой подгруппе в $S_{22} \times S_3$, X не содержит подгрупп порядка 17 или 19, и, наконец, X не содержит элементов вида (a, b, c) таких, что ровно одно из $a, b, c \in PGL(3, \mathbb{C})$ нетривиально.

(Здесь “описание” означает не предъявление списка подгрупп в явном виде (что было бы возможно лишь для очень малых подгрупп), а, например, некоторую разумную процедуру порождения такого списка. Например, для подгрупп порядка 19 имеется несколько сотен тысяч классов сопряженности, и все они были исключены (в качестве подгруппы в группе автоморфизмов гипотетического алгоритма длины ≤ 22) посредством компьютерного вычисления.)

Литература

1. Буриченко В. П. О билинейной сложности умножения 3×2 матрицы на 2×3 матрицу // Дискрет. матем. 2024. Т. 36, № 1. С. 15–45.
2. Burichenko V. P. Symmetries of matrix multiplication algorithms. I. // arXiv 1508.01110. 2015.
3. Burichenko V. P. On automorphism group of a possible short algorithm for multiplication of 3×3 matrices // arXiv 2211.06485. 2022.

ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ФОРМАЦИИ

А.Ф. Васильев¹, Т.И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,

Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь, formation56@mail.ru

²Белорусский государственный университет транспорта,

Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь, tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые ниже группы являются конечными. Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация, т. е. замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений класс групп. Х. Фиттинг [1] в 1938 году доказал, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда ее можно представить произведением двух своих нильпотентных подгрупп. Этот результат стал отправной точкой следующей задачи: для формации \mathfrak{F} установить условия, при которых группа $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, принадлежит \mathfrak{F} . Р. Брайс и Дж. Косси [2] решили эту задачу для случая нормальных (субнормальных) A и B . Б. Амберг, Л. С. Казарин и Б. Хефлинг [3] рассмотрели случай произвольных A и B ; А. Ф. Васильев [4, 5] в классе разрешимых групп получил конструктивное решение задачи для случая абнормальных (контранормальных, т.е. $A^G = B^G = G$) A и B . Отметим еще работы [6–8] в этом направлении.

В настоящем сообщении рассматривается еще один случай отмеченной выше задачи. Напомним [9], что группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B , если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A . Если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B , то группа $G = AB$ называется *произведением тотально перестановочных подгрупп* A и B . Рассматриваемая нами задача для тотально перестановочных подгрупп была полностью решена в [10, 11].

В работе [12] было введено

Определение. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс \mathfrak{F} называется *MP-замкнутым в \mathfrak{X}* , если \mathfrak{F} содержит всякую \mathfrak{X} -группу $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные \mathfrak{F} -подгруппы группы G . Пустой класс считается *MP-замкнутым в любом классе \mathfrak{X}* .

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, класс \mathfrak{F} называется *MP-замкнутым*. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, то \mathfrak{F} называется *разрешимым MP-замкнутым классом*.

Примерами *MP-замкнутых формаций* являются формации всех π -групп, формации всех разрешимых π -групп, формации всех дисперсивных по Оре групп (см. [9, с. 156, 162]), другие примеры найдены в [12]. В этой работе была поставлена следующая естественная

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и \mathfrak{X} – класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса \mathfrak{X} описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) \mathfrak{F} , *MP-замкнутые в \mathfrak{X}* .

Мы рассматриваем случай насыщенной формации. Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Многие классические формации являются насыщенными. В силу теоремы Гашюца-Любезедер-Шмида всякая непустая насыщенная формация является локальной тогда и только тогда, когда она насыщена. Все необходимые обозначения и результаты можно найти в [13, гл. IV].

Получена следующая

Теорема 1. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{F} – насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π -группы, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

1. Если \mathfrak{X} и \mathfrak{F} имеют полные локальные задания x и f , причем $f(p) \subseteq x(p)$ и $f(p)$ является *MP-замкнутой формацией в $x(p)$* для любого простого p , то \mathfrak{F} является *MP-замкнутой формацией в \mathfrak{X}* .

2. Пусть X и F – максимальные внутренние задания соответственно \mathfrak{X} и \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} является *MP-замкнутой в \mathfrak{X}* тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ является *MP-замкнутой в $X(p)$* для любого простого p .

В случае, когда \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп, из теоремы 1 получается теорема 2 из [12].

Предложение. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\tau$. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является МР-замкнутой формацией, когда для каждого $p \in \pi \setminus \tau$ выполняется следующее: p не делит $q - 1$ для любого $q \in \tau \setminus \pi$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. На множестве $A = \{\pi_i | \pi_i \subseteq \pi \text{ и } \pi = \bigcup \pi_i \text{ для всех } i \in I\}$ зададим следующее бинарное отношение $\Delta = \{(\pi_i, \pi_j) | \text{ для каждого } p \in \pi_i \setminus \pi_j \text{ следует, что } p \text{ не делит } q - 1 \text{ для любого } q \in \pi_j \setminus \pi_i\}$.

Теорема 2. Формация $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$, где каждая пара $(\pi_i, \pi_j) \in \Delta$, является МР-замкнутой формацией.

Напомним [14], что *формацией с условием Шеметкова* называется формация \mathfrak{F} , у которой любая минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Теорема 3. Наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} с условием Шеметкова является МР-замкнутой формацией тогда и только тогда, когда она содержит все сверхразрешимые $\pi(\mathfrak{F})$ -группы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Литература

1. Fitting H. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Vol. 48. P. 77–141.
2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups*, Math. Z. 1972. Vol. 127, No 3. P. 217–233.
3. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями* // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
4. Васильев А. Ф. *Об абnormally факторизуемых конечных разрешимых группах* // Украинск. матем. журн. 2002. Т. 54, № 9. С. 1163–1171.
5. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. Vol. 85, No 1. P. 305–311.
6. Семенчук В. Н. *Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации* // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.
7. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyaynov V. N. *On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups* // J. Algebra. 2014. V. 403, P. 69–76.
8. Gállego M. P., Hauck P., Pérez-Ramos M. D. *Saturated formations and products of connected subgroups*. J. Algebra. 2011. Vol. 333, No 1. P. 105–119.
9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups*. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.
10. Maier R. *A completeness property of certain formations* // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 540–544.
11. Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D. *A question of R. Maier concerning formations* // J. Algebra. 1996. Vol. 182. P. 738–747.
12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. *О МР-замкнутых насыщенных формациях конечных групп* // Известия вузов. Математика. 2017. Т. 61, № 6. С. 9–17.
13. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer, 2006.

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПРИВОДИМЫМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Д.В. Васильев¹, В.О. Иванова², Н.И. Калоша¹, Е.В. Сурай¹

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vasilyev@im.bas-net.by, kalosha@im.bas-net.by, suraylena@mail.ru

²ГУО Минский городской педагогический колледж, Макаенка 29, 220114 Минск, Беларусь
someone_vnv@mail.ru

В середине прошлого века одной из самых популярных задач в области диофантовых приближений была проблема К. Малера. Рассмотрим неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-w}, \quad w > 0 \quad (1)$$

в целочисленных полиномах $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ степени $\deg P = n$ и высоты

$$H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

При классификации действительных и комплексных чисел в 1932 году Малеру понадобилось следующее утверждение (известное как гипотеза Малера): при $w > n$ неравенство (1) имеет бесконечное число решений только для "редкого" множества $B \subset \mathbb{R}$ меры Лебега $\mu B = 0$. При $n = 1$ задача Малера уже была решена А.Я. Хинчиным [1]. Проблема Малера была решена полностью белорусским математиком В.Г. Спринджук [2] и обобщена в форме теоремы Хинчина для полиномов произвольной степени В.И. Берником [3] и В.В. Бересневичем [4]. Вскоре обнаружилось, что наиболее трудным моментом доказательств является случай, когда в неравенствах вида (1) полиномы $P(x)$ приводимы. При этом надо выяснить, как часто в полиномах $P(x)$ с корнем α_1 верно неравенство $|P'(\alpha_1)| < H^{1-v}$. К настоящему времени такая задача решена для $0 < v < 1,5$. Мы расширяем промежутки для v .

Теорема. Обозначим через $P_n(Q, v)$ множество всех целочисленных полиномов степени не больше n ограниченной высоты и с ограниченным значением производной в корне:

$$P_n(Q, v) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q, |P'(\alpha_1)| < H(P)^{1-v}\}.$$

Тогда при каждом $v \in [0, 2]$ для мощности множества $P_n(Q, v)$ справедлива следующая оценка

$$\#P_n(Q, v) \leq Q^{n+1-v+\varepsilon}$$

с произвольными $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0 = Q_0(\varepsilon)$.

Важную роль при доказательстве теоремы играют оценки сверху для количества приводимых полиномов в неравенствах (1), полученные в статье [5].

Литература

1. Khintchine A. *Some theorems on continued fractions, with applications to the theory of Diophantine approximations.* // Math. Annalen. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
2. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Мн.: Наука и техника, 1967.
3. Берник В. И. *О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов* // Acta Arith. 1989. Vol. 89. P. 17–28.
4. Beresnevich V. *On approximation of real numbers by real algebraic numbers.* // Acta Arith. 1999. Vol. 50. No 2. p. 97–112.
5. Берник В. И., Васильев Д. В., Кудин А. С. *О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена* // Тр. Ин-та математики. 2014. Т. 22, № 2. С. 3–8.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СУБМОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева

Белорусский государственный университет транспорта, Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь,
tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечные. Модулярная подгруппа [1], как модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы, является одним из обобщений нормальной подгруппы. Модулярные, как и нормальные подгруппы не обладают свойством транзитивности. Однако этого недостатка лишено понятие субмодулярной подгруппы, введенное в [2]. Подгруппа H называется *субмодулярной* в группе G , если H можно соединить с G цепью подгрупп, в которой каждая предыдущая подгруппа модулярна в следующей. В [2] были изучены свойства таких подгрупп. В [3] были исследованы классы групп с субмодулярными силовскими подгруппами. Р. Шмидт в [4] доказал, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M – максимальная нормальная подгруппа в G , либо $G/\text{Core}_G(M)$ неабелева порядка pq для некоторых

простых чисел p и q . Здесь $\text{Core}_G(M)$ – пересечение всех сопряженных с M подгрупп из G . В связи с этим в [5] были введены следующие понятия.

Определение 1. Пусть n – натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть n -модулярно вложенной в G , если либо $H \trianglelefteq G$, либо $H \neq \text{Core}_G(H)$, $|G : H| = p$ и $|G/\text{Core}_G(H)| = pq^n$, q^n делит $p - 1$ для некоторых простых чисел p и q .

Определение 2. Пусть k – фиксированное натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть k -субмодулярной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{m-1} \leq H_m = G \quad (1)$$

такая, что H_{i-1} n -модулярно вложена в H_i для некоторого натурального $n \leq k$ и любых $i = 1, \dots, m$.

Получены свойства k -субмодулярных подгрупп, а также групп с заданными системами k -субмодулярных подгрупп. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. Пусть k – фиксированное натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (1) В G любая максимальная подгруппа является k -субмодулярной.
- (2) G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого дополняемого главного фактора H/K из G для некоторого простого q и натурального числа $n \leq k$.

Если $n = k = 1$ и максимальная подгруппа в G является 1-субмодулярной, то она модулярна в G . Также верно обратное утверждение.

Следствие 1 [1, теорема 5.3.10]. Каждая максимальная подгруппа группы G модулярна в G тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого дополняемого главного фактора H/K из G .

Теорема 2. Пусть k – фиксированное натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (1) В любой подгруппе A из G всякая максимальная в A подгруппа является k -субмодулярной.
- (2) G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого главного фактора H/K из G для некоторого простого q и натурального числа $n \leq k$.

Заметим, что группы из теоремы 1 не всегда являются группами из теоремы 2. Например, пусть $n = k = 1$, группа $P = \langle a, b, c \mid a^7 = b^7 = c^7 = 1, ab = ba, ac = ca, b^c = ba \rangle$ – неабелева группа порядка 7^3 . Пусть $g \in \text{Aut}(P)$ с действием $(c^i b^j a^k)^g = c^{i6} b^{j2} a^{k12}$ для любых $i, j, k \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Группа P имеет экспоненту 7 и $|\langle g \rangle| = 6$. В полупрямом произведении $G = P \rtimes \langle g \rangle$ любая максимальная подгруппа 1-субмодулярна. В подгруппе $L = \langle a \rangle \rtimes \langle g \rangle$ максимальная подгруппа $\langle g \rangle$ не является 1-субмодулярной, так как $\text{Core}_L(\langle g \rangle) = 1$.

Решетка подгрупп группы G называется нижней полумодулярной, если для каждой пары подгрупп A, B из G такой, что A максимальна в $\langle A, B \rangle$, подгруппа $A \cap B$ максимальна в B . Группа G называется *LM-группой* [6, с. 130], если ее решетка подгрупп является нижней полумодулярной. Такие группы были охарактеризованы Ито в [7] (см. также [6]). Для $n = k = 1$ теорема 2 включает

Следствие 2 [6, гл. 4, теорема 4.4]. Группа G является LM-группой тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого главного фактора H/K из G .

Отметим, что если максимальная подгруппа M группы G является n -модулярно вложенной в G , то в G она является \mathbb{K} - \mathbb{P} -субнормальной и \mathbb{P} -субнормальной в смысле следующих определений из [8] и [9] соответственно. Подгруппа H группы G называется: \mathbb{K} - \mathbb{P} -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп (1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$; \mathbb{P} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (1), в которой $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Напомним [10], для непустого класса групп \mathfrak{F} подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп (1) такая, что $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. В [11] через \mathfrak{U}_k обозначен класс всех сверхразрешимых групп экспоненты, свободной от $(k + 1)$ -ых степеней простых чисел, k – натуральное число, и

установлено, что \mathcal{U}_k – наследственная формация, а также изучены группы с \mathcal{U}_k -субнормальными силовскими подгруппами.

Отметим, если максимальная подгруппа M группы G является k -субмодулярной в G ($n = k$), то M \mathcal{U}_k -субнормальна в G . Обратное в общем случае неверно. Это следует из приведенного выше примера, где в $L = \langle a \rangle \rtimes \langle g \rangle$ максимальная подгруппа $\langle g \rangle$ \mathcal{U}_1 -субнормальна, так как $L \in \mathcal{U}_1$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Литература

1. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
2. Zimmermann I. *Submodular subgroups in finite groups* // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.
3. Васильев В. А. *Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.
4. Schmidt R. *Modulare Untergruppen endlicher Gruppen* // J. III. Math. 1969. Vol. 13. P. 358–377.
5. Vasilyeva T. I. *On k -submodular subgroups of finite groups*. arXiv:2406.04704v1 [math.GR] 7 Jun 2024.
6. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. Passaic: Polugonal Publishing House, 1982.
7. Ito N. *Note on (LM)-groups of finite order* // Kodai Math. Sem. Reports. 1951. P. 1–6.
8. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О K - \mathbb{P} -субнормальных подгруппах конечных групп* // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.
9. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
10. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups*. Springer-Verlag, 2006.
11. Monakhov V.S., Sokhor I.L. *Finite groups with formational subnormal primary subgroups of bounded exponent* // Сиб. электрон. матем. изв. 2023. Т. 20, № 2. С. 785–796.

О ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА-ЛЕМУСА

М.М. Васьковский, М.А. Фирсов, П.Д. Бабаева

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
vaskovskii@bsu.by, firsovm23@gmail.com, palinababayeva@gmail.com

Теорема Штейнера-Лемуса, первые упоминания о которой относят к 1840 г., гласит: “Любой треугольник с двумя равными биссектрисами является равнобедренным” [1]. Очевидным следствием данной теоремы является следующий факт: любой треугольник, имеющий три равные биссектрисы, является равносторонним. Авторами настоящей статьи доказано приведенное ниже обобщение теоремы Штейнера-Лемуса (теорема 1).

Пусть n – действительное число. Рассматриваем произвольный треугольник ABC в \mathbb{R}^2 со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Пусть к сторонам a , b , c проведены так называемые n -линии AA_1 , BB_1 , CC_1 [2], т.е. каждая n -линия делит соответствующую ей сторону треугольника на отрезки, пропорциональные n -м степеням прилежащих сторон. Например, $BA_1 : A_1C = (AB : AC)^n$. В частности, AA_1 – медиана при $n = 0$, AA_1 – биссектриса при $n = 1$, AA_1 – симедиана при $n = 2$.

Будем говорить, что при заданном $n \in \mathbb{R}$ выполняется *аналог теоремы Штейнера-Лемуса для двух n -линий*, если “Любой треугольник с двумя равными n -линиями является равнобедренным”. Аналогично будем говорить, что при заданном $n \in \mathbb{R}$ выполняется *аналог теоремы Штейнера-Лемуса для трех n -линий*, если “Любой треугольник с тремя равными n -линиями является равносторонним”.

Теорема 1. *Аналог теоремы Штейнера-Лемуса для двух n -линий выполняется тогда и только тогда, когда $n \in [-1, N_1]$; аналог теоремы Штейнера-Лемуса для трех n -линий выполняется тогда и только тогда, когда $n \in [-2, N_0]$; где*

$$N_0 = 2 \min_{x \in (0,1)} \frac{\ln x}{\ln(8x+4) - \ln(x^2+6x+5)} = 29.143359\dots,$$

$$N_1 = \frac{4(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)}{3\beta_1 + 1 - \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3}} = 24.50613\dots,$$

$\alpha \beta_1$ – единственное положительное решение уравнения

$$\frac{3\beta + 1 - \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)} + \frac{\ln(\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}) - \ln(2\beta^2 + 2\beta)}{\ln \beta} = 0.$$

Опираясь на решение седьмой проблемы Гильберта [3] и арифметические свойства квадратичных и кубических числовых полей, мы получили следующий результат о трансцендентности чисел N_0, N_1 , определенных в формулировке теоремы 1.

Теорема 2. Числа N_0 и N_1 являются трансцендентными.

Литература

1. Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. *The Steiner–Lehmus Theorem*. Geometry Revisited. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1967.
2. Vaskouski M., Kastsevich K. *New signs of isosceles triangles* // Int. Journal of Geometry. 2013. Vol. 2, No 2. P. 56–67.
3. Гельфонд А. О. *О седьмой проблеме Гильберта* // Доклады Академии наук СССР. 1934. Т. 2. С. 1–6.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ПОЛУКОЛЕЦ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ СВЯЗКАМИ ПОЛУКОЛЕЦ НАД ДИСТРИБУТИВНОЙ РЕШЕТКОЙ

Е.М. Вечтомов

Вятский государственный университет, Московская 36, 610000 Киров, Россия, vecht@mail.ru

Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $S = \langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения \cdot , дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Класс полуколец содержит все кольца и все дистрибутивные решетки. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Если полукольцо S имеет элемент 0 , нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0 . Если S имеет нейтральный по умножению элемент 1 , то S называется *полукольцом с единицей* 1 . Полукольцо с тождеством идемпотентности $xx = x$ ($x + x = x$) называется *мультипликативно (аддитивно) идемпотентным*. Полукольцо называется *идемпотентным*, если оно мультипликативно идемпотентно и аддитивно идемпотентно. Мультипликативно идемпотентное кольцо называется *булевым кольцом*. Полукольцам с нулем посвящена монография Голана [1]. См. также [2, глава 1].

Полукольцо S называется *связкой (семейства) полуколец S_l над дистрибутивной решеткой L* , если полукольца S_l индексированы элементами $l \in L$ и существует такой полукольцевой эпиморфизм $\alpha : S \rightarrow L$, что $\alpha^{-1}(l)$ изоморфно полукольцу S_l для любого $l \in L$. Очевидно, что $\alpha^{-1}(l), l \in L$, являются подполукольцами полукольца S . Первоначально такая связка S называлась дистрибутивной решеткой L (полу)колец S_l [3, р. 109], и определялась в терминах существования конгруэнции ρ на S , для которой фактор-полукольцо S/ρ изоморфно L (отождествлялись S/ρ и L) и классы конгруэнции $[s]_\rho$ изоморфны соответствующим полукольцам S_l по всем элементам $l \in L$.

Рассмотрим три примера связок полуколец над дистрибутивной решеткой.

1. Связка S полутел U_l над дистрибутивной решеткой L .

Связка S является *абелево-регулярным* полукольцом, т. е. мультипликативно регулярным полукольцом (разрешимы уравнения $sxs = s$ для всех $s \in S$) с центральными мультипликативными идемпотентами (элементы $e^2 = e \in S$ коммутируют с каждым элементом из S). Кроме того, любой главный идеал aS полукольца S будет *положительным* полукольцом, т. е. элементы $s + e$ обратимы

в полукольце aS для всех $s \in aS$, где e — единица полукольца aS ($e = ax$ при $axa = a$). Абелево-регулярные полукольца с положительными главными идеалами мы называем *обобщенными agr -полукольцами* (обобщенными абелево-регулярными положительными полукольцами) [2, глава 2]. Обобщенное agr -полукольцо с нулем и с единицей называется просто *agr -полукольцом* [4]. Каждый элемент произвольного agr -полукольца является произведением обратимого элемента и однозначно определенного мультипликативного идемпотента.

Теорема 1. *Связки полутел над дистрибутивной решеткой суть в точности обобщенные agr -полукольца.*

2. Связка S булевых колец R_l над дистрибутивной решеткой L .

Связка S будет коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцом с тождеством $x + 2xu = x$; такие полукольца рассматривались в работах [4, р. 119; 5, с. 160–161]. Если S — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xu = x$, то эпиморфизм $\alpha : S \rightarrow 2S, \alpha(s) = 2s$ для любого $s \in S$, определяет S как связку булевых колец $\alpha^{-1}(2s)$ над дистрибутивной решеткой $2S$.

Теорема 2. *Связки булевых колец над дистрибутивной решеткой суть в точности коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xu = x$.*

В классе коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец полукольца $\langle S, +, \cdot \rangle$ с тождеством $x + 2xu = x$ характеризуются тем, что соответствующие им алгебраические структуры $\langle S, \vee, \cdot \rangle$, где $x \vee y = x + xy + y$, являются дистрибутивными решетками [6, предложение 3]. При этом полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$ и дистрибутивная решетка $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ имеют одни и те же идеалы и одни и те же конгруэнции. Поэтому изучение указанных полуколец во многом сводится к изучению соответствующих дистрибутивных решеток.

3. Связка S кольца R и полутела U над двухэлементной цепью L .

Такое полукольцо S , обладающее нулем, называется *дизъюнктным полукольцевым объединением кольца R и полутела U* и обозначается $R \dot{\cup} U$. Полукольца $R \dot{\cup} U$ исследовались в работах [7; 8]. Укажем несколько результатов о строении полуколец $R \dot{\cup} U$. Полукольца $R \dot{\cup} U$ суть в точности полукольца с нулем и ненулевой единицей, каждый элемент которых либо обратим, либо имеет противоположный элемент. Кольцо R входит в $R \dot{\cup} U$ для некоторого полутела U тогда и только тогда, когда R — радикальное по Джекобсону кольцо, аддитивная группа которого будет делимой абелевой группой без кручения. Полутело U входит в $R \dot{\cup} U$ для некоторого ненулевого кольца R тогда и только тогда, когда U *неzeroидное*, т. е. в U невозможно равенство вида $a + b = a$.

Замечание 1. Понятие связки полуколец можно расширить, взяв вместо дистрибутивной решетки L произвольное идемпотентное полукольцо. Отметим, что если S — связка полуколец над некоторым полукольцом L , то полукольца $\alpha^{-1}(l), l \in L$, должны быть подполукольцами полукольца S , что влечет идемпотентность полукольца L . На этом пути ожидается получение новых классов полуколец, обобщающих примеры 1–3.

Замечание 2. В книге [5] изучаются мультипликативно идемпотентные полукольца. В параграфе 4.3 этой работы доказано, что полукольца из целого ряда классов мультипликативно идемпотентных полуколец являются связками более просто устроенных полуколец над тем или иным идемпотентным полукольцом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №24-21-00117 «Полукольца и полумодули с условиями идемпотентности».

Литература

1. Golan J. S. *Semirings and their Applications*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publ., 1999.
2. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Черных В. В. *Элементы теории полуколец*. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012.
3. Ghosh S. *A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring* // Semigroup Forum. 1999. Vol. 59, No 1. P. 106–120.
4. Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Черных В. В. *Абелево-регулярные положительные полукольца* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282–309.
5. Вечтомов Е. М., Петров А. А. *Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением*. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

6. Вечтомов Е. М., Петров А. А. *Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием* // Известия вузов. Математика. 2023. Вып. 3. С. 29–40.
7. Вечтомов Е. М., Лукин М. А. *Полукольца, являющиеся объединением кольца и полутела* // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, Вып. 6. С. 159–160.
8. Лукин М. А. *О полукольцевых объединениях кольца и полутела* // Известия вузов. Математика. 2008. Вып. 12. С. 76–80.

ПОЛУМОДУЛИ НАД ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ИДЕМПОТЕНТНЫМИ ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Е.М. Вечтомов, А.А. Петров

Вятский государственный университет, Московская 36, 610000 Киров, Россия,
vecht@mail.ru, apetrov43@mail.ru

Исследуются полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Доклад примыкает к работам [1], [2]. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец излагается в книге [3]. Отметим, что ранее изучались гомологические свойства полумодулей над дистрибутивными решетками S (в частности над трехэлементной цепью), называемых S -полигонами [4].

Под *полукольцом* (с нулем и единицей) понимается алгебра $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения \cdot , дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон, и выделенными элементами нуль 0 (нейтральным по сложению и поглощающим по умножению) и единица 1 (нейтральным по умножению).

Полумодулем (левым S -полумодулем) над полукольцом S называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ вместе с отображением $S \times A \rightarrow A$, $(s, a) \rightarrow sa$, удовлетворяющим следующим условиям (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$): $(s + t)a = sa + ta$; $s(a + b) = sa + sb$; $(st)a = s(ta)$; $1 \cdot a = a$; $0 \cdot a = 0 = s \cdot 0$. Нуль полукольца и нуль полумодуля обозначаются одинаково.

Полукольцо, в котором верно тождество $xx = x$ (верны тождества $xx = x$ и $x + x = x$), называется *мультипликативно идемпотентным (идемпотентным)*.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ называется *полурешеткой*. Эквивалентное определение: (верхняя) *полурешетка* — это упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, любые элементы a и b которого имеют точную верхнюю грань $\sup(a, b)$. Данные определения связывают соотношения: $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ и $a + b = \sup(a, b)$.

Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ будет S -полумодулем над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S тогда и только тогда, когда в A верно тождество $4x = 2x$.

С точностью до изоморфизма существует четыре трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца: два идемпотентных ($2 = 1 + 1 = 1$) — цепь $S_1 = \{0 < e < 1\}$ и $S_2 = \{0, e, 1\}$, где $e + 1 = e$, и два неидемпотентных ($2 \neq 1$) — $S_3 = \{0, 1, 2\}$, где $3 = 1$, и $S_4 = \{0, 1, 2\}$, где $3 = 2$.

Далее предполагается, что $A \equiv \langle A, +, 0 \rangle$ — коммутативный моноид с тождеством $4x = 2x$.

Заметим, что моноид A является S_1 -полумодулем и/или S_2 -полумодулем тогда и только тогда, когда A будет полурешеткой. Если A — конечная полурешетка, то $\langle A, \leq \rangle$ будет решеткой.

Пусть A является S -полумодулем над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S . Тогда каждый элемент $e \in S$ индуцирует эндоморфизм $e : A \rightarrow A$, $a \mapsto ea$ при $a \in A$, такой, что $e(0) = 0$ и $e(e(a)) = e(a)$ для всех $a \in A$. При этом образ $e(A)$ служит множеством всех неподвижных элементов при действии эндоморфизма e .

Пусть теперь A будет S_1 -полумодулем (S_2 -полумодулем). Тогда $e(A)$ является подполурешеткой полурешетки A , содержащей 0 , и $e(a) \leq a$ (соответственно, $a \leq e(a)$) для любого элемента $a \in A$. Также $e(A)$ будет подполумодулем S_1 -полумодуля (соответственно, S_2 -полумодуля) A .

Подполурешетку B полурешетки A назовем S_i -подходящей, если A допускает структуру S_i -полумодуля ($i = 1, 2$) и $B = e(A)$.

Теорема 1. *Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_1 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наибольшим элементом множества $\{x \in e(A) : x \leq a\}$.*

Пример 1. Рассмотрим булеву решетку $B = \{0, a, b, s\}$ с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом s и одной парой несравнимых элементов a, b . S_1 -подходящими подполурешетками в B являются в точности следующие: $\{0\}$, B , $\{0, a\}$, $\{0, b\}$. В первом случае e действует как 0 (нулевой эндоморфизм), во втором случае — как 1 (тождественный изоморфизм), в третьем случае $e(b) = 0$ и $e(s) = a$, в четвертом случае $e(a) = 0$ и $e(s) = b$. Получаем, с точностью до изоморфизма, три S_1 -полумодуля B .

Предложение 1. Идеалы любой конечной дистрибутивной решетки являются S_1 -подходящими подполурешетками в ней.

Предложение 2. Все подполурешетки с нулем конечной полурешетки A с нулем являются S_1 -подходящими тогда и только тогда, когда A — цепь.

Следствие 1. Для любого натурального числа $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-1} структур S_1 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-1} S_1 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Теорема 2. Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_2 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наименьшим элементом множества $\{x \in e(A) : a \leq x\}$.

Пример 2. Рассмотрим цепь A , полученную из цепи \mathbb{Q} рациональных чисел добавлением наименьшего $\mathbf{0}$ и наибольшего $\mathbf{1}$ элементов. Множество $e(A) = \mathbb{Z} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ целых чисел с присоединенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ является S_i -подходящей подцепью S_i -полумодуля A при $i = 1, 2$.

Легко видеть, что любое подмножество булевой решетки A из примера 1, содержащее 0 и s , является S_2 -подходящим. Поэтому предложение 2 неверно для полукольца S_2 .

Предложение 3. Пусть A — конечная полурешетка с нулем 0 и наибольшим элементом s . Тогда подполурешетка B полурешетки A будет S_2 -подходящей в том и только в том случае, когда B является подрешеткой решетки A и содержит элементы 0 и s .

Пример 3. Пополним решетку B из примера 1 элементом c , таким, что $0 < c < a$ и $c < b$. В результате получим дистрибутивную решетку A , в которой верхняя подполурешетка B будет S_1 -подходящей, но не S_2 -подходящей.

Следствие 2. Все подмножества конечной цепи A , содержащие нуль и наибольший элемент, являются S_2 -подходящими.

Следствие 3. Для любого натурального числа $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-2} структур S_2 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-2} S_2 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Теоремы 1 и 2 суть необходимые условия на S_i -подходящую подполурешетку ($i = 1, 2$). Они позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка полурешетки A S_i -подходящей.

Предложения 1–3 дают некоторые соответствующие достаточные условия.

Для полуколец S_3 и S_4 справедливы следующие утверждения:

Предложение 4. Моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_3 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x = x$; при этом он допускает одну-единственную структуру S_3 -полумодуля.

Предложение 5. Моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_4 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x = 2x$; при этом он допускает одну-единственную структуру S_4 -полумодуля.

Полученные результаты могут быть полезны при дальнейшем исследовании полумодулей над мультипликативно идемпотентными полукольцами, в частности над идемпотентными полукольцами.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №24-21-00117 «Полукольца и полумодули с условиями идемпотентности».

Литература

1. Вечтомов Е. М. О полумодулях над мультипликативно идемпотентными полукольцами // Международная научная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». Казань: КФУ, 2024. С. 103–104.

2. Петров А. А. *О коммутативных аддитивных полугруппах с тождеством $4x = 2x$* // Международная научная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». Казань: КФУ, 2024. С. 130–131.

3. Вечтомов Е. М., Петров А. А. *Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением*. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

4. Fofanova T. S. *Polygons over distributive lattices* // Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 289–292.

О СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОТОКАХ РИЧЧИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Д.С. Григорьев¹, Д.Н. Оскорбин², Е.Д. Родионов¹

¹ Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, 656049 Барнаул, Россия,
{danila.grigoryev.2019, edr2002}@mail.ru

² Московский физико-технический институт, Институтский переулок д.9, 141701 Долгопрудный, Московская область,
Россия, oskorbin@yandex.ru

Введение. В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой с полусимметрической связностью.

Пусть M — риманово многообразие размерности n . Определим на M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты, $g(X, Y)$ — метрический тензор. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1].

Определим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Ric(g(t)). \quad (1)$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном для связности Леви-Чивиты в [2]. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Sym(Ric(g(t))).$$

Рассмотрен случай, когда G — трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Дж. Милнора [3].

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных римановых метрик Дж. Милнора, которые ранее изучались К. Онда [4]

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$ и $A, B, C > 0$.

Для всех унимодулярных групп Ли исследовался симметрический поток Риччи с полусимметрической связности. Уравнение потока в системе координат Дж. Милнора было приведено к системе алгебраических и дифференциальных уравнений. Решая последовательно сначала подсистему из алгебраических уравнений и после подставляя полученное решение в систему дифференциальных уравнений, мы находим симметрический поток Риччи на трехмерной унимодулярной группе G с метрикой Дж. Милнора относительно полусимметрической связности.

Литература

1. Cartan E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)*, Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42. P. 17–88.
2. Hamilton R. S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature* J. Differential Geom. 1982. Vol. 17 (2). P. 255–306.
3. Milnor J. *Curvature of left invariant metric on Lie groups* Advances in mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
4. Onda K. *Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds* // arXiv:0906.1035. 2010.

**О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ π -РАЗРЕШИМЫХ И
 π -СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

Т.Д. Жук^{1,2}, В.Г. Сафонов¹

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,

²Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Московский проспект, 33, 210038 Витебск, Беларусь
taisa.zhuk.m@gmail.com, vgsafonov@im.bas-net.by

Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в [1–4].

Пусть G — группа и $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы G . Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G , если M — модулярный элемент решетки $\mathcal{L}(G)$ [1, с. 43], т.е.

(1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$;

(2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Если $K \leq H$ — подгруппы группы G , то через $[H/K]$ обозначают подрешетку решетки $\mathcal{L}(G)$ (см., например, [1, с. 5]), определяемую условием $[H/K] = \{N \leq G \mid K \leq N \leq H\}$.

Пусть A и N — подгруппы группы G . Подгруппа A называется *N -модулярной* в G [2, 3], если для некоторой модулярной подгруппы T группы G , содержащей A , подгруппа N *изолирует пару* (T, A_mG) , т.е. $N \cap T = N \cap A_mG$, где A_mG — подгруппа группы A , порожденная всеми теми ее подгруппами, которые модулярны в группе G .

В работе [3] понятие N -модулярной подгруппы использовалось для получения характеристик p -разрешимых и p -сверхразрешимых групп.

В данном сообщении мы развиваем некоторые результаты работы [3] и даем, на основе понятия N -модулярной подгруппы, новые характеристики π -разрешимых и π -сверхразрешимых групп, где π — некоторое подмножество множества всех простых чисел \mathbb{P} .

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Для всякой группы G через $\pi(G)$ обозначают множество простых делителей ее порядка. Группу G называют π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$.

1. Характеризация π -разрешимых групп.

Напомним, что группа G называется π -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является либо абелевой π -группой, либо π' -группой.

Теорема 1.1. *Группа G π -разрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с π -разрешимым фактором G/N и

(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и либо индекс $|G_{i+1} : G_i|$ является π' -числом, либо решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

В частности, если $\pi = \{p\}$ из теоремы 1.1. получаем

Следствие 1.2 [3, теорема 1]. *Группа G p -разрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с p -разрешимым фактором G/N и
(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и либо индекс $|G_{i+1} : G_i|$ является p' -числом, либо решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

Кроме того, следствиями теоремы 1.1 являются следующие известные результаты

Следствие 1.3. [3, следствие 1]. *Группа G разрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым фактором G/N и
(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

Следствие 1.4 [1, теорема 5.3.5]. *Группа G разрешима в том и только в том случае, когда в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i модулярна в G и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \dots, t-1$.*

2. Характеризация π -сверхразрешимых групп.

Напомним, что группа G называется π -сверхразрешимой, если каждый главный фактор группы G является либо циклической π -группой, либо π' -группой.

Теорема 2.1. *Группа G π -сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с π -сверхразрешимым фактором G/N и
(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и либо индекс $|G_{i+1} : G_i|$ является π' -числом, либо решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

В случае, когда $\pi = \{p\}$ из теоремы 2.1. вытекает

Следствие 2.2 [3, теорема 1]. *Группа G p -сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с p -сверхразрешимым фактором G/N и
(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и либо индекс $|G_{i+1} : G_i|$ является p' -числом, либо решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

Кроме того, следствиями теоремы 2.1. являются следующие известные результаты.

Следствие 2.3. [3, следствие 1]. *Группа G сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с сверхразрешимым фактором G/N и
(ii) в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i N -модулярна в G и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна (соответственно, дистрибутивна) для всех $i = 0, \dots, t-1$.

Следствие 2.4 [1, теорема 5.3.7]. *Группа G сверхразрешима в том и только в том случае, когда в G имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, где подгруппа G_i модулярна в G и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна в для всех $i = 0, \dots, t-1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф24КИ-021).

Литература

- Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- Liu A.-M., Wang S., Safonov V. G., Skiba A. N. *A criterion for modularity of the subgroup lattice of a finite soluble group* // J. Algebra and Its Applications. 2024. <https://doi.org/10.1142/S0219498825503785>.
- Лю А.-М., Ван С., Сафонов В. Г., Скиба А. Н. *Решеточные характеристики p -разрешимых и p -сверхразрешимых конечных групп* // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2024. Т. 20, № 4. 8 с.
- Skiba A. N. *On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets* // J. Algebra. 2020. Vol. 550. P. 69–85.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, СВЯЗАННЫХ С σ -ПРОБЛЕМОЙ КЕГЕЛЯ-ВИЛАНДТА

С.Ф. Каморников¹, В.Н. Тютянов²,

¹Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь, sfkamornikov@mail.ru

²Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»,
Октябрь 46а, 246029 Гомель, Беларусь, vtutanov@gmail.com

В работе рассматриваются только конечные группы.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел и $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – разбиение \mathbb{P} на попарно непесекающиеся подмножества σ_i ($i \in I$), т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Элементы σ_i ($i \in I$) разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является σ -*примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется σ -*субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной. Далее множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется σ -*полной*, если $G \in \bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$, т.е. G обладает по крайней мере одной σ_i -холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить E_σ . Для $i \in I$ мы пишем $H \leq_{\sigma_i} G$, если подгруппа H обладает тем свойством, что $H \cap S_i$ — σ_i -холлова подгруппа из H для любой σ_i -холловой подгруппы S_i группы G .

Если подгруппа H является σ -субнормальной в σ -полной группе G , то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в "Коуровской тетради" [2] под номером 19.86 А.Н. Скиба сформулировал следующий аналог известной гипотезы Кегеля-Виландта.

Проблема. *Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ -субнормальной в G , если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$?*

Отмеченная проблема сегодня называется σ -*проблемой Кегеля-Виландта*. Интерес к ней обусловлен тем, что ее положительное решение дает новый критерий σ -субнормальности подгрупп, имеющих важное значение при решении целого ряда классификационных задач теории конечных групп.

В данной работе приводится редукционное решение σ -проблемы Кегеля-Виландта: показывается, что для любого разбиения σ решение σ -проблемы Кегеля-Виландта сводится к ее решению в классе всех σ -полных простых неабелевых групп.

Теорема. *Тогда и только тогда σ -проблема Кегеля-Виландта имеет положительное решение, когда она верна в классе всех σ -полных простых неабелевых групп.*

Ввиду теоремы алгоритм решения σ -проблемы Кегеля-Виландта для заданного разбиения σ состоит в выполнении следующих двух шагов:

- 1) классифицировать все σ -полные простые группы;
- 2) на основе анализа строения σ -полных простых групп либо доказать, что для всех их проблема верна, либо указать хотя бы одну из них, для которой это не так.

Что касается второго шага алгоритма, то ввиду [3–7] для любого разбиения σ достаточно ограничиться рассмотрением σ -полных простых неабелевых групп лиева типа ранга большего 1.

Ввиду требования σ -полноты группы G в σ -проблеме Кегеля-Виландта ее решение тесно связано со следующей проблемой 3.2 из [8]:

Найти холловы подгруппы конечных простых групп.

Изучением этой проблемы занимались многие математики. Полная классификация холловых подгрупп известных простых групп представлена в работе [8]. Понятно, что она не решает проблемы описания σ -полных простых групп, которая даже для конкретных разбиений σ является сложной теоретико-групповой и теоретико-числовой задачей.

Отметим, что для минимального разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ в силу теоремы Силова любая группа является σ -полной. Поэтому в этом случае σ -проблема Кегеля-Виландта превращается в известную проблему Кегеля-Виландта. Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [9].

В настоящее время, кроме минимального разбиения, σ -проблема Кегеля-Виландта решена для бинарного разбиения $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ (см. [3,10]), а также для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}'\}$ (см. [11]).

В работе, кроме описанного выше алгоритма решения σ -проблемы Кегеля-Виландта, обсуждаются другие подходы к ее исследованию: решеточные, арифметические, факторизационные.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Литература

1. Skiba A. N. *On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups* // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.
2. *Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь*. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018.
3. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О σ -субнормальных подгруппах конечных групп* // Сиб. матем. ж. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.
4. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О σ -субнормальных подгруппах конечных $3'$ -групп* // Укр. матем. ж. 2020. Т. 72, № 6. С. 806–811.
5. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О некоторых аспектах σ -проблемы Кегеля-Виландта* // Известия вузов. Математика. 2022. № 2. С. 18–28.
6. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *К σ -проблеме Кегеля-Виландта* // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 4. С. 564–570.
7. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *К σ -проблеме Кегеля-Виландта* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 121–129.
8. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. *Теоремы силовского типа* // УМН. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
10. Kleidman P. V. *A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups* // Ann. Math. 1991. Vol. 133. P. 369–428.
11. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyaynov V. N. *On the Kegel-Wielandt σ -problem for binary partitions* // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2022. Vol. 201. P. 443–451.
12. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *σ -Проблема Кегеля-Виландта для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}'\}$* // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 4. С. 64–68.

О СТРОЕНИИ МЕТРИК ЭЙНШТЕЙНА И ИНВАРИАНТНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, 656049 Барнаул, Россия,
 klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Введение. В работе исследованы однородные солитоны Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью, дана их полная классификация. Ключевые слова: однородный солитон Риччи, трехмерное локально однородное пространство, полусимметрическая связность.

Солитоны Риччи являются естественным обобщением метрик Эйнштейна и представляют собой решение потока Риччи. В общем случае они исследовались многими математиками, что нашло отражение в обзорах Х.-Д.Цао, Р.М.Аройо – Р.Лафуэнте [1, 2].

Полусимметрические связности (или связности с векторным кручением) были введены Э.Картаном [3] и содержат связность Леви-Чивиты. Изучение многообразий и их свойств относительно указанных связностей проводилось К.Яно [4], И.Агриколой [5] и другими математиками.

Настоящая работа продолжает исследования однородных солитонов Риччи, метрик Эйнштейна и потоков Риччи на локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью [6 – 20].

В результате проведенных исследований получена серия теорем о строении метрик Эйнштейна, инвариантных солитонов Риччи и потоков Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с полусимметрической связностью. Решена гипотеза Л.Цербо в случае полусимметрических связностей, а также в случае лоренцевых метрик со связностью Леви—Чивиты.

Гипотеза Л.Цербо. *На группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви—Чивиты не существует нетривиальных инвариантных солитонов Риччи. Приведем часть из полученных результатов.*

Теорема А. *Если трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство допускает такую метрическую связность с инвариантным векторным кручением, что выполняется уравнение Эйнштейна, то оно либо является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивиты, либо является конформно плоским.*

Определение. *Если риманово многообразие (M, g) со связностью Леви-Чивиты есть многообразие Эйнштейна, или изометрично прямому произведению многообразия Эйнштейна и евклидова пространства, то его метрика g называется тривиальным солитоном Риччи.*

Теорема В. *Пусть (M, g, \cdot) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.*

Теорема С. *Пусть (G, g, \cdot) трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и связностью Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.*

Замечание. Как показывают теоремы В и С, гипотеза Л.Цербо неверна в условиях теорем В и С.

Кроме того, авторами получена полная классификация инвариантных солитонов Риччи в случае трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространств. Оказалось, что все нетривиальные солитоны Риччи содержатся в случае групп Ли. Приведем завершающую классификацию теореме [9].

Теорема D. *Пусть $(M = G/H, g, \nabla)$ – трехмерное (псевдо)риманово локально однородное пространство с полусимметрической связностью ∇ , отличной от связности Леви-Чивиты и нетривиальной группой изотропии. Тогда любой однородный солитон Риччи на M является тривиальным.*

Литература

1. Cao H.-D. *Recent progress on Ricci solitons* // arXiv:0908.2006
2. Arroyo R. M., Lafuente R. *Homogeneous Ricci solitons in low dimensions* // Int. Math. Res. Notices. 2015. Vol. 2015, Issue 13. P. 4901–4932.
3. Cartan E. *Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee (deuxieme partie)* // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. No 42. P. 17–88.
4. Yano K. *On semi-symmetric metric connection* // Revue Roumaine de Math. Pure et Appliquees. 1970. No 15. P. 1579–1586.
5. Agricola I., Kraus M. *Manifolds with vectorial torsion* // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 45. P. 130–147.
6. Klepikov P. N., Rodionov E. D., Khromova O. P. *Three-dimensional nonunimodular Lie groups with a Riemannian metric of an invariant Ricci soliton and a semisymmetric metric connection* // Russian Mathematics. 2022. Vol. 66. P. 65–69.
7. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью* // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 80, № 1. С. 48–61.

8. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью* // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Изд-во ВИНТИ РАН. 2023. Т. 222. С. 19–29.
9. Балащенко В. В., Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Об однородных солитонах Риччи на локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью* // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 76–81.
10. Klepikov P. N., Rodionov E. D., Khromova O. P. *Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion* // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 276, No 6. P. 733–745.
11. Павлова А. А., Хромова О. П. *О метриках Эйнштейна трехмерных групп Ли с полусимметрической связностью* // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Изд-во ВИНТИ РАН. 2023. Т. 222. С. 64–68.
12. Клепиков П. Н. *Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена—Вейля* // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Изд-во ВИНТИ РАН. 2023. Т. 223. С. 50–65.
13. Клепиков П. Н., Куркина М. В., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Об одном уравнении в теории солитонов Риччи с полусимметрической связностью* // Известия Алтайского государственного университета. Изд-во: Алтайский государственный университет. 2023. № 4 (132). С. 64–67.
14. Хромова О. П., Балащенко В. В. *О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли* // Известия Алтайского государственного университета 2023. № 1 (129). С. 141–144.
15. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью* // Известия вузов. Математика. 2022. №5. С. 80–85.
16. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением* Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 4. С. 30–47.
17. Балащенко В. В., Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *О гипотезе Цербо на группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой* // Известия Алтайского государственного университета. 2022. № 1 (123). С. 79–82.
18. Павлова А. А., Хромова О. П., Родионов Е. Д., Вылегжанин Д. В. *О симметрическом уравнении Эйнштейна трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью* // Известия Алтайского государственного университета. 2022. № 4 (126). С. 140–143.
19. Павлова А. А., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *О кососимметрическом тензоре Риччи метрических групп Ли с полусимметрической связностью* // Тезисы докладов международной конференции по геометрическому анализу, посвящённой памяти академика Ю. Г. Решетняка, 23–29 октября 2022 / Новосибир. гос. ун-т. — Новосибирск: ИПЦ НГУ. 2022. С. 97–99.
20. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. *Об инвариантных солитонах Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью* // Материалы Международной конференции "Лобачевские чтения" – Казань: Изд-во КФУТ. 62. 2022. С. 62–63.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ДВУХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ В-ГРУПП

В. Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Кирова 119, 246019 Гомель, Беларусь,
knyagina@inbox.ru

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и определения стандартны [1], [2]. B -группой называют конечную нильпотентную группу, у которой в фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта (конечная нильпотентная группа с нильпотентными собственными подгруппами) является B -группой. В строении B -групп и групп Шмидта есть сходства и есть различия. Так, обе они бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах нормальна, а другая силовская подгруппа — циклическая, см. лемму 2.2 [3]. Одно из различий между B -группами и группами Шмидта заключается в том, что если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в

B -группе это свойство нарушается. Например, диэдральная группа порядка 18 является B -группой и не является группой Шмидта.

В работе [3] были описаны начальные свойства B -групп и изучена группа, факторизуемая примарной группой и B -группой. В работе [4] было установлено, что конечная p -разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет p -длину не более 2. Эта оценка точная, симметрическая группа S_4 имеет 2-длину, равную 2, и является произведением двух своих подгрупп Шмидта A_4 и S_3 .

В настоящей заметке мы устанавливаем свойства конечной группы $G = HK$, представимой в виде произведения двух своих сверхразрешимых B -подгрупп H и K , одна из которых имеет нечетный порядок.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть H и K — две сверхразрешимые B -подгруппы конечной группы $G = HK$. Справедливы следующие утверждения.

(1) Если порядки подгрупп H и K — нечетные числа, то G сверхразрешима.

(2) Если порядок подгруппы H нечетен, то G 2-нильпотентна и $l_p(G) = 1$ для всех $p \in \pi(G)$.

Пример 1. Пусть p — простое нечетное число и C_p — циклическая группа порядка p . Эта группа обладает автоморфизмом α порядка 2. Зададим отображение $\varphi : S_4 \rightarrow \langle \alpha \rangle$ следующим образом: $\varphi(\tau) = \alpha$, если τ — нечетная перестановка и $\varphi(\tau) = 1$, если τ — четная перестановка. Тогда φ — гомоморфизм группы S_4 на $\langle \alpha \rangle$, ядро которого совпадает с A_4 . Рассмотрим полупрямое произведение $G = C_p \rtimes S_4$ относительно гомоморфизма φ . Тогда $G = S_3(C_p \rtimes \langle (1234) \rangle)$ есть произведение двух сверхразрешимых B -подгрупп, причем G — не 2-нильпотентная группа и $l_2(G) = 2$. При $p = 3$ построенная группа не 3-замкнута. Этот пример показывает, что произведение двух сверхразрешимых B -подгрупп, одна из которых имеет четный порядок, может быть несверхразрешимой группой 2-длины >1 .

Пример 2. Симметрическая группа S_5 является произведением своих B -подгрупп $H = C_5 \rtimes C_4$ и $K \cong D_{12}$ четных порядков. Здесь D_{12} — диэдральная группа порядка 12. Этот пример показывает, что произведение двух сверхразрешимых B -подгрупп четных порядков, может быть неразрешимой группой.

Литература

1. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.
2. Монахов В. С. *Введение в теорию конечных групп и их классов*. Минск: Вышэйшая школа. 2006.
3. Княгина В. Н. *О произведении B -группы и примарной группы* // Проблемы физики, математики и техники. 2017. Т. 32, № 3. С. 52–57.
4. Княгина В. Н., Монахов В. С. *О p -длине произведения двух групп Шмидта* // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 2. С. 329–333.

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК ФИКСИРОВАННОЙ СТЕПЕНИ

Д.В. Коледа

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
koledad@rambler.ru

Введение. Доклад посвящён вопросу: как в евклидовом пространстве распределены точки, координаты которых суть сопряжённые алгебраические числа. Такие точки мы будем называть *алгебраическими*. В теории чисел имеется класс задач, которые можно свести к подсчёту алгебраических точек внутри некоторых областей евклидова пространства. Оказывается, что если нужная область обладает “достаточно хорошей” границей, то возможно установить асимптотику количества алгебраических точек фиксированной степени и ограниченной высоты в такой области. Более того, главный член этой асимптотики содержит интеграл по рассматриваемой области от неотрицательной

функции, которую можно толковать как плотность распределения алгебраических точек данной степени. Мы также проанализируем поведение этой функции.

Основные понятия и соглашения. В докладе степень n алгебраических чисел и точек произвольна, но фиксирована; также фиксированы целые неотрицательные k, l , такие что $1 \leq k + 2l \leq n$. Верхняя граница Q высот алгебраических точек есть большое положительное число. Асимптотические соотношения и пределы рассматриваются при $Q \rightarrow +\infty$. Пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ мы будем отождествлять с \mathbb{R}^{k+2l} . Верхняя комплексная полуплоскость обозначена как $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$.

Под *высотой* многочлена $q(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ мы понимаем непрерывную функцию $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющую двум условиям: (а) $\mathcal{H}[q] = 0$, если и только если q есть тождественный нуль; (б) $\mathcal{H}[\omega q] = |\omega| \mathcal{H}[q]$ для всех вещественных ω . Саму функцию \mathcal{H} , как функцию коэффициентов многочлена, мы будем называть *высотной функцией*.

Примерами высот являются *обычная высота* H и *мера Малера* M , которые для многочлена $q(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 = a_n (X - z_1) \dots (X - z_n)$ определяются соответственно как

$$H[q] := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|, \quad M[q] := |a_n| \prod_{j=1}^n \max\{1, |z_j|\}.$$

Рассматривая высотную функцию \mathcal{H} как “норму”, определим $(n+1)$ -мерный “единичный \mathcal{H} -шар”:

$$\mathbb{B}_{\mathcal{H}} := \left\{ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{H} \left[\sum_{j=0}^n a_j X^j \right] \leq 1 \right\}.$$

Далее высотную функцию \mathcal{H} будем считать произвольной, но фиксированной.

Под *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой целочисленный многочлен q_α наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $q_\alpha(\alpha) = 0$.

Алгебраической (k, l) -точкой будем называть упорядоченный набор из $(k+l)$ чисел

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l,$$

такой что его вещественные координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и комплексные координаты β_1, \dots, β_l суть различные сопряжённые (по Галуа) алгебраические числа, т.е. числа α_i и β_j имеют общий минимальный многочлен q_α . *Степень* и *высоту* алгебраической точки определим как степень и высоту минимального многочлена координат точки $\deg(\alpha) := \deg(q_\alpha)$, $\mathcal{H}[\alpha] := \mathcal{H}[q_\alpha]$.

Пусть $\mathbb{A}_n(k, l)$ обозначает множество всех алгебраических (k, l) -точек степени n (над \mathbb{Q}). Для $Q \geq 1$ и множества $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$ определим считающую функцию

$$\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, B) := \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n(k, l) \cap B : \mathcal{H}[\alpha] \leq Q\}.$$

Основные результаты. Если множество B фиксировано, а его граница ∂B и граница $\partial \mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ “единичного шара” $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ имеют лебегову меру нуль, то величина $\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, B)/Q^{n+1}$ имеет конечный предел при $Q \rightarrow +\infty$. Если названные границы вдобавок не слишком извилистые, можно оценить скорость сходимости. А именно, предположим, что высота \mathcal{H} есть алгебраическая или липшицева функция коэффициентов (a_0, \dots, a_n) многочлена.

Теорема 1 [1, 2]. Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$ — область, чья граница ∂B содержится в конечном объединении липшицевых отображений куба $[0, 1]^{k+2l-1}$. Тогда выполняется неравенство

$$\left| \frac{\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, B)}{Q^{n+1}} - \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \right| \leq \begin{cases} CQ^{-1} \log Q, & n = 2 \text{ и } l = 0, \\ CQ^{-1}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

где $\rho_{\mathcal{H};k,l} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция (см. теоремы 2 и 3 ниже); $d\mathbf{v}$ — элемент объёма в пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l \cong \mathbb{R}^{k+2l}$; $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Римана; $\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})$ — объём $(n+1)$ -мерного “единичного шара” $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$. Постоянная $C > 0$ зависит только от n и от параметров границы ∂B : числа покрывающих её отображений и величины их липшицевых постоянных.

Отметим, что постоянная C в теореме 1 определяется не самой границей ∂B , а классом множеств, к которому эта граница относится, и классом функций, к которому относится \mathcal{H} . Благодаря этому оценка (1) остаётся верной и для областей B , которые сами могут зависеть от Q . В частности, теорема 1 применима, когда область B стягивается ко множеству нулевой меры при $Q \rightarrow +\infty$.

Теорема 2 [1, 2]. Пусть $1 \leq k + 2l \leq n$. Функции $\rho_{\mathcal{H};k,l}$ в теореме 1 удовлетворяют тождеству

$$\rho_{\mathcal{H};k,l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l) = 2^l \rho_{\mathcal{H};k+2l}(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l, z_1^*, \dots, z_l^*),$$

где функцию $\rho_{\mathcal{H};m}(z_1, \dots, z_m)$ при $1 \leq m \leq n$ можно выразить формулой

$$\rho_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \prod_{1 \leq i < j \leq m} |z_i - z_j| \times \int_{D_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z})} \prod_{i=1}^m \left| \sum_{j=0}^{n-m} t_j z_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-m}, \quad (2)$$

$$D_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z}) := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m+1} : \mathcal{H} \left[\prod_{k=1}^m (X - z_k) \sum_{j=0}^{n-m} t_j X^j \right] \leq 1 \right\}. \quad (3)$$

В частности, при $m = n$ верно равенство

$$\rho_{\mathcal{H};n}(\mathbf{z}) = \frac{2}{(n+1)\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \cdot \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right) \cdot \left(\mathcal{H} \left[\prod_{k=1}^n (X - z_k) \right] \right)^{-n-1}. \quad (4)$$

В случае меры Малера M формулы (2)–(4) можно преобразовать к виду, более удобному для анализа поведения функции $\rho_{M;m}(\mathbf{z})$ при больших значениях аргументов \mathbf{z} . Кроме того, можно показать, что для всякой высоты \mathcal{H} найдутся постоянные $\alpha, \beta > 0$ (зависящие только от n и самой функции \mathcal{H}), такие что для любого многочлена q степени n выполняется

$$\alpha M[q] \leq \mathcal{H}[q] \leq \beta M[q]. \quad (5)$$

Теорема 3 [3]. Пусть \mathcal{H} — произвольная высотная функция. Тогда для всех $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ верно неравенство

$$\frac{1}{\beta^{n+1}} \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}_M)}{\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \rho_{M;m}(\mathbf{z}) \leq \rho_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z}) \leq \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}_M)}{\text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \rho_{M;m}(\mathbf{z}),$$

где положительные постоянные α и β те же, что и в (5).

Литература

1. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. *Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach* // Adv. Math. 2020. Vol. 359. Art. 106849.
2. Коледа Д. В. *Об алгебраических точках фиксированной степени и ограниченной высоты* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 5. С. 519–525.
3. Коледа Д. В. *О плотностях распределения алгебраических точек при различных высотных функциях* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 6. С. 647–653.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЛОГО НАКРЫТИЯ

А.О. Корецкий

МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, 119991 ГСП-1 Москва, Россия

lidi1881lidi@gmail.com

Пусть P — простой выпуклый четырёхмерный многогранник, $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ — набор его гиперграней. Рассмотрим линейно независимую векторную раскраску $\Lambda: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}_2^r$ многогранника P ранга r такую, что $\langle \Lambda(F) : F \in \mathcal{F} \rangle = \mathbb{Z}_2^r$ и для любого поднабора граней $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, если $\bigcap \hat{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, то образы граней из $\hat{\mathcal{F}}$ линейно независимы. Тогда многограннику P и его раскраске Λ можно сопоставить многообразие:

$$N(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^r / \sim, \quad \text{где} \quad (p, a) \sim (q, b) \Leftrightarrow p = q \text{ и } a - b \in \langle \Lambda(F_i) : p \in F_i \rangle,$$

на котором действует \mathbb{Z}_2^r . Такое многообразие в случае $r = 4$ будем называть *малым накрытием*. Если $N(P, \Lambda)$ имеет инволюцию $\tau \in \mathbb{Z}_2^r$ такую, что $N(P, \Lambda)/\langle \tau \rangle \simeq S^4$, то его будем называть специальным гиперэллиптическим многообразием. Ероховцом Н. Ю. было показано, что специальные гиперэллиптические многообразия могут быть построены над прямоугольными многогранниками в геометриях S^4 , $S^3 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}^2$, $S^2 \times S^2$, $S^2 \times \mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2$, но не могут в \mathbb{R}^4 , \mathbb{L}^4 , $\mathbb{L}^3 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{R}^2$ [1]. Можно показать, что для перечисленных геометрий не существует специальных гиперэллиптических малых накрытий над прямоугольными многогранниками. Однако, остаётся вопрос о существовании специального гиперэллиптического малого накрытия хотя бы над одним, не обязательно прямоугольным, четырёхмерным многогранником. Нашим основным результатом является утвердительный ответ на этот вопрос.

В данной работе критерий, описанный в [1] (см. следствие 4.54), переформулируется в целях облегчить проверку существования специального гиперэллиптического малого накрытия для многогранника P по его графу вершин-гиперграней (ориентированный граф отношения принадлежности вершины гиперграней) с помощью ЭВМ. Полученная формулировка используется для перебора всех многогранников до девяти гиперграней, и результат позволяет предъявить искомым многогранник.

Следуя [1], рассмотрим раскраску многогранника P в l цветов, то есть сюръекцию $c: \mathcal{F} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$. Тогда определим комплекс $\mathcal{C}(P, c) \subset \partial P$ следующим образом: его "гипергранями" назовём связные компоненты объединения гиперграней многогранника P одного цвета. Его k -гранями назовём связные компоненты пересечения его различных $4 - k$ гиперграней. Два комплекса $\mathcal{C}(P, c)$ и $\mathcal{C}(Q, c')$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм между P и Q , переводящий гиперграней одного комплекса в гиперграней другого. $\mathcal{C}(Q, c_2)$ назовём подкомплексом $\mathcal{C}(Q, c_1)$, если его гиперграней являются объединениями гиперграней комплекса $\mathcal{C}(Q, c_1)$. Подкомплекс $\mathcal{C}(Q, c_2)$ комплекса $\mathcal{C}(Q, c_1)$ назовём гамильтоновым, если каждый q -остов комплекса $\mathcal{C}(Q, c_1)$ содержится в $(q + 1)$ -остове комплекса $\mathcal{C}(Q, c_2)$ (подобно тому, как все вершины содержатся в гамильтоновом цикле). Через $\mathcal{C}(n, k)$ обозначим класс эквивалентности комплекса $\mathcal{C}(\Delta^n, c)$, где c — раскраска в k цветов. $\mathcal{C}(n, k)$ эквивалентно может быть определён на границе диска

$$S_k^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0\}$$

при помощи гиперграней $S_k^n \cap \{x_i = 0\}$, $i = 1, \dots, k$.

Как было показано в [1], если многогранник имеет специальное гиперэллиптическое малое накрытие, то найдётся гамильтонов $\mathcal{C}(4, 3)$ -подкомплекс $\mathcal{C} \subset \partial P$, порождающий эту раскраску, причем гиперэллиптические инволюции в \mathbb{Z}_2^4 взаимно однозначно соответствуют таким подкомплексам. Из этого достаточно проверять возможность построить такой гамильтонов подкомплекс для данного многогранника P . И так как по комплексу $\mathcal{C}(Q, c)$ можно построить определяющий набор двумерных $\hat{\mathcal{F}}$, в который двумерная грань многогранника P включается каждый раз, когда одновременно принадлежит гиперграням одного цвета и обратно, по определяющему набору можно построить комплекс, то в данной работе рассматриваются требования, накладываемые на $\hat{\mathcal{F}}$. Опираясь на результаты Н.Ю. Ероховца, было доказано следующее утверждение:

Лемма 1. *Дизъюнктный набор $\hat{\mathcal{F}}$ двумерных многогранника P определяет некоторый собственный гамильтонов $\mathcal{C}(4, 3)$ -подкомплекс $\mathcal{C} \subset \partial P$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- 1) $\#\hat{\mathcal{F}} = t - 3$,
- 2) каждая вершина многогранника P принадлежит ровно одной грани из набора $\hat{\mathcal{F}}$,
- 3) полиэдральный граф многогранника P после удаления ребёр всех граней из $\hat{\mathcal{F}}$ остается связным.

Лемма 2. *Существует алгоритм, строящий по графу вершин-гиперграней данного многогранника P булеву формулу в КНФ, описывающую требования из предыдущей леммы на набор $\hat{\mathcal{F}}$ как на поднабор двумерных многогранника P . При этом количество переменных, размер формулы и временная сложность алгоритма имеют асимптотическую оценку $O(f_0^2)$, где f_0 — число вершин многогранника P .*

Построенный в доказательстве алгоритм был реализован в системе компьютерной алгебры Sage [2] и использован в совокупности с решателем SAT для проверки всех простых многогранников

до 9-ти гиперграней, перечисление которых было основано на результатах М. Фиршинг [3]. В итоге было найдено два комбинаторно различных многогранника, для которых построенные булевы функции могли быть выполнены. Это позволяет сформулировать основной результат:

Теорема. *Существует выпуклый простой четырёхмерный многогранник P с 9-ю гипергранями, над которым может быть построено специальное гиперэллиптическое малое накрытие $N(P, \Lambda)$.*

Для одного из найденных многогранников была подготовлена визуализация его гамильтонового $\mathcal{C}(4, 3)$ -подкомплекса [4]. Ещё два примера удалось построить на основе равноусечённых четырёхмерных куба и призмы над тетраэдром. Несмотря на то что, следуя алгоритму из [3], были проверены все многогранники до 9 гиперграней, утверждать, что 9 — наименьшее возможное значение, затруднительно, пока нет строгих результатов по этому поводу. В дальнейшем планируется построить эффективные инструменты, позволяющие ответить на данный и другие, связанные с четырёхмерными гиперэллиптическими малыми накрытиями, вопросы.

Литература

1. Erokhovets N. *Four-manifolds defined by vector-colorings of simple polytopes*// arXiv:2407.20575v1.
2. <https://www.sagemath.org/>
3. Firsching M. *The complete enumeration of 4-polytopes and 3-spheres with nine vertices*// arXiv:1803.05205v2.
4. Koretskii A. *One of the two simple 4-polytopes with minimal number of facets allowing a good coloring in three colors*// <https://www.youtube.com/watch?v=UdNZD6HjdfY> (2024).

КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ

И.А. Корлюкова¹, А.С. Кудин², Ж.И. Пантелеева³,

¹Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, факультет довузовской подготовки,
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, korlyukova@mail.ru

²Минск, Беларусь, knxd@yandex.ru

³Белорусский государственный аграрный технический университет,
Независимости 99, 220023 Минск, Беларусь, janna-85@list.ru

В 1924 году А.Я. Хинчин в своей работе [1] доказал следующую теорему.

Теорема Хинчина.

Пусть $\Psi(q)$ — монотонно убывающая функция и $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$. Для интервала $I \subset \mathbb{R}$ обозначим $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\Psi(q)}{q} \quad \text{или} \quad |qx - p| < \Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах $\frac{p}{q}$. Тогда

$$\mu \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Обобщением теоремы Хинчина на целочисленные полиномы произвольной степени является теорема Берника-Бересневича [2, 3].

Теорема Берника-Бересневича. Пусть $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция, $w \geq n - 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество действительных чисел $x \in I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < \Psi(H) H^{-w}$$

имеет бесконечное число решений. Тогда

$$\mu \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

При доказательстве теоремы существенную роль играет следующая лемма.

Лемма. Пусть целочисленные полиномы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ степени n и высоты $H(P_i) \leq Q$, $i = 1, 2$ не имеющие общих корней в \mathbb{C} , на отрезке I , $\mu I = Q^{-\eta}$, $\eta \geq 0$, удовлетворяют неравенству

$$\max_{x \in I} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau \geq 0,$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ выполняется неравенство

$$\tau + 1 + 2 \sum_{k=1}^n \max(\tau + 1 - k\eta, 0) < 2n + \delta. \quad (1)$$

В докладе мы приводим новое доказательство леммы, основанное не на уменьшение степеней полинома с помощью принципа Дирихле, а их высот [4]. Это упрощает доказательство теорем в [2, 3].

Литература

1. Khintchine A. *Einige Satze uber Kettenbruche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen* // *Mathematische Annalen*. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
2. Bernik V.I. *The exact order of approximating zero by values of integral polynomials* // *Acta Arith.* 1989. Vol. 53, No 1. P. 17–28.
3. Beresnevich V.V. *On approximation of real numbers by real algebraic numbers* // *Acta Arith.* 1999. Vol. 50, No 2. P. 97–112.
4. Берник В. И., Васильев Д. В., Пантелева Ж. И., Калоша Н. И. *Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа* // Доклады НАН Беларуси. 2023. Т. 67, № 4. С. 271–278.

БЕЛОРУССКИЕ МАТЕМАТИКИ — СОЗДАТЕЛИ КАФЕДРЫ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ М.Я. ВЫГОДСКИЙ И С.А. ЯНОВСКАЯ

И.А. Корлюкова¹, И.М. Морозова², Н. В. Шамукова²

¹Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, ул. Элизы Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, korlykova@mail.ru

²Военная академия Республики Беларусь, пр-т Независимости, 220, 220057 Минск, Беларусь, inna.morozova@tut.by, shamukova_n@mail.ru

Кафедра истории математики в Московском государственном университете была создана в начале 30-х годов XX века. У её истоков стояли С.А. Яновская и М. Я. Выгодский.

Марк Яковлевич Выгодский родился в 1898 году в Минске. В 1916 году успешно окончил гимназию и поступил на физико-математический факультет Варшавского университета. В годы Первой мировой войны многие высшие учебные заведения западных губерний Российской империи были эвакуированы на восток. Варшавский университет временно разместился в Ростове-на-Дону. Там М.Я. Выгодский стал учеником Д.Д. Мордухай-Болтовского – известного математика, исследователя истории математики и философии. Именно он повлиял на развитие интереса Марка Яковлевича к геометрии и истории математики. В 1926 году Марка Яковлевич поступил в аспирантуру Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета. Его научным руководителем стал легендарный О. Ю. Шмидт – выходец из Беларуси, который кроме курса алгебры вёл курс истории естествознания, включавший лекции по истории математики [1].

После окончания аспирантуры М. Я. Выгодский продолжил работу в Московском университете. Здесь судьба свела его с единомышленниками – С.А. Яновской, также уроженкой Беларуси, и А.П. Юшкевичем. В 1933 году они организовали семинар по истории математики, который впоследствии стал ядром советской историко-математической школы. Первой историко-математической публикацией М. Я. Выгодского была статья «Платон как математик», опубликованная в «Вестнике Коммунистической академии» в 1926 году. В 1929 году во втором номере журнала «Естествознание и марксизм» учёный опубликовал работу «Понятие числа в его развитии». В 1930 году на I Всесоюзном съезде математиков в Харькове, проходившем под председательством О.Ю. Шмидта, Марк

Яковлевич изложил в докладе программу исследования истории математики. В ней он выделил несколько стоявших перед учёными задач – установление связей между историей математики и историей культуры, конструирование «исторической интерполяции» в процессе развития математики в тех случаях, когда наука не располагает достаточным фактическим материалом.

Во второй половине 30-х годов XX века Выгодский обратился к изучению математики Древнего Вавилона. Эта тема стала предметом его докторской диссертации, которую учёный защитил в 1940 году и опубликовал в «Успехах математических наук» (1940–1941). Анализируя клинописные тексты, Марк Яковлевич создал картину развития вавилонской математики, питаемой задачами, возникавшими в хозяйственной жизни древних государств. Цикл исследований он подытожил в монографии «Арифметика и алгебра в Древнем мире», опубликованной в 1941 году. Большая часть тиража книги погибла в блокадном Ленинграде. В конце жизни Выгодский работал над вторым изданием этой монографии, которое вышло уже после его смерти – в 1967 году. Кроме того, в 1959 году в XII выпуске «Историко-математических исследований» была опубликована его статья «Происхождение знака нуля в вавилонской нумерации».

Большой интерес у Выгодского вызывали «Начала» Евклида, переводом которых занялся его учитель Д. Д. Мордухай-Болтовской. В 1948–1950 годах перевод был издан под редакцией Марка Яковлевича. В первом выпуске «Историко-математических исследований» появилась его статья «Начала Евклида», в которой учёный связывал содержание евклидова труда с философской ориентацией великого автора.

В 1948 году увидел свет уже упомянутый выше первый выпуск «Историко-математических исследований», опубликованный Гостехиздатом под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. Наряду со статьями П. С. Александрова, Б. В. Гнеденко, В. В. Степанова, А. П. Юшкевича, посвящёнными развитию математики в МГУ, была опубликована статья М. Я. Выгодского «Математика и её деятели в Московском университете во второй половине XIX века». Эта работа положила начало исследованию проблемы развития математики в стране в XIX–XX веках. М. Я. Выгодский был талантливым педагогом, который умело сочетал историко-математическую составляющую и содержательную часть учебного материала. Характерной чертой его курсов, учебников и справочников была насыщенность историческими комментариями. Как считал Выгодский, правильное использование исторических сведений в педагогической практике служит формированию у учащихся представлений о связи изучаемой теории с жизненной практикой.

В знаменитых справочниках Выгодского – «Справочник по элементарной математике» (первое издание – в 1941 году) и «Справочник по высшей математике» (первое издание – в 1956 году) – сведения по истории математики присутствуют и выполняют определённые функции. Эти справочники, выдержавшие большое число изданий и переведённые на многие языки, являются, как писал известный советский историк математики Б. А. Розенфельд, «не простыми справочниками, а учебными пособиями нового типа, очень полезными при самостоятельном изучении математики».

Софья Александровна Яновская (в девичестве Неймарк) родилась 31 января 1896 г. в Беларуси, в городе Пружаны. В 1914 году окончила с золотой медалью 2-ю женскую гимназию и поступила на естественное отделение Высших женских курсов при Новороссийском университете. Во время учебы большое влияние на формирование ее интересов оказал видный историк математики, профессор И. Ю. Тимченко и известный специалист по логике и основаниям математики, профессор С. О. Шатуновский.

В 1924 году С.А. Яновская поступает в Москве на естественное отделение Института красной профессуры (ИКП), где она продолжила заниматься математикой. Параллельно она посещает семинары почетного члена АН СССР, президента «Московского математического общества» Д. Ф. Егорова и член-корреспондента АН СССР В. В. Степанова в Московском университете. В 1925 г. С.А. Яновская начинает руководить семинаром для студентов и аспирантов по методологии математики и естествознания в МГУ.

За год до окончания ИКП С.А. Яновская опубликовала свою первую работу «Категории количества Гегеля и сущность математики» (1928). Эта статья открыла большой цикл работ историко-методологического характера, и по окончании ИКП (в 1929 г.) Софья Александровна

определила свои научные интересы четко: ее привлекли к себе проблемы методологии математики и ее истории. Для работ С. А. Яновской по истории математики, охватывающих обширный круг вопросов, характерен неизменный интерес к узловым методологическим проблемам. В качестве примера можно привести ее книгу о научном мировоззрении Н. И. Лобачевского (1950) и статью «Из истории аксиоматики» (1958). Развитию историко-математических исследований в Советском Союзе С. А. Яновская содействовала не только своими научными трудами, но и прежде всего огромной педагогической работой, которую она вела в Московском университете. Здесь она вместе с М. Я. Выгодским вновь поставили чтение курса истории математики. Этот курс был основан В. В. Бобыниным (1849—1919) – российским ученым, историком математики, профессором Московского университета, одним из авторов Энциклопедического словаря Брокгауза и Ефрона. Большое значение имела организация в 1935 г. специального семинара по истории математики, которым долгие годы руководила С. А. Яновская вместе с М. Я. Выгодским [2]. Много сил отдала С. А. Яновская и организации преподавания математической логики на механико-математическом факультете МГУ С.А. Яновская имеет прямое отношение к развитию истории математики в Беларуси. Так ее непосредственным учеником был известный белорусский ученый и педагог Алексей Адамович Гусак. Историю математического образования в Беларуси можно найти в книге Н. Д. Беспмятных [3].

Литература

1. Демидов С. С., Петрова С. С., Токарева Т. А. *Марк Яковлевич Выгодский — математик, историк математики и педагог (к 50-летию со дня смерти)* // Чебышевский сб. 2015. Т. 16. Вып. 4. С. 319–346.
2. Яновская С. А., Лихолетов И. И. *Из истории преподавания математики в Московском университете (1804–1860 гг.)* // Истор.-матем. исслед. 1955. Вып. 8. С. 127–480.
3. Беспмятных Н. Д. *Математическое образование в Белоруссии. Исторический очерк*. Минск: Высшейшая школа, 1975.

ТЕОРЕМА КЕЙСИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А.В. Костин

Елабужский институт Казанского федерального университета, Казанская 89, 423600 Елабуга, Россия,
{kostin_andrei}@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается теорема Кейси и ее аналоги и обобщения в пространствах постоянной кривизны. Наряду с этими теоремами естественно рассматривать преобразования Лагерра, сохраняющие соотношения такого типа.

Теоремы типа Кейси. Теорема Кейси является обобщение теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике. В теореме Кейси вершины вписанного в окружность S четырехугольника заменяются на окружности, касающиеся окружности S , а длины сторон и диагоналей – на длины отрезков общих касательных к соответствующим окружностям. Теореме Кейси и ее обобщения, а также их псевдоевклидовы аналоги можно интерпретировать как теоремы о многоугольниках, вписанных в изотропные сферы пространства Минковского. Между евклидовыми и псевдоевклидовыми теоремами типа Кейси можно установить наглядные взаимосвязи. Преобразования Лагерра в разных пространствах, сохраняющие соотношения такого типа, также обладают общими наглядно интерпретируемыми свойствами. В пространстве Лобачевского у аналогов теоремы Кейси также существуют различные обобщения, как по типам линий постоянной кривизны, касающихся одной линии постоянной кривизны, так и по количеству таких линий, [1], [2]. Эти и смежные вопросы предполагается обсудить в докладе.

Литература

1. Костин А. В. *Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского* // Сибирские электронные матем. известия. 2022. Т. 19, № 2. С. 404–414.
2. Kostin A. V. *On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane* // Siberian Mathematical Journal. 2024. Vol. 65. P. 695–702.

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ f -СТРУКТУР НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

В.Н. Куница

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, vikakunica@gmail.com

f -структура на гладком многообразии M , являющаяся обобщением почти комплексной и почти контактной структур, задается соотношением $f^3 + f = 0$. f -структура называется метрической относительно римановой метрики g на (M, g) , если $g(f(X), Y) + g(X, f(Y)) = 0$ для любых двух гладких векторных полей X, Y на гладком многообразии M [1].

Пусть $\mathfrak{X}(M)$ - модуль гладких векторных полей на M . $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{L} = \text{Im} f$ и $\mathfrak{M} = \text{Ker} f$ - взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют первым и вторым фундаментальным распределением f -структуры соответственно. Ясно, что эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = \text{id} + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения \mathfrak{L} и \mathfrak{M} соответственно. f -структура является интегрируемой тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса $N(X, Y) = [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY] + f^2[X, Y]$ равен нулю, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ [2]. Если распределение \mathfrak{L} интегрируемо и, более того, если почти комплексная структура f' , индуцируемая полем f на каждом интегральном многообразии распределения \mathfrak{L} , интегрируема, то будем говорить, что f -структура частично интегрируема. Критерием частичной интегрируемости является равенство: $N[fX, fY] = 0$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ [2].

В данной работе рассмотрен вопрос интегрируемости и частичной интегрируемости всех (с точностью до знака) базовых левоинвариантных метрических f -структур ранга два на четырехмерной группе осциллятора [3]. Алгебра Ли группы Ли осциллятора задается следующими коммутаторными соотношениями: $[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2$.

f -структуры, рассмотренные в работе, имеют следующий вид:

1. $f_1(e_1) = f_1(e_4) = 0, f_1(e_2) = -e_3, f_1(e_3) = e_2$.
2. $f_2(e_1) = f_2(e_2) = 0, f_2(e_3) = -e_4, f_2(e_4) = e_3$.
3. $f_3(e_2) = f_3(e_4) = 0, f_3(e_1) = -e_3, f_3(e_3) = e_1$.
4. $f_4(e_2) = f_4(e_3) = 0, f_4(e_1) = -e_4, f_4(e_4) = e_1$.
5. $f_5(e_1) = f_5(e_3) = 0, f_5(e_2) = -e_4, f_5(e_4) = e_2$.
6. $f_6(e_3) = f_6(e_4) = 0, f_6(e_1) = -e_2, f_6(e_2) = e_1$.

Ни одна из данных f -структур не является интегрируемой, однако f_3, f_4, f_6 - частично интегрируемые f -структуры.

Данный результат удалось обобщить следующим образом:

Теорема. Пусть на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой g задана левоинвариантная метрическая f -структура. Если образ данной f -структуры имеет размерность n и $n - 1$ вектор из образа принадлежит центру соответствующей алгебры Ли, тогда данная f -структура является частично интегрируемой.

Литература

1. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. М.: МПГУ, 2003.
2. Яно К., Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях*. М.: Наука, 1990.
3. Biggs R., Remsing C. C. *Some remarks on the oscillator group* // *Differential Geometry and its Applications*. 2014. Vol. 35. P. 199–209.

КОММУТАТИВНЫЕ КОНСЕРВАТИВНЫЕ НОМ-АЛГЕБРЫ И ИХ СВЯЗЬ С ЙОРДОНОВЫМИ НОМ-АЛГЕБРАМИ

А.В. Кухарев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
пр-т Московский 33, 210038 Витебск, Беларусь, kukharev.av@mail.ru

Консервативные алгебры были введены И. Кантором в рамках изучения обобщений йордановых алгебр [1]. Известно, что все йордановы и ассоциативные алгебры, а также алгебры Ли, алгебры Лейбница и алгебры Зинбеля являются консервативными (см. [2]).

Напомним определение консервативных алгебр. Следуя Кантору, определим произведение $[B, C]$ билинейного отображения B и линейного отображения C , заданных на векторном пространстве V , следующим образом:

$$[C, B](x, y) = C(B(x, y)) - B(C(x), y) - B(x, C(y))$$

для любых $x, y \in V$.

Тогда алгебра A с умножением $B : A \times A \rightarrow A$ называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* на том же пространстве A такое, что для любых $a, b \in A$

$$[L_b, [L_a, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B], \quad (1)$$

где $L_a(x) := B(a, x)$ — оператор левого умножения.

Из конструкции Кантора–Кехера–Титса следует, что алгебра A с умножением $B : A \times A \rightarrow A$ является йордановой, если и только если A является коммутативной консервативной алгеброй с ассоциированным умножением $B^* = B$.

Целью настоящей работы является установление аналогичной связи между йордановыми и консервативными Ном-алгебрами.

Напомним, что *Ном-алгебра* — это тройка (A, \cdot, α) , состоящая из линейного пространства A , билинейного отображения $\cdot : A \times A \rightarrow A$ и линейного отображения $\alpha : A \rightarrow A$, такой, что $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ [3]. Будем говорить, что Ном-алгебра (A, \cdot, α) коммутативна, если $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$.

Ном-алгебру (A, \cdot, α) будем называть *консервативной*, если существует другое билинейное отображение $*$: $A \times A \rightarrow A$, такое, что $\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$, и для любых $a, b, x, y \in A$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \alpha^2(b) \cdot (\alpha(a) \cdot (x \cdot y)) - (a \cdot x) \cdot \alpha(y) - \alpha(x) \cdot (a \cdot y) - \\ & - \alpha^2(a) \cdot ((b \cdot x) \cdot \alpha(y)) + (\alpha(a) \cdot (b \cdot x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha(b \cdot x) \cdot \alpha(a \cdot y) - \\ & - \alpha^2(a) \cdot (\alpha(x) \cdot (b \cdot y)) + \alpha(a \cdot x) \cdot \alpha(b \cdot y) + \alpha^2(x) \cdot (\alpha(a) \cdot (b \cdot y)) = \\ & = -\alpha(a * b) \cdot \alpha(x \cdot y) + ((a * b) \cdot \alpha(x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha^2(x) \cdot ((a * b) \cdot \alpha(y)). \end{aligned} \quad (2)$$

Легко проверить, что в случае тождественного отображения $\alpha = \text{id}$ равенство (2) эквивалентно равенству (1), где $B(a, b) = a \cdot b$ и $B^*(a, b) = a * b$. Иными словами, Ном-алгебра (A, \cdot, id) консервативна, если и только если алгебра A с умножением \cdot консервативна.

Консервативную Ном-алгебру, в которой ассоциированное умножение совпадает с исходным (то есть $a * b = a \cdot b$ для всех $a, b \in A$), будем называть *сильно консервативной* Ном-алгеброй.

Ном-алгебра (A, \cdot, α) называется *йордановой*, если:

- 1) она коммутативна;
- 2) $\alpha^2(x) \cdot (x^2 \cdot \alpha(y)) = \alpha(x^2) \cdot \alpha(x \cdot y)$ для любых $x, y \in A$.

Основной результат представлен следующем утверждении.

Теорема. *Ном-алгебра (A, \cdot, α) является йордановой, если только если (A, \cdot, α) является коммутативной сильно консервативной Ном-алгеброй.*

Литература

1. Кантор И. Л. *Некоторые обобщения йордановых алгебр* // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Т. 16. С. 407–499.
2. Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Yu. *Conservative algebras of 2-dimensional algebras* // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 486. P. 255–274.
3. Makhlof A., Silvestrov S. *Hom-algebra Structures* // Journal of Generalized Lie Theory and Applications. 2008. Vol. 2, No 2. P. 51–64.

АКСИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГРУППЫ

А.С. Мамонтов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия
andreismamontov@gmail.com

Аксиальной алгеброй называют (неассоциативную) коммутативную алгебру, порожденную множеством осей. Идемпотент a называется осью, если присоединенный линейный оператор $ad(a)$ полупрост и умножение соответствующих собственных векторов контролируется некоторой таблицей слияния. Алгебра, имеющая следующую таблицу слияния, называется аксиальной алгеброй йорданова типа $(\eta \neq 1, 0)$:

*	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	1,0

Таблица 5. Закон слияния $\mathcal{J}(\eta)$

Это означает, что собственные значения $ad(a)$ равны 1, 0 или η , а, например, произведение двух собственных векторов с собственным значением η лежит в прямой сумме собственных подпространств для 0 и 1. Отметим, что при $\eta = \frac{1}{2}$ такую таблицу слияния также имеют йордановы алгебры, порожденные идемпотентами, в силу разложения Пирса.

Пусть теперь η — произвольный параметр, отличный от 0 и 1; F — поле характеристики, отличной от 2, и G — группа 3-транспозиций. Последнее означает, что G порождается нормальным множеством D инволюций (т.е. элементов порядка 2) таким, что для любых $x, y \in D$ порядок $|xy| \leq 3$. Рассмотрим векторное пространство A с формальным базисом D над полем F , зададим на различных элементах $x, y \in D$ умножение следующим правилом: xy равно 0 если $|xy| = 2$ и $\frac{\eta}{2}(x + y - x^y)$ если $|xy| = 3$; продолжим умножение по линейности на A так, чтобы элементы из D были идемпотентами. Получившаяся алгебра называется алгеброй Мацуо. Она является аксиальной алгеброй йорданова типа.

В докладе будут представлены результаты о двойных осях, соответствующих 6-транспозициям, а также результаты о группах 6-транспозиций.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект 23-41-10003, <https://rscf.ru/en/project/23-41-10003/>

О МОДУЛЯРНОМ РАЗДЕЛЕНИИ СЕКРЕТА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

Г.В. Матвеев¹, И.О. Говорушко², В.И. Янчевский²¹Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, matveev@bsu.by²Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
govorushko88@gmail.com, yanch@im.bas-net.by

В настоящее время разработаны модулярные схемы разделения секрета, обладающие свойствами совершенности, идеальности, верифицируемости, пригодности для реализации непороговых структур доступа ([1], [2], [3]). Схем разделения секрета, удовлетворяющих всем известным критериям качества, ещё нет. Вот почему построение новых схем, основанных на принципиально иной алгебраической базе, представляет определённый интерес.

Нашей целью является построение модулярной схемы разделения секрета в специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{Z})$, т. е. группе целочисленных 2×2 -матриц с определителем, равным 1. Эта группа тесно связана с исследованиями по модулярным функциям. Мы хотим найти в этой группе всё необходимое для построения модулярных схем подобно тому, как это происходит в кольце целых чисел \mathbb{Z} . В качестве аналога кольца \mathbb{Z} берётся группа $SL_2(\mathbb{Z})$, а в качестве модуля m главная конгруэнц-подгруппа по модулю m :

$$\Gamma(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m} \right\}.$$

Здесь и далее сравнимость матриц по модулю m понимают как поэлементную.

Известно, что подгруппа $\Gamma(m)$ является нормальной подгруппой группы $SL_2(\mathbb{Z})$, а её индекс находится по формуле

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(m)] = m^3 \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

где p — простые делители m .

Главная конгруэнц-подгруппа $\Gamma(m)$ действует правыми сдвигами на группе $SL_2(\mathbb{Z})$. Система представителей соответствующих орбит называется фундаментальной областью этого действия.

Для реализации пороговой модулярной схемы в группе $SL_2(\mathbb{Z})$ нужно получить явное описание фундаментальной области относительно подгруппы $\Gamma(m)$, что является аналогом полной системы вычетов по модулю m в кольце \mathbb{Z} . Это можно было бы сделать с помощью техники подъёма (лифтинга), поскольку канонический гомоморфизм $\varphi_m : SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ является сюръективным. Однако эта задача пока решена не в полной мере.

Нам удалось построить значительную часть этой области. И этого оказалось достаточно для наших целей.

Прежде всего имеем:

$$\varepsilon\varepsilon' \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow \varepsilon\varepsilon' = 1 + km \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & k \\ m & \varepsilon' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m),$$

где

$$\Gamma_0(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{m} \right\}.$$

Таких матриц имеется ровно $\varphi(m)$, так как каждый элемент группы \mathbb{Z}_m^* (как и всякой иной) имеет ровно один обратный. Все такие пары $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1), (\varepsilon_2, \varepsilon'_2), \dots, (\varepsilon_{\varphi(m)}, \varepsilon'_{\varphi(m)})$ попарно несравнимы по модулю m , а их элементы пробегают приведенную систему вычетов по модулю m . Образум из

i -мерных граней, n – размерность многогранника). В случае многогранников Гельфанда–Цетлина найдено рекуррентное соотношение на f -вектор, см. [3].

В случае произвольных мечено-порядковых многогранников возможен подход, основанный на описании решётки граней $O(P_+)$, которое дал К. Пегель [4]. Мы предлагаем альтернативный подход. Обобщая триангуляцию $O(P)$ из [1], мы получаем *кубо-симплициальное подразбиение* $K(P)$ для $O(P_+)$ (каждый элемент этого подразбиения является произведением симплексов; каждый элемент входит в $K(P)$ вместе со всеми гранями; пересечение любых двух элементов подразбиения либо пусто, либо является гранью каждого из них). Подразбиение $K(P)$ описывается в терминах частично-упорядоченного множества P , точнее каждый элемент соответствует некоторой цепи вложенных идеалов P . Пользуясь построенным подразбиением, мы определяем некоторый коцепной комплекс и доказываем, что размерности групп когомологий этого комплекса (над \mathbb{Z}_2) совпадают с компонентами f -вектора многогранника $O(P_+)$, получая, таким образом, некоторый новый способ вычисления f -вектора.

Литература

1. Stanley R. P. *Two Poset Polytopes* // Discrete Comput. Geom. 1986. Vol. 1, P. 9–23.
2. Ardila F., Bliem T., Salazar D. *Gelfand-Tsetlin polytopes and Feigin-Fourier-Littelmann-Vinberg polytopes as marked poset polytopes* // J. Combin.Theory Ser. A. 2011. Vol. 118, No 8, P. 2454–2462.
3. Мелихова Е. В. *О числе граней многогранников Гельфанда–Цетлина* // Алгебра и анализ 2021. Т. 33, № 3. С. 169–190.
4. Pegel C. *The Face Structure and Geometry of Marked Order Polyhedra* // Order. 2018. Vol. 35, P. 467–488.

СВЯЗНОСТИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, П. Бровки 6, 220013, Минск, Беларусь, mozheynatalya@mail.ru

Если на гладком четномерном многообразии задана невырожденная 2-форма, то такая форма называется почти симплектической структурой, а многообразие в этом случае называется почти симплектическим, для замкнутой формы многообразия, соответственно, называют симплектическим. Симплектические структуры играют важную роль в таких областях физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др. Предположение о невырожденности тензора структуры связано с уравнениями У.Р. Гамильтона, симплектическая геометрия упрощает формальный аппарат гамильтоновой динамики и вариационного исчисления. Широко известны приложения симплектической геометрии в небесной механике и динамике твердого тела, где фазовые пространства интегрируемых гамильтоновых систем являются симплектическими многообразиями (см., например, [1]). Случай почти симплектических структур также содержателен и интересен во многих отношениях, в частности, при описании гамильтоновых векторных полей на почти симплектических многообразиях (см., например, [2]).

Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. “Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках “кривого” пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике” [3]. Также связности – важнейший объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля. Рассмотрим проблему классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и нахождения инвариантных связностей на таких пространствах.

Пусть (\bar{G}, M) – четырехмерное однородное пространство, где \bar{G} – группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $x \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_x$ ее стабилизатор. Поставим

в соответствие (\bar{G}, M) пару (\bar{g}, \mathfrak{g}) алгебр Ли, где \bar{g} – алгебра Ли группы \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра в \bar{g} , соответствующая подгруппе G . Изотропный \mathfrak{g} -модуль \mathfrak{m} – это \mathfrak{g} -модуль \bar{g}/\mathfrak{g} такой, что $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является изотропным представлением пары (\bar{g}, \mathfrak{g}) . Пара (\bar{g}, \mathfrak{g}) называется изотропно-точной, если ее изотропное представление – инъекция. Назовем пару (\bar{g}, \mathfrak{g}) эффективной, если подалгебра \mathfrak{g} не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли \bar{g} . Проблема классификации однородных пространств (\bar{G}, M) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) таких, что $G \subset \bar{G}$ (см., например, [4]). Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли (\bar{g}, \mathfrak{g}) с точностью до эквивалентности пар [5].

Пространство $V(\mathfrak{m})$ билинейных форм на \mathfrak{m} естественным образом становится \mathfrak{g} -модулем, если положить $(x \cdot b)(v_1, v_2) = -b(x \cdot v_1, v_2) - b(v_1, x \cdot v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in V(\mathfrak{m})$. Почти симплектической структурой на \mathfrak{g} -модуле \mathfrak{m} называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in V(\mathfrak{m})$ такая, что $x \cdot b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли \mathfrak{g} является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, P)$, $P = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} .

Решение проблемы классификации изотропно-точных пар разобьем на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр \mathfrak{g} алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, P)$, для каждой найденной подалгебры \mathfrak{g} – классификация (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар (\bar{g}, \mathfrak{g}) , у которых изотропное представление сопряжено подалгебре \mathfrak{g} . Алгоритм нахождения почти симплектических изотропно-точных пар подробнее описан в работе [6], там же даны основные определения и приведено обоснование применяемых методов.

Аффинной связностью на паре (\bar{g}, \mathfrak{g}) называется такое отображение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (\bar{G}, M) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре (\bar{g}, \mathfrak{g}) (см., например, [7]). Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, а тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ – вид $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{g}$. Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности Λ на паре (\bar{g}, \mathfrak{g}) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, P)$ вида $V + [\Lambda(\bar{g}), V] + [\Lambda(\bar{g}), [\Lambda(\bar{g}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{g}\}$. Тензор Риччи Ric имеет, соответственно, вид $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Аффинная связность называется почти симплектической, если она равна нулю на 2-форме. Связности, совместимые с симплектической структурой, находят применение в теоретической физике, в геометрической теории интегрируемых гамильтоновых систем и других областях современной науки.

Проведено локальное описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств и инвариантных аффинных связностей на таких пространствах, их тензоров кривизны, кручения, алгебр голономии, тензоров Риччи.

Литература

1. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1974.
2. Vaisman I. *Hamiltonian vector fields on almost symplectic manifolds* // Journal of Mathematical Physics, 2013. Vol. 54, No 9. Art. 092902.
3. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундамент. направл. М.: ВИНТИ АН СССР, 1988. Т. 28. С. 5–297.
4. Онищик А. Л. *Топология транзитивных групп Ли преобразований*. М.: Физ.-мат. лит., 1995.
5. Mostow G. D. *The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces* // Ann. Math., 1950. Vol. 52:3. P. 606–636.
6. Можей Н. П. *Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай* // Труды БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информ. Минск: БГТУ, 2021. № 1 (242). С. 13–18.
7. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. Journ. Math., 1954. Vol. 76., No 1. P. 33–65.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБМОДУЛЯРНЫМИ CP -ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов, И.Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,
victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы.

Примарным элементом группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP -подгруппой. Каждая неединичная группа содержит CP -подгруппы и способ их вложения во многом определяет строение всей группы. Так, группа дедекиндова (т. е. каждая подгруппа в группе нормальна) тогда и только тогда, когда каждая CP -подгруппа в группе нормальна. Группа нильпотентна в том и только в том случае, когда все CP -подгруппы субнормальны в группе. Известны также признаки сверхразрешимости группы с ограничениями на CP -подгруппы [1–4].

Хорошо известно, что множество всех подгрупп группы G , частично упорядоченное по включению, является решеткой. Такую решетку обозначают через $\mathfrak{L}(G)$. Подгруппа называется модулярной, если она является модулярным элементом решетки $\mathfrak{L}(G)$, [5]. Модулярность не обладает транзитивностью. Так, в знакопеременной группе A_4 степени 4 подгруппа порядка 2 модулярна в силовской 2-подгруппе, которая в свою очередь модулярна в группе A_4 , но C_2 не модулярна в A_4 . В работе [6] описано строение групп, в которых модулярность транзитивна.

Естественным расширением понятия модулярности является понятие субмодулярности: подгруппа H группы G называется субмодулярной в G , если в группе G существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq \dots \leq H_i \leq H_{i+1} \leq \dots \leq H_n = G$$

такая, что H_i модулярна в H_{i+1} для каждого i , [7]. Класс групп, в которых субмодулярны все CP -подгруппы, будем обозначать через \mathfrak{C} . Установлены следующие характеристики класса \mathfrak{C} .

Теорема. Пусть G — конечная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Каждая CP -подгруппа группы G субмодулярна в G , т. е. $G \in \mathfrak{C}$.
- (2) Каждая CP -подгруппа в $G/\Phi(G)$ субмодулярна и имеет простой порядок.
- (3) $A/\Phi(A) \in \mathfrak{U}_1$ для каждой подгруппы A с нильпотентным коммутантом.
- (4) $B/\Phi(B) \in \mathfrak{U}_1$ для каждой бипримарной подгруппы B с циклической силовской подгруппой.

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G , \mathfrak{U}_1 — класс всех сверхразрешимых групп экспоненты свободной от квадратов.

Группы с субмодулярными силовскими подгруппами исследовались в работах [7–8]. Класс таких групп будем обозначать через \mathfrak{Z} . Поскольку каждая субнормальная подгруппа субмодулярна, то класс \mathfrak{C} является расширением класса \mathfrak{Z} , но не совпадает с ним. Действительно, в группе $GL(3, 7)$ существует неабелева подгруппа Q порядка 3^3 и экспоненты 3, которая неприводимо действует на элементарную абелеву группу P порядка 7^3 . Полупрямое произведение $G = P \rtimes Q$ является минимальной несверхразрешимой группой и $G \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{Z}$. Связь между классами \mathfrak{Z} и \mathfrak{C} устанавливает

Следствие. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{NA} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{NA}_1$.

Здесь \mathfrak{NA} — класс всех групп, силовские подгруппы в фактор-группе по подгруппе Фиттинга которых абелевы, \mathfrak{NA}_1 — класс всех групп, силовские подгруппы в фактор-группе по подгруппе Фиттинга которых элементарны абелевы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237).

Литература

1. Monakhov V. S., Kniachina V. N. *Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups* // Ricerche Mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
2. Монахов В. С. *Конечные группы с абнормальными и \mathfrak{U} -субнормальными подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
3. Монахов В. С. *О трех формациях над \mathfrak{U}* // Матем. заметки. 2021. Т. 110, Вып. 3. С. 358–367.

4. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. *О конечных группах с \mathbb{P}_π -субнормальными подгруппами* // Матем. заметки. 2023. Т. 114, Вып. 4, С. 483–496.
5. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*. Berlin, New York: De Gruyter, 1996.
6. Liu A. M., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. *Finite groups in which modularity is a transitive relation* // Arch. Math. 2023. Vol. 121. P. 111–121.
7. Zimmermann I. *Submodular subgroups in finite groups* // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.
8. Васильев А. В. *Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.

О МАКСИМАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛУГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, пр-т Московский 33, 210038, Витебск, Беларусь,
michaelnaumik@yandex.by

Продолжается изучение полугруппы линейных отношений [1, 2].

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем локальной.

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем F .

Рассмотрим в пространстве V цепь подпространств:

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{n-1} \supset V_n = \{0\}. \quad (1)$$

Будем говорить, что линейное отношение $a \in LR(V, F)$ аннулирует цепь (1), если оно аннулирует все факторы этой цепи, т.е. $V_i a \subseteq V_{i+1}$ или $a(V_i/V_{i+1}) = 0$.

Множество всех линейных отношений, аннулирующих цепь (1), назовем аннулятором цепи (1).

Теорема. Пусть $S \subseteq LR(V, F)$, где F – поле характеристики 0. Множество S тогда и только тогда является максимальной локальной полугруппой, когда $S = G \cup N$ и существует разложение

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n,$$

для которого

1) $G = G_1 \dot{+} \dots \dot{+} G_n$, где $G_i = G[V_i]$ – максимальная неприводимая периодическая подгруппа из $GL(V_i, F)$;

2) N – аннулятор цепи $V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n = \{0\}$, где $V_{i-1} = V_i \oplus \dots \oplus V_n$.

Этот результат обобщает один из фактов работы [3].

Литература

1. Маклейн С. *Алгебра аддитивных отношений* // Сб. переводов. Математика. 1963. № 7:6. С. 1–12.
2. Наумик М. И. *Полугруппа линейных отношений* // Доклады НАН Белоруси. 2004. Т. 48, № 3. С. 34–37.
3. Коряков И. О. *Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами* // Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. 1987. С. 72–80.

σ_Ω -СВОБОДНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.С. Нестеров, М.М. Сорокина

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского,
Бежицкая 14, 241036 Брянск, Россия, a.s.nest, mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. В теории классов конечных групп центральное место занимают локальные (В. Гашюц, 1963) и композиционные (Л.А. Шеметков, 1978) формации (см., например, [1]), естественным обобщением которых являются, соответственно, ω -локальные (Л.А. Шеметков, 1984) и \mathfrak{L} -композиционные (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков, 1999) формации, где ω — непустое подмножество множества \mathbb{P} всех простых чисел, \mathfrak{L} — непустой подкласс класса \mathfrak{S} всех простых групп. Данные формации были построены с использованием функционального подхода (В. Гашюц, 1963), предполагающего использование специальных функций, называемых спутниками (в терминологии [1], экранами). В 1999 году В.А. Ведерников ввел в рассмотрение концепцию веерности и расслоенности для формаций, основанную на использовании, наряду с функциями-спутниками, еще одной функции — функции-направления. Данная концепция позволила построить бесконечные серии новых видов формаций — серию ω -веерных и серию Ω -расслоенных формаций (см., например, [2]), в которые вошли ω -локальные и \mathfrak{L} -композиционные (при $\Omega = \mathfrak{L}$) формации соответственно.

Начиная с 2013 года, в цикле статей А.Н. Скиба для произвольного разбиения σ множества \mathbb{P} разработал σ -теорию конечных групп (см., например, [3]), получившую в дальнейшем интенсивное развитие. В частности, методы данной теории были применены к построению, а также изучению строения и свойств функций-спутников σ -локальных (А.Н. Скиба, 2017), Бэра σ -локальных (В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба, 2019), $\bar{\omega}$ -веерных (М.М. Сорокина, А.А. Горепекина, 2021) формаций конечных групп, σ -локальных (В. Го, Ли Чжан, Н.Т. Воробьев, 2020), $\omega\sigma$ -веерных и $\Omega\xi$ -расслоенных (О.В. Камозина, 2020) классов Фиттинга конечных групп, σ_Ω -расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T -групп (Е.Н. Бажанова, 2023). Развивая понятие Ω -расслоенной формации конечных групп, авторами были построены σ_Ω -расслоенные формации, где σ_Ω — произвольное разбиение класса Ω . Одним из видов σ_Ω -расслоенных формаций являются σ_Ω -свободные формации. В теоремах 1–3 установлен ряд свойств σ_Ω -свободных формаций.

Используемые обозначения и определения стандартны (см., например, [1]). Класс групп \mathfrak{F} называется формацией (классом Фиттинга), если \mathfrak{F} замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений (относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп). Для непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа группы G .

Пусть \mathfrak{G} — класс всех конечных групп, \mathfrak{S} — класс всех простых групп. Через $K(G)$ обозначается класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$.

Следуя [4], для любого непустого подкласса Δ класса \mathfrak{S} будем полагать: $\mathfrak{G}_\Delta = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \Delta)$; $\mathfrak{G}'_\Delta = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \Delta = \emptyset)$; $O_\Delta(G)$ — \mathfrak{G}_Δ -радикал группы G .

Через Ω обозначается произвольный непустой подкласс класса \mathfrak{S} , σ_Ω — произвольное разбиение класса Ω , т.е. $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$, где Ω_i — непустой класс групп для любого $i \in I$, $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Для произвольной группы G и произвольного класса групп \mathfrak{F} полагаем $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap K(G) \neq \emptyset\}$; $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma_\Omega(G)$. Функция вида

$$\varphi : \sigma_\Omega \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\},$$

удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}'_{\Omega'_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, называется *формационно-радикальной σ_Ω -функцией* или, коротко, *σ_Ω -FR-функцией*. Функция вида

$$f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma_\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\sigma_\Omega') \neq \emptyset$, называется *формационной σ_Ω -функцией* или, коротко, *σ_Ω -F-функцией* (здесь символ σ_Ω' обозначает элемент из области определения функции f , не принадлежащий σ_Ω).

Пусть φ и f — некоторые $\sigma_\Omega FR$ -функция и $\sigma_\Omega F$ -функция соответственно. Формация вида

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)\}$$

называется σ_Ω -расслоенной формацией и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega F(f, \varphi)$. Функция f называется *спутником* (иначе, функцией-спутником) σ_Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} , а функция φ — *направлением* (иначе, функцией-направлением) σ_Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} [4].

σ_Ω -Расслоенная формация \mathfrak{F} называется σ_Ω -свободной, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{G}_{\Omega_i'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и обозначается

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega Fr(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega') \text{ и } G/O_{\Omega_i'}(G) \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)\}.$$

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — непустая неединичная формация и $\sigma_\Omega = \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$. Тогда \mathfrak{F} является σ_Ω -свободной формацией.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{F} — непустая неединичная формация. Тогда \mathfrak{F} содержится в σ_Ω -свободной формации $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega Fr(f_1)$, где f_1 — $\sigma_\Omega F$ -функция такая, что $f_1(\Omega_i) = \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Теорема 3. Пусть \mathfrak{F} — σ_Ω -свободная формация. Тогда \mathfrak{F} обладает единственным максимальным внутренним спутником h таким, что

$$h(\sigma_\Omega') = \mathfrak{F} \text{ и } h(\Omega_i) = \mathfrak{F} \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega.$$

Литература

1. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп*. М.: Наука, 1978.
2. Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // *Дискретная математика*. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
3. Skiba A. N. *On σ -subnormal and σ -permutable Subgroups of Finite Groups* // *Journal of Algebra*. 2015. Vol. 436. P. 79–82.
4. Сорокина М. М., Нестеров А. С. *О спутниках σ_Ω -расслоенных формаций* // *Дискретная математика*. 2023. Т. 36, № 1. С. 103–115.

ПОДМОДУЛИ ВЕЙЛЯ В ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП НА ПОДГРУППЫ $SL_2(K)$

А.А. Осинская

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
anna@im.bas-net.by

На проблему нахождения подмодулей Вейля в ограничениях неприводимых модулярных представлений простых алгебраических групп обратил внимание Щиголев, который в работах [1] и [2] нашел условие, при котором некоторые подмодули Вейля могут быть вложены в ограничения простых модулей специальной линейной группы. Однако пока известно очень мало о подмодулях Вейля в ограничениях даже на "малые" подгруппы. В то же время, их наличие может быть полезным при нахождении правил ветвления представлений, а также при исследовании структуры унитарных элементов в таких представлениях и распознавания представлений по наличию особых элементов.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$; G — простая односвязная алгебраическая группа над K ранга $r \geq 2$; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — базис системы корней группы G относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и подгруппы Бореля $B \supset T$; $\omega_1, \dots, \omega_r$ — соответствующие этому базису фундаментальные веса; $L(\omega)$ — неприводимый модуль группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$, в котором реализуется неприводимое представление φ ; $V(\omega)$ — модуль Вейля для веса ω ; $M|S$ — ограничение G -модуля M на подгруппу $S \subset G$. Вес ω называется p -ограниченным, если все $a_i < p$ при $1 \leq i \leq r$.

Подгруппа группы G называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами группы G , связанными с определенной подсистемой ее системы корней. Если β_1, \dots, β_s — базис такой подсистемы, обозначим эту подгруппу символом $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$. Положим $G(i_1, \dots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s})$.

Далее $H \subset G$ — подсистемная подгруппа типа A_1 . Если в системе корней группы есть корни двух разных длин, то H может соответствовать длинному или короткому корню. В таких случаях мы называем H длинной или короткой соответственно. Все подгруппы одной длины сопряжены в G . Множество весов подгруппы H может быть отождествлено со множеством целых чисел с помощью отображения $x\omega_1 \mapsto x$, а множество всех доминантных весов такой подгруппы — со множеством \mathbb{N} неотрицательных целых чисел.

Теорема 1. Пусть $G \neq F_4(K)$ — простая односвязная алгебраическая группа, ранг группы $r \geq 3$ при $G = A_r(K)$, $r \geq 4$ в остальных случаях, и вес ω является p -ограниченным. Также предположим, что подгруппа H длинная в случае $G = B_r(K)$ и короткая, когда $G = C_r(K)$. Тогда в ограничении $L(\omega)|_H$ есть все подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leq x \leq b$, где

$$b = \max\{a_i + a_j + a_k\}.$$

Здесь максимум берется по всем таким индексам i, j, k , что подгруппа $H \subset G(i, j, k) \cong A_3(K)$.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф23-050).

Литература

1. Shchigolev V. A local criterion for Weyl modules for groups of type A // Journal of Pure and Applied Algebra. 2009. Vol. 213, No 9. P. 1681–1701.
2. Shchigolev V. Weyl submodules in restrictions of simple modules // J. Algebra. 2009. Vol. 321. P. 1453–1462.

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ЗАДАННОЙ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬЮ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ПОДГРУПП

П.А. Павлушко, А.А. Трофимук

БрГУ имени А. С. Пушкина, бульвар Космонавтов 21, 224016, Брест, Беларусь
{polinapavlushko, alexander.trofimuk}@gmail.com

Введение.

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы A и B группы G называются *сс-перестановочными*, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. Напомним также, что подгруппы A и B называется *тсс-перестановочными* (тотально сс-перестановочными), если для любых $X \leq A$ и $Y \leq B$ подгруппы X и Y сс-перестановочны.

Естественное обобщение понятия тсс-перестановочных подгрупп приведено в работе [2]:

Определение. Подгруппа A группы G называется *wtсс-подгруппой* (слабой тсс-подгруппой) в G , если в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$ и подгруппа A обладает главным рядом

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_{s-1} \leq A_s = A$$

таким, что подгруппа A_i сс-перестановочна с Y_1 для любого $0 \leq i \leq s$ и произвольной подгруппы Y_1 из Y .

Кроме того, в [2] были изучены свойства wtсс-подгрупп, а также строение конечной группы, у которой сомножители, силовские и максимальные подгруппы, 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются wtсс-подгруппами.

Понятие силовайзера было введено Гашюцем в [3]. Подгруппа S группы G называется *силовайзером* p -подгруппы R в G , если S максимальная подгруппа в G , в которой R является силовской p -подгруппой. Гашюц [3] показал, что силовайзеры данной p -подгруппы в разрешимой

группе не всегда сопряжены, а также привел некоторые достаточные условия, при которых p -подгруппа имеет сопряженные p -силовайзеры.

Теорема 1. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является wtcc-подгруппой, то G p -сверхразрешима.

Если предположить, что группа не является p -разрешимой, то естественным является описание pd -композиционных факторов группы. Доказана следующая

Теорема 2. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является wtcc-подгруппой, то каждый неабелевый pd -композиционный фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;
- 4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ — простое число Ферма;
- 5) $PSL(n, q)$, $n \geq 3$ — простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- 5) A_p и $p \geq 5$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467).

Литература

1. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. *Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups* // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2005. Vol. 29. P. 493–510.
2. Trofimuk A. A. *On weakly tcc-subgroups of finite groups* // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, No 2. P. 1464–1473.
3. Gaschütz W. *Sylowisatoren* // Math. Z. 1971. Vol. 122, No 4. P. 319–320.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В.А. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия В.О., 29, 199178 Санкт-Петербург, Россия
victorapetrov@gmail.com

Пусть F — поле характеристики не 2, G — линейная алгебраическая группа над F . Под $H^1(F, G)$ мы понимаем когомологии абсолютной группы Галуа с коэффициентами в точках группы G (см. [1] для определений и свойств); это множество параметризует главные G -однородные пространства (в этальной топологии) над спектром F .

Пусть теперь H — замкнутая подгруппа G . Для заданного ξ из $H^1(F, G)$ мы говорим, что структурная группа ξ редуцируется к H , если ξ лежит в образе естественного отображения $H^1(F, H) \rightarrow H^1(F, G)$. Если P — еще одна замкнутая подгруппа G , будем говорить, что P и H когомологически трансверсальны в G , если для любого элемента из $H^1(F, G)$, структурная группа которого редуцируется и к H , и к P , верно, что структурная группа редуцируется к пересечению $H \cap P$.

Симметрическим пространством называется многообразие G/G^σ , где G — редуктивная алгебраическая группа, σ — инволюция на G , а G^σ — группа ее неподвижных точек. Ссылки на основные факты о симметрических пространствах над произвольным полем можно найти в [2].

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть G — расщепимая редуктивная алгебраическая группа, σ — инволюция на G , P — параболическая подгруппа в G такая, что $P \cap \sigma(P)$ редуктивна. Тогда P и G^σ когомологически трансверсальны в G .

В качестве приложения мы даем характеристику алгебр Ли внешнего типа E_6 , получающихся конструкцией Титса, в терминах инварианта Роста.

Литература

1. Серр Ж.-П. *Когомологии Галуа*. М.: Мир, 1968.
2. Springer T. A. *Decompositions related to symmetric varieties* // J. Algebra. 2022. Vol. 329. P. 260–273.

О НОРМАЛИЗАТОРАХ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С.В. Путилов

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского,
Бежицкая 14, 241036 Брянск, Россия, algebra.bgu@yandex.ru

G – конечная группа; $|G|$ – порядок группы G , т.е. число ее элементов; $\pi(G)$ – множество простых делителей $|G|$; G_p – силовская p -подгруппа в G , $p \in \pi(G)$; $N_G(G_p)$ – нормализатор в G силовской p -подгруппы G_p ; $|G : H|$ – индекс подгруппы H в G ; (n, m) – наибольший общий делитель натуральных чисел n и m ; Z_n – циклическая группа порядка n ; V_4 – четверная группа Клейна; $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A на B , $A \cap B = 1$.

Свойства нормализаторов силовских подгрупп вызывают большой интерес в теории конечных групп. В 1961 г. Б. Хупперт в [1] анонсировал предположение о p -нильпотентности G , в которой для любого $q \in \pi(G)$ выполняются условия $(|G : N_G(G_q)|, p) = 1$ и $N_G(G_q)$ является p -нильпотентной группой. В [2] доказана разрешимость G , если нормализатор каждой силовской подгруппы в G имеет примарный индекс. В [3] доказана 2-нильпотентность G , в которой индекс нормализатора каждой её силовской подгруппы нечетный. В [4] доказана p -нильпотентность G , при условии, что $(|G : N_G(G_q)|, p) = 1$ для любого $q \in \pi(G)$. В [5] доказана разрешимость G , если нормализатор каждой силовской подгруппы в G имеет нечетный или примарный индекс. В [6] доказана гипотеза Б. Хупперта, при $p \neq 3$ и $(|G : N_G(G_q)|, p) = 1$ для любого $q \in \pi(G)$. Если $p = 3$, то простая унитарная группа $U_3(q)$, где $q = 2^t$, t четно и не делится на 3, является контрпримером к этому утверждению. В [7] доказана разрешимость G , в которой нормализатор силовской 2-подгруппы и нормализатор силовской 3-подгруппы имеют примарный индекс. В [8] завершено исследование нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах. В [9] установлены композиционные факторы G , в которой нормализатор силовской 3-подгруппы имеет нечетный или примарный индекс. В [10–11] исследуются конечные группы, с заданными свойствами нормализаторов их силовских подгрупп.

У. Бернсайд доказал, что в конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. Значит, силовская 2-подгруппа в простой неабелевой группе не является циклической. Это порождает идею о исследовании строения G , рассматривая только свойства нормализаторов ее нециклических силовских подгрупп. Например, в группах $A = PSL_2(5) = Z_5(V_4 \rtimes Z_3)$, $B = PSL_2(11) = (V_4 \rtimes Z_3)(Z_{11} \rtimes Z_5)$ и $C = PSL_2(7) = C_2(Z_7 \rtimes Z_3)$ нециклическими являются только силовские 2-подгруппы. При этом в A , B силовские 2-подгруппы строго включаются в свои нормализаторы, а в C силовская 2-подгруппа самонормализуемая. Далее группа G называется $PSL_2(5)$ -свободной группой, если в G нет композиционных факторов изоморфных $PSL_2(5)$.

Теорема 1. *Если в простой неабелевой группе G нормализатор каждой нециклической силовской подгруппы группы G имеет примарный индекс, то $G \cong PSL_2(5)$.*

Теорема 2. *Если в $PSL_2(5)$ -свободной группе G нормализатор каждой нециклической силовской подгруппы группы G имеет примарный индекс, то G разрешима.*

Литература

1. Huppert B. *Subnormale Untergruppen und p -Sylowgruppen* // Acta Sci. Math. (Szeged). 1961. Vol. 22. P. 46–61.
2. Ведерников В. А. *О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп* // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1236–1244.

3. Кондратьев А. С. *Критерий 2-нильпотентности конечных групп* // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 82–84.
4. Zhang J. *Sylow numbers of finite groups* // J. Algebra. 1995. Vol. 176, No 1. P. 111–123.
5. Го В. *Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 295–300.
6. Chigira N. *Numbers of Sylow subgroups and p -nilpotency of finite groups* // J. Algebra. 1998. Vol. 201, No 1. P. 71–85.
7. Guo W., Shum K. P. *A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2,3-subgroups are prime power indices* // J. Appl. Algebra Discrete Struct. 2005. Vol. 3, No 1. P. 1–9.
8. Кондратьев А. С. *Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах* // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
9. Кондратьев А. С., Го В. *Конечные группы, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы* // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 344–349.
10. Путилов С. В. *Конечные группы с заданными подгруппами* // Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки. 2022. № 2 (26). С. 9–19.
11. Путилов С. В. *О нормализаторах силовских подгрупп в конечной группе* // Ученые записки Брянского государственного университета: физико-математические науки. 2022. № 4 (28). С. 7–12.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Сарвари

Московский педагогический государственный университет, Институт математики и информатики, Краснопрудная ул., 14, 107140, Москва, РФ, sarwary.asad20@gmail.com

Рассматриваются абелевы группы A , в которых существует эндоморфизм φ , такой что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi$. Примеры таких групп дают группы вида $A = B \oplus B$, где эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$ имеет вид:

$$\varphi(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, -b_1 - b_2), \quad \ker \varphi = \{(b, -b) \mid b \in B\} = \operatorname{Im} \varphi.$$

Простейшие свойства группы A , обладающей эндоморфизмом φ , таким что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi$.

- 1) Эндоморфизм φ является нильпотентным, индекса нильпотентности 2.
- 2) Если A — конечная группа, то ее порядок является квадратом натурального числа.
- 3) Если A — группа конечного ранга без кручения, то $r_0(A)$ является четным числом.

Теорема 1. Пусть A — абелева группа, тогда эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$, такой что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi$ существует, тогда и только тогда когда в группе A найдется подгруппа B , такая что $A/B \cong B$.

Абелева группа A называется элементарной p -примарной (где p — простое число), если порядок любого ненулевого элемента из A равен p , т. е. $pA = 0$. Заметим, что любая элементарная p -примарная абелева группа A является векторным пространством над полем \mathbb{Z}_p . Данное утверждение вытекает из соотношения:

$$\forall a \in A \quad \forall m, k \in \mathbb{Z} \quad ma = ka \Leftrightarrow m \equiv k \pmod{p}.$$

В связи с этим при работе с p -примарными элементарными абелевыми группами можно использовать аппарат линейной алгебры. В частности, размерность элементарной p -примарной группы A как \mathbb{Z}_p -пространства будем обозначать через $r_p(A)$ и называть p -рангом группы A .

Теорема 2. Если A — элементарная p -примарная абелева группа, то в A существует эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$, такой что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi$ тогда и только тогда, когда либо A — бесконечная группа, либо A — конечная группа четного p -ранга.

Теорема 3. Пусть A — элементарная p -примарная абелева группа p -ранга $2n$ и $\varphi: A \rightarrow A$ — эндоморфизм, такой что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi$. Тогда найдется p -базис группы A , относительно которого

матрица эндоморфизма φ имеет вид $M_\varphi = \begin{pmatrix} \bar{0} & E \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, где $\bar{0}$ — нулевая $(n \times n)$ -матрица и E — единичная $(n \times n)$ -матрица.

Далее рассмотрим конечно порожденные абелевы группы. Пусть A — конечно порожденная абелева группа, тогда $A = F \oplus K$, где $F = \bigoplus_m \mathbb{Z}$ — свободная группа конечного ранга m и K — конечная группа.

Теорема 4. Если $A = F \oplus K$ — конечно порожденная абелева группа, то эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$, такой что $\ker \varphi = \text{Im } \varphi$ существует тогда и только тогда, когда $r(F) = m = 2k$ и $|K| = n^2$.

Литература

1. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы*. Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.

ТОТАЛЬНО σ -ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ l_∞^σ -ДЛИНЫ ≤ 4

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
{in.safonova, vallik}@mail.ru

Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Необходимую терминологию и обозначения можно найти в [1–6].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — группа и \mathfrak{F} — класс групп. Тогда $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Группу G называют [1]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого i ; σ -нильпотентной, если G является прямым произведением σ -примарных групп; Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через \mathfrak{G}_{σ_i} , \mathfrak{N}_σ и \mathfrak{N}_Π обозначают класс всех σ_i -групп, класс всех σ -нильпотентных групп и класс всех σ -нильпотентных Π -групп соответственно.

Функция f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называется [2] *формационной σ -функцией*. Для всякой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то формацию \mathfrak{F} называют σ -локальной, а формационную σ -функцию f — σ -локальным определением формации \mathfrak{F} .

Всякую формацию считают 0-кратно σ -локальной. При $n > 0$, формацию \mathfrak{F} называют n -кратно σ -локальной [2], если либо $\mathfrak{F} = (1)$ — формация всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ — $(n-1)$ -кратно σ -локальная формация для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Формацию называют *тотально σ -локальной*, если она n -кратно σ -локальна при любом целом неотрицательном n .

Множество всех тотально σ -локальных формаций обозначают через l_∞^σ . Формации из l_∞^σ называют l_∞^σ -формациями.

Для всякой совокупности групп \mathfrak{M} через $l_\infty^\sigma \text{form } \mathfrak{M}$ обозначают тотально σ -локальную формацию, порожденную классом групп \mathfrak{M} , т.е. пересечение всех l_∞^σ -формаций, содержащих \mathfrak{M} . В случае, когда $\mathfrak{M} = \{G\}$ формацию $l_\infty^\sigma \text{form } G$ называют *однопорожденной l_∞^σ -формацией*.

Основные свойства n -кратно и тотально σ -локальных формаций и их решеток были получены в работах [2–5]. В частности, в работах [3, 4] показано, что множество l_n^σ всех n -кратно σ -локальных формаций образует полную алгебраическую модулярную решетку формаций, в работе [6] доказано, что множество l_∞^σ всех тотально σ -локальных формаций образует полную алгебраическую дистрибутивную решетку формаций. Последнее обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение понятие l_∞^σ -длины тотально σ -локальной формации.

Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ — тотально σ -локальные формации. Тогда следуя [6, с. 192] через $\mathfrak{F}/_\infty^\sigma \mathfrak{H}$ будем обозначать решетку всех тотально σ -локальных формаций, заключенных между \mathfrak{H} и \mathfrak{F} . В частности, если $\mathfrak{H} = (1)$ — формация всех единичных групп, то решетку $\mathfrak{F}/_\infty^\sigma(1)$ будем обозначать через $L_\infty^\sigma(\mathfrak{F})$.

Следуя [6, с. 212] l_∞^σ -длиной $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F})$ формации \mathfrak{F} будем называть длину решетки $L_\infty^\sigma(\mathfrak{F})$ и полагать $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) = n$, если длина решетки $L_\infty^\sigma(\mathfrak{F})$ конечна и равна n , и $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) = \infty$, в противном случае.

В данной работе мы изучаем тотально σ -локальные формации l_∞^σ -длины ≤ 4 .

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ для любого $j_1 \neq j_2$ из J . Если, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$, где $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1, \dots, j_t \in J$, то пишут [5, с. 171], что $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $J = \{1, \dots, t\}$).

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, где \mathfrak{F}_i — неединичная тотально σ -локальная формация конечной длины n_i . Тогда $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) = n_1 + \dots + n_t$.

Лемма 2. Тогда и только тогда \mathfrak{F} — минимальная тотально σ -локальная не σ -нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{form } G = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$, где G — не σ -примарная группа Шмидта, $i \neq j$.

Лемма 3. Пусть \mathfrak{F} — не σ -нильпотентная тотально σ -локальная формация. Тогда в \mathfrak{F} найдется по меньшей мере одна минимальная тотально σ -локальная не σ -нильпотентная подформация.

Напомним, что группой Шмидта называют минимальную ненильпотентную группу, т.е. такую ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Как известно (см., например, [7, лемма 3.2]), всякая минимальная не σ -нильпотентная группа является не σ -примарной группой Шмидта.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — тотально σ -локальная формация.

1) $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) \leq 2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{form } G$, где G σ -нильпотентная группа с $|\sigma(G)| \leq 2$.

2) $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{form } G$, где G — либо σ -нильпотентная группа с $|\sigma(G)| = 3$, либо не σ -примарная группа Шмидта.

Теорема 2. Тогда и только тогда l_∞^σ -длина тотально σ -локальной формации \mathfrak{F} равна 4, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{form } G$, где G — одна из следующих групп:

- 1) σ -нильпотентная группа с $|\sigma(G)| = 4$;
- 2) группа вида $A \times B$, где A — σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \sigma(H)$, H — не σ -примарная группа Шмидта;
- 3) группа вида $A \times B$, где A и B — не σ -примарные группы Шмидта различных типов и $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Теоремы 1 и 2 позволяют дать явное описание тотально σ -локальных формаций $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) \leq 4$.

Теорема 3. Пусть \mathfrak{F} — тотально σ -локальная формация.

1) $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) \leq 2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $|\Pi| \leq 2$;

2) $l_\infty^\sigma(\mathfrak{F}) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $|\Pi| = 3$, либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$, где $i \neq j$.

Теорема 4. Тогда и только тогда l_∞^σ -длина тотально σ -локальной формации \mathfrak{F} равна 4, когда \mathfrak{F} — одна из следующих формаций:

- 1) \mathfrak{N}_Π , где $|\Pi| = 4$;
- 2) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_k} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_k}$, где i, j, k попарно различны.
- 3) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_\Pi \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \{\sigma_i, \sigma_j\}$.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1 [8, теорема 4]. Пусть \mathfrak{F} — тотально насыщенная формация. Тогда в том и только том случае l_∞^σ -длина формации \mathfrak{F} равна 4, когда \mathfrak{F} — одна из следующих формаций:

- 1) \mathfrak{N}_π , где $|\pi| = 4$;
- 2) $\mathfrak{N}_p \vee_\infty \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_r = \mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_r$, где p, q и r — различные простые числа.
- 3) $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \vee_\infty \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_\pi^2$, где $\pi = \{p, q\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь по заданию ГПНИ “Конвергенция-2025” (проект № 20211328).

Литература

1. Skiba A. N. *On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups* // J. Algebra. 2015. Vol. 436, No 1. P. 1–16.
2. Skiba A. N. *On one generalization of the local formations* // ПФМТ. 2018. № 34(1). С. 79–82.
3. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. *On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups* // ПФМТ. 2018. № 34(2). С. 85–88.
4. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. *On n -multiply σ -local formations of finite groups* // Communications in Algebra. 2019. Vol. 47, No 3. P. 957–968.
5. Safonova I. N., Safonov V. G. *On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. № 3. С. 6–16.
6. Скиба А. Н. *Алгебра формаций*. Мн.: Беларуская навука, 1997.
7. Wang Z., Guo J., Safonova I. N., Skiba A. N. *A generalization of σ -permutability* // Communications in Mathematics and Statistics. 2022. Vol. 10, No 3. P. 565–579.
8. Сафонов В. Г., Скиба А. Н. *О τ -замкнутых тотально насыщенных формациях I_∞ -длины ≤ 5* // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 1. С. 73–80.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПОЛНОТЫ СПИСКА НЕКОТОРЫХ ТРЁХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В.И. Субботин

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ); Просвещения, 132, 346400 Новочеркасск, Россия; Донской государственный аграрный университет, Кривошлыкова, 24, 346493, Персияновский, Россия.
geometry@mail.ru

Аннотация. В работе сравниваются три способа доказательства существования замкнутого выпуклого многогранника в E^3 . В частности, доказана теорема о существовании двадцать четвёртого RR -многогранника и обсуждается теорема о полноте списка RR -многогранников.

Вопросы полноты списка некоторых классов симметричных многогранников рассматриваются во многих современных работах, см., например, список литературы в работах [1], [2].

Определения. Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR -многогранником, если множество его граней можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества — множество правильных граней одного типа и множество симметричных ромбических вершин.

Вершина V многогранника называется n -ромбической, если множество граней, инцидентных этой вершине, представляют собой равные ромбы, сходящиеся в вершине V своими острыми или тупыми углами.

Вершина V многогранника называется симметричной, если она лежит на оси симметрии порядка n многогранника.

Теорема 1. Существует двадцать четвёртый RR -многогранник с двадцатью восемью гранями и с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами.

Теорема 2. Список всех RR -многогранников исчерпывается двадцатью четырьмя многогранниками, среди которых только три имеют тупоугольные ромбические вершины.

Литература

1. Субботин В. И. *О перечислении выпуклых RR -многогранников* // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, № 5. С. 194–207.
2. Cromwell P. R. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ
ДЕЙСТВИЙ С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА ОДНОМЕРНОМ
КОМПЛЕКСНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В.Ю. Тыщенко

Гродненский госуниверситет, факультет математики и информатики
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь valentinet@mail.ru

Задача о топологической сопряженности групп дробно-линейных действий на одномерном комплексном проективном пространстве, т. е. задача о нахождении необходимых и достаточных условий существования такого гомеоморфизма что имеют место тождества

$$f(P_r v) = Q_r f(v) \quad \forall v \in \mathbb{C}P^1, r = \overline{1, v}, \quad (1)$$

где $v = (v_1, v_2)$ – однородные координаты, $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$, матрицы $P_r \in GL(2, \mathbb{C}), Q_r \in GL(2, \mathbb{C}), r = \overline{1, v}$, изучалась в работах [1–6]. Отметим, что спустя 11 и 14 лет результаты работы [1] о топологической сопряженности (1) (в частном случае $v = 1$) были переформулированы и передоказаны в работах [5] и [6] соответственно. Имеют место утверждения.

Предложение 1 [7, с. 51]. *Для топологической сопряженности (1) групп дробно-линейных действий необходимо, чтобы нормальные жордановы формы всех матриц P_r и Q_r , определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, имели одинаковое число блоков Жордана, $r = \overline{1, v}$.*

Предложение 2 [3]. *Для топологической сопряженности (1) абелевых групп дробно-линейных действий необходимо, чтобы нормальные жордановы формы всех матриц P_r и Q_r , определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, $r = \overline{1, v}$, имели одинаковое число блоков Жордана.*

Предложение 3 [1]. *Пусть матрицы $P_r = S \text{diag}\{p_{1r}, p_{2r}\} S^{-1}, Q_r = T \text{diag}\{q_{1r}, q_{2r}\} T^{-1}, r = \overline{1, v}$, где матрицы $S \in GL(2, \mathbb{C}), T \in GL(2, \mathbb{C})$. Тогда для топологической сопряженности (1) необходимо и достаточно, чтобы либо $q_{1r}/q_{2r} = (p_{1r}/p_{2r})|p_{1r}/p_{2r}|^\alpha, \text{Re } \alpha \neq -1, r = \overline{1, v}$, либо $q_{1r}/q_{2r} = \overline{(p_{1r}/p_{2r})|p_{1r}/p_{2r}|^\alpha}, \text{Re } \alpha \neq -1, r = \overline{1, v}$.*

Предложение 4 [4]. *Из топологической сопряженности (1) неабелевых групп дробно-линейных действий общего положения следует их обобщенно голоморфная сопряженность, осуществляемая либо невырожденным дробно-линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно-линейным преобразованиями.*

Для вещественного одномерного проективного пространства аналогичный вопрос о топологической сопряженности

$$f(P_r v) = Q_r f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}P^1, r = \overline{1, v}, \quad (2)$$

где $v = (v_1, v_2)$ – однородные координаты, $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$, матрицы $P_r \in GL(2, \mathbb{R}), Q_r \in GL(2, \mathbb{R}), r = \overline{1, v}$, рассматривался в работах [2], [4] и [7]. Справедливы утверждения.

Предложение 5 [7, с. 119]. *Для топологической сопряженности (2) групп дробно-линейных действий необходимо, чтобы вещественные нормальные жордановы формы всех матриц P_r и Q_r , определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, имели одинаковое число блоков Жордана, $r = \overline{1, v}$.*

Предложение 6 [7, с. 119]. *Для топологической сопряженности (2) абелевых групп дробно-линейных действий необходимо, чтобы вещественные нормальные жордановы формы всех матриц P_r и Q_r , определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, $r = \overline{1, v}$ имели одинаковое число блоков Жордана.*

Предложение 7 [7, с. 119]. *Пусть матрицы $P_r = S \text{diag}\{p_{1r}, p_{2r}\} S^{-1}, Q_r = T \text{diag}\{q_{1r}, q_{2r}\} T^{-1}, r = \overline{1, v}$, где матрицы $S \in GL(2, \mathbb{R}), T \in GL(2, \mathbb{R})$. Тогда для топологической сопряженности (2) необходимо и достаточно, чтобы $q_{1r}/q_{2r} = (p_{1r}/p_{2r})|p_{1r}/p_{2r}|^\alpha, \alpha \neq -1, r = \overline{1, v}$.*

Предложение 8 [7, с. 120]. Пусть матрицы $P_r = S \begin{pmatrix} \cos \alpha_r & -\sin \alpha_r \\ \sin \alpha_r & \cos \alpha_r \end{pmatrix} S^{-1}$, $\alpha_r \in (-\pi, \pi]$, $Q_r = T \begin{pmatrix} \cos \beta_r & -\sin \beta_r \\ \sin \beta_r & \cos \beta_r \end{pmatrix} T^{-1}$, $\beta_r \in (-\pi, \pi]$, $r = \overline{1, \nu}$. Тогда для топологической и голоморфной сопряженностей (2) необходимо и достаточно, чтобы либо $\beta_r = \alpha_r$, $r = \overline{1, \nu}$, либо $\beta_r = -\alpha_r$, $r = \overline{1, \nu}$.

Предложение 9 [7, с. 121]. Пусть матрицы $P_r = S \begin{pmatrix} 1 & p_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$, $Q_r = T \begin{pmatrix} 1 & q_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$, $r = \overline{1, \nu}$. Тогда для топологической и голоморфной сопряженностей (2) необходимо и достаточно, чтобы $q_r = \lambda p_r$, $r = \overline{1, \nu}$.

Предложение 10 [7, с. 122]. Из топологической сопряженности (2) неабелевых групп дробно-линейных действий общего положения следует их голоморфная сопряженность, осуществляемая невырожденным дробно-линейным преобразованием.

Таким образом, по сравнению с вещественным аналогом в комплексном случае неизученной остается возможность топологической сопряженности (1) абелевых групп дробно-линейных действий с одной неподвижной точкой при $\nu > 1$. Данная работа восполняет этот пробел.

Поэтому будем рассматривать случай, когда абелевы дробно-линейные группы PL^1 и PL^2 с нетождественными образующими имеют одну неподвижную точку, т. е. когда в тождествах (1) имеют место представления $P_r = S \begin{pmatrix} 1 & p_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$, и $Q_r = T \begin{pmatrix} 1 & q_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$, $p_r q_r \neq 0$, $r = \overline{1, \nu}$, соответственно.

Расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где ∞ – бесконечно удаленная точка, можно одновременно рассматривать и в качестве пространства $\mathbb{C}P^1$ (отождествив при этом их элементы таким образом: $w = v_1/v_2$, $\forall (v_1, v_2) : v_2 \neq 0$; $w = \infty \forall (v_1, v_2) : v_2 = 0$).

В рассматриваемом случае с помощью специальной невырожденной замены от тождеств (1) переходим к тождествам $\xi(w) + p_r = \xi(w) + q_r \forall w \in \overline{\mathbb{C}}$, $r = \overline{1, \nu}$, $\xi(\infty) = \infty$, равносильным

$$\xi(w) + p_r = \xi(w) + q_r \forall w \in \mathbb{C}, r = \overline{1, \nu}. \quad (3)$$

Теорема [8]. Топологическая сопряженность абелевых дробно-линейных групп PL^1 и PL^2 с одной неподвижной точкой равносильна сопряженности (3), осуществляемой невырожденным \mathbb{R} -линейным [9, с. 21] преобразованием.

Литература

1. Gorbuzov V. N., Tyshchenko V. Yu. *On the embeddability of foliations of the Riccati equations* // Buletinul A.S. a R.M. Matematica. 1998. No 3(28). P. 49–56.
2. Тыщенко В. Ю. *Эквивалентность уравнений Риккати с периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 565–567.
3. Тыщенко В. Ю. *Об эквивалентности комплексных многомерных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 4. С. 120–121.
4. Тыщенко В. Ю. *Классификация уравнений Риккати с неабелевыми группами голономии* // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2007. № 1. С. 82–86.
5. Будницкая Т. В. *Топологическая классификация преобразований Мёбиуса* // Сб. трудов Института математики НАН Украины. 2009. Т. 6, № 2. С. 349–358.
6. Рыбалкина Т. В., Сергейчук В. В. *Топологическая классификация преобразований Мёбиуса* // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, вып. 6. С. 175–183.
7. Тыщенко В. Ю. *Качественные характеристики накрывающих слоений дифференциальных систем*. Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2021.
8. Тыщенко В. Ю. *О топологической сопряженности абелевых групп дробно-линейных действий с одной неподвижной точкой на одномерном комплексном проективном пространстве* // Веснік ГрДУ. Сер. 2. Фізика. Інфарматыка, вылічальна техніка і кіраванне. 2024. № 2. С. 44–51.
9. Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ*. М.: Наука, 1969.

О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, РАСПОЛОЖЕННЫЕ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Ш.А. Хайруллоев¹

¹Институт математики им. А.Джураева НАНТ, 734063, Душанбе, Таджикистан,
shamsullo@rambler.ru

Нули дзета-функции Римана, расположенные на коротких промежутках критической прямой, являются и интересным и сложным исследованием в области аналитической теории чисел. Изучение нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой открывает новые возможности для более глубокого изучения простых чисел и их свойств.

Выдающийся немецкий математик Бернхард Риман [1], сформулировал гипотезу, предполагающую, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана находятся на «критической прямой». Несмотря на множество исследований и экспериментов, эта гипотеза до сих пор остаётся не доказанной.

Первым важным результатом, связанным с расположением нулей дзета-функции на критической прямой, стала теорема, доказанная Г.Харди [2]. Он доказал, что количество таких нулей бесконечно.

Число нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, лежащих на промежутке $(0, T)$, обозначаем через $N_0(T)$. Г.Харди и Д.Литтлвуда [3] в 1921 году доказали следующую теорему: *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T \geq T_0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ справедливо неравенство*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH.$$

В 1942 году выдающийся математик А.Сельберг [4], доказал усиленный вариант теоремы Харди и Литтлвуда, то есть: *При выполнении условий теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T. \quad (1)$$

В оценке (1), проведённой А.Сельбергом, возникла интересная гипотеза о том, что неравенство (1) может быть выполнено и при меньших значениях H , то есть при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где α – это фиксированное положительное число, меньшее $1/2$ (Гипотеза А.Сельберга) [4].

В 1976 году чешский математик Я.Мозер [5] получил новый результат в названной проблеме: *При $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5/12} \ln^3 T$ справедливо неравенство*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH,$$

$c > 0$ – абсолютная постоянная.

В 1984 году выдающийся математик А.А.Карацуба [6] доказал гипотезу Сельберга при $\alpha = 27/82$, то есть доказал следующую теорему: *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда существуют положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [7], следуя работам [8—9], доказывается гипотеза А.Сельберга, когда $\alpha = 1515/4816$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2},$$

ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001,

$$T \geq T_0(\varepsilon) > 0, \quad H = T^{\theta(\kappa, \lambda) + \varepsilon}.$$

Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

Отметим, что показатель $\theta(\kappa; \lambda)$ в теореме 1 ранее рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R$, а также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leq N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшую оценку сверху для $\theta(\kappa; \lambda)$ на данный момент получили J. Bourgain и N. Watt [10]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leq \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где \mathcal{P} — множество всех экспоненциальных пар.

Из [10] и из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие. Пусть ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{1515/4816+\varepsilon}$. Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

Литература

1. Риман Б. *О числе простых чисел, не превышающих данной величины*. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1948. 224 с.
2. Hardy G. H. *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* // Compt. Rend. Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1012–1014.
3. Hardy G. H., Littlewood J. E. *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line* // Math. Zs. 1921. Vol. 10. P. 283–317.
4. Selberg A. *On the zeros of Riemann's zeta-function* // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. P. 1–59.
5. Мозер Я. *Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана* // Acta Arith. 1976. Vol. 31. P. 45–51; Добавление // Acta Arith. 1979. Vol. 35. P. 403–404.
6. Карацуба А. А. *О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой* // Изв. АН СССР. серия математическая. 1984. Т. 48, № 3. С. 569–584.
7. Graham S. W., Kolesnik G. *Vander Corput's Method of Exponential sums*. Cambridge university press, 1991. 117 p.
8. Хайруллоев Ш. А. *О вещественных нулях производной функции Харди* // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, Вып. 5 (81). С. 235–242. doi 10.22405/2226-8383-2021-22-5-235-242
9. Хайруллоев Ш. А. *О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения* // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4 (173). С. 7–25.
10. Bourgain J., Watt N. *Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5 + it)|$* // <http://arxiv.org/abs/1505.04161v1> [math.NT], 15 May 2015.

О НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТАХ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
yadchenko_56@mail.ru

Введение. Рассматриваются только конечные группы и их комплексные представления.

Пусть p — простое число и P — p -силовская подгруппа группы G . Фундаментальная теорема Ито-Михлера о степенях характеров утверждает, что тогда и только тогда подгруппа P нормальна в группе G и абелева, когда степень каждого неприводимого характера группы G является p' -числом.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что группа G называется π -разрешимой, если порядок каждого ее главного фактора является либо степенью простого числа из π , либо π' -числом и называется π -обособленной, если она π -разрешима или π' -разрешима. В работе [1] А.В. Романовским и А.А. Ядченко установлен критерий мономиальности характеров, являющихся неприводимыми компонентами характера 1_M^G , где M — π' -холлова подгруппа π -обособленной группы G . На его основе доказано приведенное ниже утверждение с положительным решением проблемы

Айзекса о p -разрешимых неприводимых линейных группах и, в частном случае, включающее одновременно известную теорему Галлахера [2]: если степень каждой неприводимой компоненты характера $(1_H)^G$ π -разрешимой группы G с π -холловой подгруппой H является π' -числом, то подгруппа H нормальна в G .

Утверждение [1]. Если степень некоторой точной неприводимой компоненты φ характера 1_M^G π -обособленной группы G с π' -холловой подгруппой M является π' -числом и $\varphi(1)$ не делится на такую степень $q^S \neq 1$ простого числа q , что $q^S \equiv 1 \pmod{p}$ для любого $p \in \pi$, то π -холлова подгруппа H группы G абелева и нормальна в G .

Приведем следующую теорему, которая является критерием существования нормальной π -холловой подгруппы в π -обособленной группе, более широкого класса групп, чем π -разрешимые.

Теорема. Пусть G – π -обособленная группа с π -холловой подгруппой H . Тогда и только тогда подгруппа H нормальна в G , когда степень каждой неприводимой компоненты характера $(1_H)^G$ является π' -числом.

Литература

1. Романовский А. В., Ядченко А. А. Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 7-8. С. 991–996.
2. Gallacher P. X. Group characters and normal Hall subgroups // Nagoya Math. J. 1962. Vol. 21, Dec. P. 223–230.

EQUIVARIANT FIBRATIONS AND EXTENSORS FOR LOCALLY COMPACT GROUPS

S.M. Ageev¹, A. L. Kantun-Montiel²

¹Belarussian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030,
ageev_sergei@inbox.ru

²Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan, Av. Ferrocarril S/N, Ciudad Universitaria, CP 68400, Loma Bonita, Oaxaca, México,
alkantun@unpa.edu.mx

The one of the main aims of the paper will be

Theorem 1. Let G be a locally compact group G and $H < G$ a compact subgroup containing small subgroups (called a CSS-subgroup). Suppose that $f : \mathbb{X} \rightarrow G/H$ is a slicing G -map of the proper G -space $\mathbb{X} \in H$ -ANE. Then $\mathbb{S} = f^{-1}[H] \in H$ -ANE.

Theorem 1 is based on fibration properties of G -maps. Recall that $\pi_* : G \rightarrow G/H$, $\pi_*(g) = gH$, is a conjugate H -projection if G is an H -space with the action $h * g = hgh^{-1}$, and the action on G/H is given by $h \cdot gH = hgH$.

Theorem 2. Let $H < G$ be a compact subgroup of a locally compact group G . Then the conjugate H -projection π_* is an H -fibration.

Theorem 3. Let H be a compact CSS-subgroup of a locally compact group G . Then any G -map $p : \mathbb{E} \rightarrow G/H$ of the proper G -space \mathbb{E} is a G -fibration.

Theorem 3 can be proved largely due to the fact on straightening of slice maps. As the corollary of the mentioned above results we have:

Theorem 4. Let $P \triangleleft G$ be a closed normal subgroup of a locally compact group G and \mathbb{X} a proper G -ANE-space with metrizable orbit space X . Then the G/P -orbit space $\mathbb{X}/P \in (G/P)$ -ANE.

ON THE TORSION IN MULTIPLICATIVELY CLOSED SUBSETS OF POWER ASSOCIATIVE ALGEBRAS

E.L. Bashkirov

25 Surganov str., Minsk, 220012,
zh.bash@mail.ru

Let A be a commutative and associative ring with 1. Let E be an algebra (not necessarily associative) over A with unit element e . If M is an ideal of A , then ME denotes the set of all finite sums $\sum_i a_i x_i$ with $a_i \in M, x_i \in E$. Define $S(M)$ to be the set of all elements $e + x$ where $x \in ME$. Since ME is a two-sided ideal of E , the subset $S(M)$ is multiplicatively closed, that is, the product uv is in $S(M)$ whenever u and v are in $S(M)$. If A is an integral domain of characteristic 0, then the requirement A to have a theory of divisors means that there is a commutative semigroup D with identity and with unique factorization such that there exists a homomorphism $a \rightarrow \nu(a)$ of the semigroup $A^* = A \setminus \{0\}$ into D satisfying conditions (1)–(3) listed on p. 171 [1]. An element $a \in A^*$ is said to be divisible by an element $\alpha \in D$ if $\nu(a)$ is divisible by α in D . The set of all elements of A that are divisible by $\alpha \in D$ form an ideal of A , written $I(\alpha)$.

The following result proved in [2] generalizes and gives in a unite form Theorems 11.3 and 11.4 [3] concerning the torsion in the congruence subgroup of the general linear group of finite degree over A .

Theorem. *Let A be a commutative integral domain of characteristic 0 with an identity 1. Suppose that A has a theory of divisors $A^* \rightarrow D$ such that D contains a prime element \mathfrak{P} satisfying the following conditions: \mathfrak{P} does not divide 2 and \mathfrak{P}^2 does not divide p for every prime rational integer p . Let E be a power associative algebra over A with unit element e . Suppose that the underlying A -module of E is free. Then the set $S(I(\mathfrak{P}))$ contains no element of finite order.*

References

1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. *Number Theory*. Academic Press, 1966.
2. Bashkirov E. L. *On the torsion in multiplicatively closed subsets of power associative algebras // Quasigroups and Related Systems*. 2021. Vol. 29, No 2. P. 171–176.
3. Suprunenko D. A. *Matrix groups*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 45. American Mathematical Society, 1976.

THE TITS ALTERNATIVE FOR GENERALIZED TETRAHEDRON GROUPS

V.V. Beniash-Kryvets, V.Y. Novikova

Belarussian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030,
{benyashvv, victoria.novikova256}@gmail.com

One says that a group G satisfies a Tits alternative if either G is virtually soluble, or G contains a non-abelian free subgroup. Generalized tetrahedron groups have a presentation

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}^l(x_1, x_2) = R_{13}^m(x_1, x_3) = R_{23}^n(x_2, x_3) = 1 \rangle,$$

where $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ is a cyclically reduced word involving both x_i and x_j and $R_{ij}(x_i, x_j)$ is not a proper power in the free product on x_i and x_j . One says that G has a type (k_1, k_2, k_3, l, m, n) [1]. There is a conjecture [1] that the class of generalized tetrahedron groups satisfies the Tits alternative.

This conjecture has been proved [1–5] for all generalized tetrahedron groups except in the case

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}^2(x_1, x_2) = (x_1^\alpha x_3^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^2 = 1 \rangle, \quad (1)$$

where $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. In [3] this conjecture is proved for groups of the form (1) in the case, when there exist k_i, k_j , $i \neq j$, such that $\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j} < \frac{1}{2}$ except in the case $k_3 = 2$ and $(k_1, k_2) \in \{(3, 8), (3, 10), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 6)\}$. Cases $(k_1, k_2) = (3, 10), (4, 5), (5, 6)$ has been proved in [6].

Theorem 1. Let G be a generalized tetrahedron group with presentation

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = R^2(x, y) = (xz)^2 = (y^2z)^2 = 1 \rangle.$$

where $R(x, y) = xy^{v_1} \dots xy^{v_s}$, $s \geq 1$ and $1 \leq v_i \leq 3$ for all i . Then a group G contains a non-abelian free subgroup, hence the Tits alternative holds for G .

Theorem 2. Let G be a generalized tetrahedron group with presentation

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^k = R^2(x, y) = (xz^\alpha)^2 = (y^\beta z^\gamma)^2 = 1 \rangle, \quad (2)$$

where $k \leq 6$, $1 \leq \alpha, \gamma < k$, $1 \leq \beta \leq 2$, $R(x, y) = xy^{v_1} \dots xy^{v_s}$, $s \geq 1$ and $1 \leq v_i \leq 2$ for all i . Suppose that one of the following conditions holds:

1. s is even and $R(x, y)$ do not equal up to equivalence to 26 words in Table 2 [7];
2. s is odd, $v_1 + \dots + v_s \not\equiv 0 \pmod{3}$ and $R(x, y)$ do not equal up to equivalence to 31 words in Table 1 [8].

Then a group G contains a non-abelian free subgroup, hence the Tits alternative holds for G .

Theorem 3. Let G has a presentation (2).

1. If $R(x, y)$ is equal to one of the words 1a, 1b, 2, 3, 4a, 6 in Table 2 [7], then G is finite.
2. If $R(x, y)$ is equal to the word 5 in Table 2 [7], then G is abelian-by-finite.
3. If $R(x, y)$ is equal to one of the words 4b, 8 in Table 2 [7], then G is large.

Теорема 4. Let G be a generalized tetrahedron group with presentation (1) and one of the following holds:

- 1) $(k_1, k_2, k_3) \in \{(3, 4, 2), (3, 4, 3)\}$ and $\gamma = 2$,
- 2) $(k_1, k_2, k_3) = (3, 4, 4)$ and one of the numbers β, γ, δ is equal to two.

Then a group G contains a non-abelian free subgroup, hence the Tits alternative holds for G .

Теорема 5. Let G be a generalized tetrahedron group with presentation

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^k = R^2(x, y) = (x^\alpha z^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = 1 \rangle,$$

where $k \leq 6$, $1 \leq \alpha, \gamma \leq 2$, $1 \leq \beta, \delta \leq k - 1$, $R(x, y) = x^{u_1} y^{v_1} \dots x^{u_s} y^{v_s}$, $s \geq 1$ and $1 \leq u_i, v_i \leq 2$ for all i . If $R(x, y)$ do not equal up to equivalence to 19 words in Table 1 [7], then a group G contains a non-abelian free subgroup, hence the Tits alternative holds for G .

References

1. Fine B, Rosenberger G. *Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products*. New York: Marcel Dekker, 1999.
2. Howie J. *The Tits alternative for generalized tetrahedron groups* // J. of Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173–189.
3. Fine B., Hulpke A., Große Rebel V. *The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups* // Algebra Colloquium. 2008. Vol. 15, No 4. P. 541–554.
4. Große Rebel V., Hahn M., Rosenberger G. *The Tits alternative for Tsaranov's generalized tetrahedron groups* // Groups-Complexity-Cryptology. 2009. Vol. 1, No 2. P. 207–216.
5. Fine B., Hulpke A., Große Rebel V., Rosenberger G., Schauerte S. *The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups* // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. 2011. Vol. 21. P. 1–15.
6. Beniash-Kryvets V., Hua Xiuying. *On free subgroups in some generalized tetrahedron groups* // Vestnik of Belarusian State University, ser.1. 2008. Vol. 2. P. 79–85.
7. Howie J. *Generalised triangle groups of type (3; q; 2)* // Algebra and Discrete Mathematics. 2013. Vol. 15, No 1. P. 1–19.
8. Howie J., Kononov K. *Generalized triangle groups of type (2,3,2) with no cyclic essential representations* // Preprint 2016: arXiv:1612.00242v1. P. 1–37.

ON G -PERMUTABLE AND HEREDITARILY G -PERMUTABLE SUBGROUPS IN FINITE SIMPLE GROUPS

A.A. Galt

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, Russia, 630090,
galt84@gmail.com

The study of quasinormal subgroups goes back to Ore's work [1], where he proved that every permutable subgroup of a finite group is subnormal. Recall that a subgroup A of a group G is called *quasinormal* [1] or *permutable* [2] in G , if $AB = BA$ for every subgroup B of G . Ore's result was generalized in different directions.

Given a group G , it often happens that two subgroups A and B are not permutable, but there exists an element $x \in G$ such that $AB^x = B^xA$. Different examples of such cases led to the following notions.

Definition. Let A, B be subgroups of a group G and $\emptyset \neq X \subseteq G$. Then

- (1) A is called *X -permutable* with B if there exists an element $x \in X$ such that $AB^x = B^xA$;
- (2) A is called *hereditarily X -permutable* with B if $AB^x = B^xA$ for some $x \in X \cap \langle A, B \rangle$;
- (3) A is called *(hereditarily) X -permutable in G* if A is (hereditarily) X -permutable with each subgroup of G .

The concept of a X -permutable subgroup has been widely developed in the papers of various authors. See the book [3] for background and results in this direction. However, the further application of this notion in solving various problems was restrained by the lack of information about G -permutable and hereditarily G -permutable subgroups that are in composition factors of groups. Therefore, in the Kourovka Notebook [4] the following general problem was posed.

Problem 17.112. Which finite non-abelian simple groups G possess

- (a) a non-trivial G -permutable subgroup?
- (b) a non-trivial hereditarily G -permutable subgroup?

A. N. Skiba, V. N. Tyutyaynov

In our talk we will discuss the progress in solving this problem.

Acknowledgments. The work was supported by a joint grant of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F23RSF-237) and the Russian Science Foundation No. 23-41-10003.

References

1. Ore O. *Contributions in the theory of groups of finite order* // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431–460.
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Walter de Gruyter, Berlin; New York, 1992.
3. Guo W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups*. Springer, Heidelberg, 2015.
4. Mazurov V. D., Khukhro E. I. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*. 20th ed., Novosibirsk, 2022.

POLYNOMIALS OVER DIVISION RINGS

A.G. Goutor

Belarussian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030, goutor@bsu.by

(This is a joint work with S.V. Tikhonov [1].)

We study polynomials over division rings. Let D be an associative division ring. Let also $D[x]$ denote the polynomial ring in one variable x over D , where x commutes elementwise with D . The coefficients of such polynomials may not commute with elements of the ring. Polynomials in $D[x]$ are added in the obvious way, and multiplied according to the rule

$$(a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) = (c_{m+n} x^{m+n} + \dots + c_0),$$

where $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. For references on polynomial rings over division rings, see [2, Ch. 5, §16] and [3].

The degree of $P(x) \in D[x]$ is defined in the usual way. For a polynomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in D[x]$$

and an element $a \in D$, we define $P(a)$ to be the element

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0.$$

An element $a \in D$ is said to be a (right) root of $P(x)$ if $P(a) = 0$. The noncommutative form of the Remainder Theorem says that an element $a \in D$ is a root of a nonzero polynomial $P(x)$ iff $x - a$ is a right divisor of $P(x)$ in $D[x]$ (see, e.g., [2, Prop. 16.2]).

For $a \in D$, the set

$$[a] := \{dad^{-1} \mid d \in D \setminus \{0\}\}$$

will be called the conjugacy class of a .

Over a field, a polynomial of degree n has at most n distinct roots. Over a division ring this is no longer true, but by Gordon-Motzkin theorem ([2, Th. 16.4]), a polynomial of degree n in $D[x]$ has roots in at most n conjugacy classes of D , moreover, if $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$, where $a_1, \dots, a_n \in D$, then any root of $P(x)$ is conjugate to some a_i . Note that from $P(x) = L(x)R(x) \in D[x]$ it does not follow that $P(a) = L(a)R(a)$. In particular, if a is a root of $L(x)$, then a is not necessarily a root of $P(x)$.

In [4], it was presented the following explicit formula describing roots of a product of linear factors in $\mathbb{H}[x]$, where \mathbb{H} is Hamilton's quaternion algebra.

Theorem 1 [4]. *Let $P(x) = (x - q_n) \cdots (x - q_1)$, where $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{H}$. If the conjugacy classes $[q_k]$ are distinct, then the polynomial $P(x)$ has exactly n roots ζ_k which are related to the elements q_k as follows:*

$$\zeta_k = \bar{P}_k(q_k) q_k (\bar{P}_k(q_k))^{-1}; k = 1, \dots, n,$$

$$P_k(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } k = 1, \\ (x - q_{k-1}) \cdots (x - q_1), & \text{otherwise} \end{cases}$$

and $\bar{P}_k(x)$ is the conjugate polynomial of $P_k(x)$.

We generalized this formula for the case of any division ring:

Theorem 2 [1]. *Let D be a division ring with center F . Let also*

$$P(x) = (x - d_n) \cdots (x - d_1),$$

where $d_1, \dots, d_n \in D$. Assume that d_1, \dots, d_{n-1} are algebraic over F . Let also $f_i(x)$ be the minimal polynomial of d_i , $i = 1, \dots, n-1$. If the conjugacy classes $[d_k]$ are distinct, then the polynomial $P(x)$ has exactly n zeros ζ_k which are related to the elements d_k as follows:

$$\zeta_k = P_k(d_k) d_k (P_k(d_k))^{-1}; k = 1, \dots, n,$$

$$P_k(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } k = 1, \\ S_1(x) \cdots S_{k-1}(x), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $S_i(x) \in D[x]$ is such that $f_i(x) = S_i(x)(x - d_i)$, $i = 1, \dots, n-1$.

In the notation of Theorem 1, we have the following

Corollary [1]. *Let D be a division ring with center F , $d_1, d_2 \in D$ such that the conjugacy classes $[d_1]$ and $[d_2]$ are distinct. Assume that d_1 is algebraic over F . Let also $f(x)$ be the minimal polynomial of d_1 and $S(x) \in D[x]$ such that $f(x) = S(x)(x - d_1)$. Then*

$$(x - d_2)(x - d_1) = (x - d)(x - S(d_2)d_2(S(d_2))^{-1}),$$

where $d = (d_1 - S(d_2)d_2(S(d_2))^{-1})d_1(d_1 - S(d_2)d_2(S(d_2))^{-1})^{-1}$.

The formula from the previous corollary allows to change the order of factors in products of monic linear polynomials. This formula generalizes formulas for Hamilton's quaternion algebra from [5, Lm. 1] (see also [4, Th.7]).

Let F be the center of a division ring D . If a is a root of a polynomial $f(x) \in F[x]$, then any element from the conjugacy class $[a]$ is a root of $f(x)$. The conjugacy class A is called algebraic over F if one

(an hence all) of its elements is algebraic over F . If A is algebraic over F , then the minimal polynomial of A is, by definition, the minimal polynomial of any element from A .

In the case of a quadratic minimal polynomial, there is the following

Theorem 3 [2, Lm. 16.17]. *Let D be a division ring with center F , and let A be a conjugacy class of D which has a quadratic minimal polynomial $\lambda(x)$ over F . If $P(x) \in D[x]$ has two roots in A , then $P(x) \in D[x]\lambda(x)$ and $P(x)$ vanishes identically on A .*

This means that a polynomial over a quaternion division algebra may have two different types of roots: isolated and spherical roots. A root q of $P(x)$ is called spherical if q is not central and for every $d \in [q]$ we have $P(d) = 0$. A root q is called isolated if the conjugacy class $[q]$ contains no other root of $P(x)$. We show that in the case of a conjugacy class with minimal polynomial of bigger degree the situation is completely different. More precisely, we proved the following

Theorem 4 [1]. *Let D be a noncommutative division ring with the center F , $a \in D$ an algebraic over F element with minimal polynomial $\lambda(x)$ of degree $n > 2$. Then there exists a quadratic polynomial $P(x) \in D[x]$ such that*

1. $P(x)$ has infinitely many roots in the conjugacy class $[a]$,
2. there are infinitely many elements in $[a]$ which are not roots of $P(x)$,
3. $\lambda(x)$ does not divide $P(x)$.

References

1. Goutor A./G., Tikhonov S./V. *Roots of polynomials over division rings* // Preprint. <https://arxiv.org/abs/2403.10999>.
2. Lam T./Y. *A first course in noncommutative rings* // Graduate Texts in Mathematics, 1991.
3. Gordon B., Motzkin T./S. *On the zeros of polynomials over division rings.* (Trans. Amer. Math. Soc.)// Math. Soc. 1965, P./,218–226.
4. Falcão M. I., Miranda F., Severino R., Soares M. J. *Mathematica Tools for Quaternionic Polynomials* // Computational science and its applications. 2017. Part II. P. 394–408.
5. Serôdio R., Pereira E., Vitória J. *Computing the zeros of quaternion polynomials* // Comput. Math. Appl. 2001. No 8–9. P. 1229–1237.

MANIFOLDS REALIZED AS ORBIT SPACES OF NON-FREE \mathbb{Z}_2^k -ACTIONS ON REAL MOMENT-ANGLE MANIFOLDS

N.Yu. Erokhovets

Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991 GSP-1& Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,
erohovetsn@hotmail.com

In toric topology (see [1]) a *real moment-angle manifold* $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$ is defined for any simple convex n -polytope P with m facets F_1, \dots, F_m as

$$\mathcal{Z}_P = P \times \mathbb{Z}_2^m / \sim, \text{ where } (x, a) \sim (y, b) \text{ if and only if } x = y \text{ and } a - b \in \langle e_i : x \in F_i \rangle.$$

It is a smooth n -manifold with a smooth action of \mathbb{Z}_2^m such that the orbit space is P .

If P is a compact right-angled polytope in some *geometry* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$, were $\mathbb{X}_i \in \{\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{S}^{n_i}, \mathbb{L}^{n_i}\}$, then the right-angled Coxeter group $G(P)$ generated by reflexions ρ_i in hyperplanes containing the facets F_i acts on \mathbb{X} , and P is a fundamental domain. Then the commutator subgroup $G'(P)$ acts freely on \mathbb{X} and $\mathbb{X}/G'(P)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$.

We study the manifolds $N(P, \Lambda)$ defined as orbit spaces of (not necessarily free) actions of subgroups $H \subset \mathbb{Z}_2^m$ on \mathcal{Z}_P . Each subgroup H is a kernel of an epimorphism $\mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^r$ given by a matrix Λ with rows $\Lambda_i \in \mathbb{Z}_2^r$ corresponding to facets F_i . We call Λ a *vector-coloring of P of rank r* . If the action of H is free and P is right-angled, then $N(P, \Lambda)$ has a geometric structure modelled on \mathbb{X} .

Theorem 1. [2] *$N(P, \Lambda)$ is a closed topological manifold if and only if for any vertex $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ different vectors among $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_n}$ are linearly independent.* This is a joint result with D.V. Gugin and can be extracted from general results by M.A. Mikhailova and K. Lange [5–7].

For each coloring c of the facets of P in r colors (in particular, for a vector-coloring Λ) define the complex $\mathcal{C}(P, c) \subset \partial P$. Its *facets* are connected components of unions of all the facets F_i of P of the same color $c(F_i)$ and *k-faces* are connected components of intersections of $(n - k)$ different facets. Two complexes $\mathcal{C}(P, c)$ and $\mathcal{C}(P', c')$ are *equivalent* (\simeq), if there is a homeomorphism $\partial P \rightarrow \partial P'$ preserving the face structure.

Proposition 1. [2] *For any coloring c of facets of the simplex Δ^n in k colors the complex $\mathcal{C}(\Delta^n, c)$ is equivalent to the complex $\mathcal{C}(n, k)$ defined on the boundary of the disk*

$$S_k^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0\}$$

by facets $S_k^n \cap \{x_i = 0\}$, $i = 1, \dots, k$.

Proposition 2. [2, 3] *Let Λ be a vector-coloring of rank r of a simple n -polytope P . If $\mathcal{C}(P, \Lambda) \simeq \mathcal{C}(n, r)$, then $N(P, \Lambda)$ is homeomorphic (\simeq) to S^n . If $N(P, \Lambda) \simeq S^n$, then $r \leq n + 1$, different vectors among Λ_i are linearly independent, and each face of $\mathcal{C}(P, \Lambda)$ is a rational homology disk or a rational homology sphere.*

Example 1. [2] Any face $G = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ corresponds to a vector coloring Λ_G of rank $k + 1$: $\Lambda_G(F_i) = e_{i_p}$ if $i = i_p$, $p = 1, \dots, k$, $\Lambda_G(F_i) = e_{k+1}$ otherwise, where e_1, \dots, e_{k+1} is a basis in \mathbb{Z}_2^{k+1} . Then $\mathcal{C}(P, \Lambda_G) \simeq \mathcal{C}(n, k + 1)$. For a vertex of $\Delta^{n_1} \times \dots \times \Delta^{n_l}$ this construction gives the action of \mathbb{Z}_2^{l-1} on $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_l}$ with the orbit space $S^{n_1 + \dots + n_l}$ built by D.V. Gugin in [4].

Theorem 2. [2, 3] *Let Λ be a vector-coloring of rank r of a simple n -polytope P of dimension $n \leq 4$. Then $N(P, \Lambda) \simeq S^n$ if and only if $\mathcal{C}(P, \Lambda) \simeq \mathcal{C}(n, r)$.*

A hyperelliptic manifold M^n is an n -manifold with an action of an involution τ such that $M^n / \langle \tau \rangle$ is homeomorphic to S^n . The involution τ is called *hyperelliptic*. In [8–10] A.D. Mednykh and A. Yu. Vesnin constructed examples of hyperelliptic 3-manifolds with geometric structures modelled on five of eight Thurston's geometries: \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , \mathbb{S}^3 , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Each example was built using a right-angled 3-polytope P equipped with a Hamiltonian cycle, theta-subgraph, or K_4 -subgraph.

We generalize this result as follows. We call a complex $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(P, c_1)$ a *subcomplex* (\subset) of a complex $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(P, c_2)$ if each facet of \mathcal{C}_1 is a union of facets of \mathcal{C}_2 . A subcomplex $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ is *Hamiltonian*, if each q -skeleton of \mathcal{C}_2 lies in the $(q + 1)$ -skeleton of \mathcal{C}_1 . By a $\mathcal{C}(n, k)$ -subcomplex we mean a subcomplex equivalent to $\mathcal{C}(n, k)$.

Example 2. For $n = 3$ a Hamiltonian $\mathcal{C}(n, k)$ -subcomplex corresponds to a Hamiltonian empty set ($k = 1$), cycle ($k = 2$), theta-subgraph ($k = 3$) and K_4 -subgraph ($k = 4$).

Proposition 3. [3] *Any proper Hamiltonian $\mathcal{C}(n, k)$ -subcomplex C in a complex $\mathcal{C}(P, c)$ induces a vector-coloring Λ_C of rank $k + 1$ of P such that $\mathcal{C}(P, \Lambda_C) = C(P, c)$ and there is a canonical involution $\tau_C \in \mathbb{Z}_2^m / H(\Lambda_C)$ acting on the manifold $N(P, \Lambda_C)$ with the orbit space $N(P, \Lambda_C) / \langle \tau_C \rangle \simeq S^n$.*

Example 3. For $n = 3$ and a free action of H on a right-angled 3-polytope P the arising hyperelliptic manifolds are exactly examples constructed by A. Yu. Vesnin and A.D. Mednykh.

Theorem 3. [2, 3] *Let Λ be a vector-coloring of rank r of a simple n -polytope P of dimension $n \leq 4$ such that $N(P, \Lambda)$ is a closed topological manifold. Then nonzero hyperelliptic involutions $\tau \in \mathbb{Z}_2^m / H(\Lambda)$ are in bijection with proper Hamiltonian $\mathcal{C}(n, r - 1)$ -subcomplexes in $\mathcal{C}(P, \Lambda)$ inducing Λ .*

A manifold $N(P, \Lambda)$ is called a *small cover*, if rank of Λ is equal to n and the action of H is free.

Corollary 1. [2] *A 3-dimensional small cover $N(P, \Lambda)$ has three hyperelliptic involutions if and only if $N(P, \Lambda)$ is a rational homology 3-sphere and if and only if Λ is induced by three Hamiltonian cycles such that any edge of P belongs to exactly two of them.*

For $n = 4$ there are 10 geometries \mathbb{X} that are products of spherical, Euclidean and hyperbolic spaces.

Theorem 4. [3] *For the geometries $\mathbb{X} = \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{L}^2$, and $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2$ there exists a compact right-angled 4-polytope P with a free action of H such that the geometric manifold $N(P, \Lambda)$ has a hyperelliptic involution in \mathbb{Z}_2^m / H , and for $\mathbb{X} = \mathbb{R}^4, \mathbb{L}^4, \mathbb{L}^3 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{R}^2$ there are no such polytopes.*

The results on 4-manifolds [3] are motivated by questions posed by A.D. Mednykh on seminars during discussions of results from [2].

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 23-11-00143, <https://rscf.ru/en/project/23-11-00143/>.

References

1. Buchstaber V., Panov T. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., 2015.
2. Erokhovets N. *Manifolds realized as orbit spaces of non-free \mathbb{Z}_2^k -actions on real moment-angle manifolds* // arXiv:2403.00492v1.
3. Erokhovets N. *Four-manifolds defined by vector-colorings of simple polytopes* // arXiv:2407.20575v1.
4. Gugnin. D. V. *Branched coverings of manifolds and nH -spaces* // Funct. Anal. Appl. 2019. Vol. 53, No 2. P. 133–136.
5. Lange C. *When is the underlying space of an orbifold a manifold?* // Trans. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 372. P. 2799–2828.
6. Lange C., Mikhailova M. A. *Classification of finite groups generated by reflections and rotations* // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, No 4. P. 1155–1201.
7. Mikhailova M. A. *On the quotient space modulo the action of a finite group generated by pseudoreflections* // Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1985. Vol. 24, No 1. P. 99–119.
8. Mednykh A. D. *Three-dimensional hyperelliptic manifolds* // Ann. Global. Anal. Geom. 1990. Vol. 8, No 1. P. 13–19.
9. Vesnin A. Yu., Mednykh. A. D. *Spherical coxeter groups and hyperelliptic 3-manifolds* // Mathematical Notes. 1999. Vol. 66, No 2. P. 135–138.
10. Vesnin A. Yu., Mednykh. A. D. *Three-dimensional hyperelliptic manifolds and Hamiltonian graphs* // Siberian Math. J. 1999. Vol. 40, No 4. P. 628–643.

DESCRIPTION OF 3-DIMENSIONAL LEIBNIZ COMPLEX DIASSOCIATIVE ALGEBRAS

T.K. Kurbanbaev^{1,2}, N.E. Uzakbaev²

¹Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan,
tuuelbay@mail.ru

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Univesity Street, 9, Olmazor district, Tashkent, 100174, Uzbekistan
nn.uzakbaev@gmail.com

In this paper we give a list of complex 3-dimensional Leibniz complex diassociative algebras.

Definition 1. *Leibniz algebra L is an algebra with a binary operation $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ satisfying the following Leibniz identity:*

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b], \forall a, b, c \in L.$$

When the bracket happens to be skew-symmetric, we get a Lie algebra since the Leibniz identity becomes the Jacobi identity.

Any associative algebra gives rise to a Lie algebra by $[a, b] = ab - ba$. In 1993 Loday proposed to introduce a new notion of algebra which gives, by a similar procedure, a Leibniz algebra. He started with two distinct operations for the product ab and the product ba , so that the bracket is not necessarily skew-symmetric. Explicitly, he defined an *associative dialgebra* (or a *diassociative algebra*) as a vector space D equipped with two associative operations \dashv and \vdash called respectively left and right product, satisfying three more axioms:

$$(a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \vdash c), (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c), (a \dashv b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c), \forall a, b, c \in D.$$

It is immediate to check that $[a, b] = a \dashv b - b \vdash a$ defines a Leibniz bracket. Hence any diassociative algebra gives rise to a Leibniz algebra.

Definition 2. *A Leibniz algebra L is called Leibniz diassociative algebra if the following identities holds for all $x, y, z \in L$:*

$$\begin{aligned} DL_1 : & (x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \\ DL_2 : & x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \\ DL_3 : & (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) + (x \dashv z) \dashv y, \\ DL_4 : & (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) + (x \vdash z) \vdash y, \\ DL_5 : & (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) + (x \vdash z) \dashv y. \end{aligned}$$

Theorem 1. Any 3-dimensional Leibniz complex diassociative algebra is isomorphic to one of the following algebras:

$$\text{DiasL}_{1,1}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= \alpha e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = \alpha e_1, e_2 \vdash e_3 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1, \\ e_3 \vdash e_2 &= \frac{1}{\alpha-1} e_1 - e_2, e_3 \vdash e_3 = ne_1; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{1,2}: e_1 \dashv e_3 = \alpha e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = \frac{\alpha}{\alpha-1} e_1, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_{2,1}: e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_2, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_{2,2}: e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_2 = le_1 + me_2, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_{2,3}: e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_2 = -e_1 - e_2, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_{2,4}: e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1 + ge_2, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_4: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= \alpha e_1, e_2 \dashv e_3 = -e_2, e_3 \dashv e_2 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = -e_2, e_3 \vdash e_2 = e_2, \\ e_3 \vdash e_3 &= ne_1; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{5,1}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = -e_1, e_3 \vdash e_2 = -e_1, e_3 \vdash e_3 = -e_1;$$

$$\text{DiasL}_{5,2}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = -e_1, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = -e_1, e_3 \vdash e_2 = -e_1, \\ e_3 \vdash e_3 &= ne_1 + qe_2; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{5,3}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = -e_1, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = e_1, \\ e_3 \vdash e_3 &= ne_1 + ne_2; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{6,1}: e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_2 = me_2;$$

$$\text{DiasL}_{6,2}: e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = -e_1, e_3 \vdash e_3 = ne_1;$$

$$\text{DiasL}_{6,3}: e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = ke_1;$$

$$\text{DiasL}_{6,4}: e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = e_2, e_3 \vdash e_2 = me_2, e_3 \vdash e_3 = e_1;$$

$$\text{DiasL}_{6,5}: e_1 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = fe_1, e_3 \vdash e_1 = (f-1)e_1, e_3 \vdash e_3 = e_1;$$

$$\text{DiasL}_{8,1}: e_1 \dashv e_1 = e_2, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = -e_2, e_1 \vdash e_2 = -e_2;$$

$$\text{DiasL}_{8,2}: e_1 \dashv e_1 = e_2, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = e_2, e_2 \vdash e_1 = e_2;$$

$$\text{DiasL}_{12}: \begin{aligned} e_2 \dashv e_2 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_1, e_3 \dashv e_3 = \alpha e_1, e_2 \vdash e_2 = se_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1, \\ e_3 \vdash e_2 &= le_1, e_3 \vdash e_3 = ne_1; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,1}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1 + e_2;$$

$$\text{DiasL}_{14,2}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = -e_1, e_3 \vdash e_2 = le_1, \\ e_3 \vdash e_3 &= -e_1; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,3}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1 + e_2, e_3 \vdash e_1 = -e_1, \\ e_3 \vdash e_2 &= ge_1, e_3 \vdash e_3 = -e_1; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,4}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_2 = le_1 - e_2;$$

$$\text{DiasL}_{14,5}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = -e_1, e_3 \vdash e_2 = -e_2, e_3 \vdash e_3 = -e_1,$$

$$\text{DiasL}_{14,6}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = ke_2, e_3 \vdash e_2 = -e_2, \\ e_3 \vdash e_3 &= ke_2, \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,7}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_3 \vdash e_1 = he_1 + ke_2, \\ e_3 \vdash e_2 &= \frac{h(1+h)}{k} e_1 - (1+h)e_2, e_3 \vdash e_3 = he_1 + ke_2; \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,8}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = fe_2, e_2 \vdash e_3 = e_2, e_3 \vdash e_3 = fe_2;$$

$$\text{DiasL}_{14,9}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = fe_2, e_2 \vdash e_3 = e_2, \\ e_3 \vdash e_1 &= -e_1 + fe_2, e_3 \vdash e_3 = -e_1 + 2fe_2. \end{aligned}$$

$$e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = de_1 + fe_2,$$

$$\text{DiasL}_{14,10}: e_2 \vdash e_3 = \frac{d(1-d)}{f} e_1 + (1-d)e_2, e_3 \vdash e_1 = -\frac{1-d}{f} ke_1 + ke_2,$$

$$e_3 \vdash e_2 = \frac{d(1-d)}{f^2} ke_1 - \frac{d}{f} ke_2, e_3 \vdash e_3 = (d+h)e_1 + (f+k)e_2.$$

$$\text{DiasL}_{14,11}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1, e_3 \vdash e_3 = e_1.$$

$$\text{DiasL}_{14,12}: \begin{aligned} e_1 \dashv e_3 &= e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = ge_1, \\ e_3 \vdash e_2 &= ge_1, e_3 \vdash e_3 = e_1. \end{aligned}$$

$$\text{DiasL}_{14,13}: e_1 \dashv e_3 = e_1, e_2 \dashv e_3 = e_2, e_3 \dashv e_3 = e_1, e_1 \vdash e_3 = e_1, e_2 \vdash e_3 = e_2, e_3 \vdash e_3 = e_1.$$

$$\text{DiasL}_{15,1}: e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = ae_2, e_1 \vdash e_3 = fe_2, e_3 \vdash e_1 = ke_2, e_3 \vdash e_3 = qe_2.$$

$$\text{DiasL}_{15,2}: e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = ae_2 + pe_3, e_3 \vdash e_1 = ke_2.$$

$$\text{DiasL}_{15,3}: e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = -e_2 + pe_3, e_1 \vdash e_2 = ce_3.$$

$$\text{Dias}L_{15,4} : e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = ae_2, e_1 \vdash e_3 = fe_2, e_3 \vdash e_1 = ke_2.$$

$$\text{Dias}L_{15,5} : e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = -e_2, e_1 \vdash e_2 = be_2 - \frac{b^2}{f}e_3, e_1 \vdash e_3 = fe_2 - be_3, \\ e_3 \vdash e_1 = -fe_2 + be_3.$$

$$\text{Dias}L_{15,6} : e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = -\frac{pf+b}{b}e_2 + pe_3, e_1 \vdash e_2 = be_2 - \frac{b^2}{f}e_3, \\ e_1 \vdash e_3 = fe_2 - be_3, e_3 \vdash e_1 = -fe_2 + be_3.$$

where $\alpha, a, b, c, d, f, g, h, k, l, m, n, p, q, s, \in \mathbb{C}$ and $\alpha \neq 0, 1$;

Remark 1. The isomorphism between algebras from Theorem 1 is not verified.

References

1. Loday J. L., Frabetti A., Chapoton F, Goichot F. *Dialgebras and Related Operads*. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2001.
2. Ayupov Sh. A., Omirov B. A., *On 3-dimensional Leibniz algebras // Uzbek Math. Jour.* 1999. No 1. P. 9–14.

SYMMETRY GROUPS OF TOROIDAL POLYHEDRA

S.A. Lawrence

Russian State University of Tourism and Service, 99 Glavnaya Street, Cherkizovo, Pushkino District,
Moscow Region, 141221, Russia,
serge.a.lawrence@gmail.com

It is known [1, 2] that in the 2-dimensional skeleton of a regular 4-dimensional hyperoctahedron there can be found exactly 12 triangulations of the (2-dimensional) torus (each with 8 vertices), pairwise distinct as sets of points in \mathbb{R}^4 . All the 12 triangulations are combinatorially isomorphic to the triangulation of the torus shown in on the left of Fig. 1 (identify the opposite sides of the square to obtain a torus). The construction [2], using the Schlegel diagram, leads to 12 congruent toroidal polyhedra (each without self-intersection) with triangular faces in \mathbb{R}^3 .

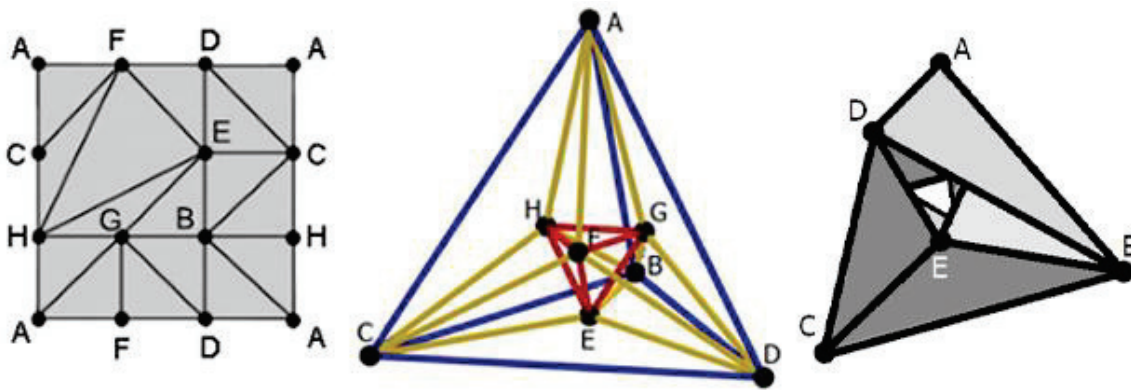


Fig. 1: Combinatorial triangulation of the torus (left) and its geometric realization in 3-space (right) using the Schlegel diagram (its 1-dimensional skeleton shown in the middle).

Let Λ be the set of all pairwise distinct (in the vertex-labeled sense) combinatorial triangulations of the torus with a vertex-labeled graph of the 4-dimensional hyperoctahedron isomorphic to the complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$. Historically, the equation $|\Lambda| = 12$ was first established [3, 4] using a computer. The same result was obtained [1] without using a computer by an algebraic formula for decomposition into orbits under the action of the automorphism group of the hyperoctahedral graph on the set Λ . Geometrically, this group is realized as a hyperoctahedron symmetry group in \mathbb{R}^4 , and all 12 triangulations are realized as congruent 2-dimensional toroidal polyhedral surfaces (each without self-intersections) in \mathbb{R}^4 [5, 6].

In what follows, Λ denotes the set consisting of *geometric realizations* of our 12 triangulations as simplicial polyhedra (each without self-intersections) in \mathbb{R}^4 or \mathbb{R}^3 constructed in [5] and [2], respectively. Thus, Λ consists of 12 simplicial toroidal polyhedra with the same 1-skeleton in \mathbb{R}^4 or \mathbb{R}^3 . Below we consider the actions of three important discrete groups on the set Λ .

1) *Hyperoctahedral group* is the group (of order 384) of symmetries of a regular hyperoctahedron in \mathbb{R}^4 , which in fact geometrically realizes the group of combinatorial automorphisms of its graph, $K_{2,2,2,2}$. Under the action of this group on Λ , that set appears as a single orbit of length 12, and the formula for decomposition into orbits takes this form:

$$|\Lambda| = \frac{384}{32} = 12,$$

where “32” of the denominator is the order of the symmetry group of any one (they are all congruent) polyhedral toroidal surface in Λ (see [5]).

2) *Tetrahedral group* is the group (of order 24) of symmetries of a regular 3-dimensional tetrahedron in \mathbb{R}^3 . It is shown [2] how to find explicitly all 12 triangulations that make up the set Λ , in the form of 12 congruent polyhedra with triangular faces in 3-space, using the Schlegel diagram of a 4-dimensional hyperoctahedron (that is, its central projection onto one of its bounding tetrahedra). The 1-dimensional skeleton (graph) of the Schlegel diagram (Fig. 1, in the middle) is the union of the graphs of two regular tetrahedra whose vertex sets are located on two concentric spheres (respectively) with a common center at the origin O , and the smaller of these tetrahedra is obtained from the larger one by a homothety centered at O and with a coefficient of $-1/k$ ($k > 3$). The vertices of the two tetrahedra are connected by all possible edges except that the vertices of the larger tetrahedron are not connected to their homothetic images (respectively). Each symmetry of the larger tetrahedron naturally induces a symmetry of the smaller tetrahedron, and thus we have an action of the tetrahedral group on the set Λ . Thus, the symmetry group of the 1-dimensional skeleton of the Schlegel diagram is the tetrahedral group of order 24, acting on Λ .

Theorem 1. *When the tetrahedral group acts on a set Λ in \mathbb{R}^3 , this set forms an orbit of length 12 (which means that all 12 polyhedra are congruent), and the orbit decomposition formula reads as follows:*

$$|\Lambda| = 12 = \frac{24}{2},$$

where “2” in the denominator says that each of the 12 toroidal polyhedra has exactly one nontrivial symmetry, the rotation by an angle of 180° about the corresponding bimedian (edge median) of the tetrahedron.

Conjecture: The triangulation in Fig. 1 cannot be geometrically realized in 3-space as a polyhedron with more than one non-trivial symmetry.

3) *Klein’s four-group* (of order 4) can be realized geometrically as the group of rotations of a regular tetrahedron in \mathbb{R}^3 by an angle of 180° about its three bimedians (respectively), together with the identity rotation. This group is a subgroup of the tetrahedral group (2).

Theorem 2. *Under the action of the Klein four-group on the set Λ in \mathbb{R}^3 , this set decomposes into six orbits of length 2 each, where the pair of polyhedra in each orbit don’t even have a single face in common, although they all have the same 1-skeleton. The orbit decomposition formula takes the following form:*

$$|\Lambda| = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 12.$$

References

1. Lawrencenko S., Magomedov A. M. *Generating the triangulations of the torus with the vertex-labeled complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$* // Symmetry. 2021. Vol. 13, No 8. Art. 1418.
2. Lawrencenko S., Lao A. *Pairs of polyhedra sharing the same 1-skeleton in 3D and 4D spaces, without a single common face* // J. Discrete Math. Sci. Cryptography. 2022. Vol. 25, No 1. P. 253–263.
3. Lavrenchenko S. A. *The number of triangular packings of a vertically labeled graph on a torus* (in Russian) // Ukrain. Geom. Sb. 1988. No 31. P. 76–90; (translation in J. Soviet Math. 1991. Vol. 54, No 1. P. 719–728.
4. Lawrencenko S. A. *Explicit lists of all automorphisms of the irreducible toroidal triangulations and of all toroidal embeddings of their labeled graphs* (in Russian) // Yangel Kharkov Institute of Radio Electronics,

Kharkov (1987). Report deposited at UkrNIINTI (Ukrainian Scientific Research Institute of Scientific and Technical Information), report no. 2779-Uk87 (1 Oct. 1987).

5. Lawrencenko S. *Polyhedral suspensions of arbitrary genus* // Graphs Combin. 2010. Vol. 26, No 4. P. 537–548.

6. Maslova Y. V., Petrov M. V. *Lavrenchenko's polyhedron of genus one* (in Russian) // Some Actual Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education; Herzen Readings—2018 (St. Petersburg, April 9–13, 2018) Russian Herzen State Pedagogical University: St. Petersburg, 2018. P. 162–168.

RINGS GENERATED BY CHARACTER VALUES AND REPRESENTATIONS OF FINITE GROUPS

D. Malinin

Минск, Беларусь, dmalinin@gmail.com

We study realization fields and integrality of characters of finite subgroups of $GL_n(\mathbb{C})$ and related lattices with a focus on the integrality of characters of finite groups G . We are interested in the arithmetic aspects of the integral realizability of representations of finite groups, order generated by the character values, the number of minimal realization splitting fields, and, in particular, consider the conditions of realizability in the terms of Hilbert symbols and quaternion algebras and some orders generated by character values over the rings of rational and algebraic integers. We also consider fields, generated by characters, Navarro-Tiep conjecture on fields of values of p' -degree irreducible characters of G and its relationship to Galois-McKay conjecture.

SOME ASPECTS OF THE COMPUTATIONAL THEORY OF FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V.I. Murashka

Francisk Skorina Gomel State University, 104 Sovetskaya str, Gomel, 246028
mvimath@yandex.ru

Introduction. All groups considered here are finite. The theory of classes of groups is well developed nowadays (for example, see [1–5]) and has various applications (for example, in the theory of formal languages [6], in the solution of Yang-Baxter equation [7] and etc.) The computational theory of formations, Fitting and Schunk classes is not so developed as its theoretical part. It is discussed only in papers [8–10].

Recall that a formation is a class of groups \mathfrak{F} which is closed under taking epimorphic images (i.e. from $G \in \mathfrak{F}$ and $N \trianglelefteq G$ it follows that $G/N \in \mathfrak{F}$) and subdirect products (i.e. from $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ and $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ it follows that $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$). For a non-empty formation \mathfrak{F} there exists in every group G the \mathfrak{F} -residual, i.e. the smallest normal subgroup $G^{\mathfrak{F}}$ of G with $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. The algorithms for computing the \mathfrak{F} -residual of a soluble group were presented in [8, 9]. The computation of the \mathfrak{F} -residual of not necessary soluble groups was discussed in [10].

A class of groups \mathfrak{F} is called a Fitting class if it is normally hereditary (i.e. from $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ it follows that $N \in \mathfrak{F}$) and N_0 -closed (i.e. from $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ and $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ it follows that $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$). For a Fitting class \mathfrak{F} in every group G there exists the \mathfrak{F} -radical $G_{\mathfrak{F}}$ of G that is the greatest normal \mathfrak{F} -subgroup of G . If \mathfrak{F} is a Fitting class and a formation, then \mathfrak{F} is called the Fitting formation. The algorithm for computing the \mathfrak{F} -radical (of a soluble group) was presented in [9]. Note that as was mentioned in [9] suggested there algorithm (even when \mathfrak{F} is the formation of all nilpotent groups) for a permutation group of degree $3n$ may require to check for nilpotency 2^n subgroups.

Let \mathfrak{F} be a class of groups. A chief factor H/K of G is called \mathfrak{F} -central in G provided that the semidirect product $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ of H/K with $G/C_G(H/K)$ corresponding to the action by conjugation of G on H/K belongs to \mathfrak{F} (see [5, p. 127–128]). The \mathfrak{F} -hypercenter $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ is the

greatest normal subgroup of G all whose G -composition factors are \mathfrak{F} -central. The algorithms for the computation of the \mathfrak{F} -hypercenter were not suggested before for a formation \mathfrak{F} . Note that if \mathfrak{F} is a Baer-local (composition) Fitting formation, then

$$\mathfrak{F} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} = 1) = (G \mid G_{\mathfrak{F}} = G) = (G \mid Z_{\mathfrak{F}}(G) = G).$$

The methods of computational group theory depend on the presentation of a group. Such methods are the most developed for the case of permutation groups (see [11]). In the talk the polynomial (in n) time algorithms for finding the \mathfrak{F} -residual, the \mathfrak{F} -radical and the \mathfrak{F} -hypercenter of a permutation group of degree n will be discussed (see [10, 12, 13]). One of them is the following result.

Recall [14] (see also [1, Chapter 6]) that a formation \mathfrak{F} has the Shemetkov property (resp. in \mathfrak{S}) if every (resp. soluble) \mathfrak{F} -critical group is either a Schmidt group or a cyclic group of prime order. Note that if a hereditary local formation \mathfrak{F} has the Shemetkov property (and contains all nilpotent groups) then it can be locally defined by f where $f(p) = \mathfrak{G}_{g(p)}$ and g assigns to a prime p a set of primes $g(p)$ with $p \in g(p)$. The converse is not true. That is why local formations locally defined by f where $f(p) = \mathfrak{G}_{g(p)}$ are of particular interest in the theory of formation.

Theorem *Let g be a function which assigns to a prime p a set of primes $g(p)$ with $p \in g(p)$ and $h(p) = \mathfrak{G}_{g(p)}$. Assume that $g(p) \cap \pi(G)$ can be computed in a polynomial time for every $p \in \pi(G)$. Let \mathfrak{F} be a local formation defined by h . Then $(G/K)^{\mathfrak{F}}$, $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ and $Z_{\mathfrak{F}}(G/K)$ can be computed in a polynomial time for every permutation group G of degree n and its normal subgroup K .*

This work is supported by BRFFR $\Phi 23PH\Phi-237$.

References

1. Ballester-Bollinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Netherlands: Springer, 2006.
2. Doerk K., Hawkes T. O. *Finite Soluble Groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. Guo W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2015.
4. Shemetkov L. A., *Formations of finite groups*. M: Nauka, 1978 (In Russian).
5. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of algebraic systems*. M: Nauka, 1989 (In Russian).
6. Ballester-Bollinches A., Pin J.-E., Soler-Escrivá X. *Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited* // Forum Math. 2014. Vol. 26, No 6. P. 1737–1761.
7. Ballester-Bollinches A., Esteban-Romero R., Jiménez-Seral P., Pérez-Calabuig V. *On Yang-Baxter groups* // Quaest. Math. 2023. Vol. 46. P. 1273–1281.
8. Eick B., Wright C. R. B. *Computing Subgroups by Exhibition in Finite Solvable Groups* // J. Symb. Comput. 2002. Vol. 33, No 2. P. 129–143.
9. Höfling B. *Computing Projectors, Injectors, Residuals and Radicals of Finite Solvable Groups* // J. Symb. Comput. 2001. Vol. 32, No 5. P. 499–511.
10. Murashka V. I. *Formations of finite groups in polynomial time: \mathfrak{F} -residuals and \mathfrak{F} -subnormality* // J. Symb. Comput. 2024. Vol. 122. Art. 102271.
11. Seress Á. *Permutation Group Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
12. Murashka V. I. *Formations of Finite Groups in Polynomial Time: the \mathfrak{F} -Hypercenter* // arXiv:2407.13606, 18 Jul 2024.
13. Murashka V. I. *Formations of Finite Groups in Polynomial Time: the \mathfrak{F} -Radical* // arXiv:2407.12720 [math.GR], 17 Jul 2024.
14. Semenchuk V. N., Vasilev A. F. *Studies of normal and subgroup structure of finite groups*. Nauka i tehnika, 1984, ch. *Characterization of local formations F by properties of minimal non- F -groups*. P. 175–181.

FINITE HOMOGENEOUS METRIC SPACES WITH SPECIAL PROPERTIES

Yu.G. Nikonorov

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of
the Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russia,
nikonorov2006@mail.com

This talk is based on the results obtained in joint papers with Prof. V. N. Berestovskii (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk), see the list of references.

A finite metric space (M, d) is homogeneous if its isometry group $\text{Isom}(M)$ acts transitively on M . We deal with finite subsets of Euclidean space \mathbb{R}^n . It is assumed that any such set M is supplied with the metric d induced from \mathbb{R}^n .

Proposition 1 [1]. *Let $M = \{x_1, \dots, x_q\}$, $q \geq n + 1$, be a finite homogeneous metric subspace of Euclidean space \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Then M is the vertex set of a convex polytope P , that is situated in some sphere in \mathbb{R}^n with radius $r > 0$ and center $x_0 = \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^q x_k$. In particular, $\text{Isom}(M) \subset O(n)$.*

Therefore, a finite homogeneous metric subspace of an Euclidean space represents the vertex set of a compact convex polytope with the isometry group that is transitive on the vertex set. The complete description of the metric properties of the vertex sets of regular and semiregular polytopes in Euclidean spaces from the point of view of the normal homogeneity and the Clifford — Wolf homogeneity was obtained in [1, 2, 3], see also surveys [4] and [7]. Perfect and almost perfect homogeneous polytopes are studied in [6]. Some properties of m -point homogeneous finite subspaces of Euclidean spaces were discussed in [5] and [8].

Many of the obtained results are planned to be discussed in the talk, with particular attention paid to the m -point homogeneity property.

Definition 1. *A metric space (M, d) is called m -point homogeneous, $m \in \mathbb{N}$, if for every m -tuples (A_1, A_2, \dots, A_m) and (B_1, B_2, \dots, B_m) of elements of M such that $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$, $i, j = 1, \dots, m$, there is an isometry $f \in \text{Isom}(M)$ with the following property: $f(A_i) = B_i$, $i = 1, \dots, m$.*

Let P be a non-degenerate convex polytope in \mathbb{R}^n with the barycenter in the origin $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. The symmetry group $\text{Symm}(P)$ of P is the group of isometries of \mathbb{R}^n that preserve P . It is clear that each $\psi \in \text{Symm}(P)$ is an orthogonal transformation of \mathbb{R}^n (obviously, $\psi(O) = O$ for any symmetry ψ of P).

Recall that a polytope P in \mathbb{R}^n is *homogeneous* (or *vertex-transitive*) if its symmetry (isometry) group acts transitively on the set of its vertices. The following definition is natural.

Definition 2. *A convex polytope P in \mathbb{R}^n is called m -point homogeneous if its vertex set (with induced metric d from \mathbb{R}^n) is m -point homogeneous.*

Some approaches to the classification of homogeneous (1-homogeneous) polytopes are considered in [9, 10, 11, 12, 13]. The following problem is natural:

Problem 1 [5]. *Classify all convex polytopes P in \mathbb{R}^n whose vertex sets are m -point homogeneous, where $m \geq 2$.*

The main goal of this talk is the classification of m -point homogeneous polyhedra in \mathbb{R}^3 for all $m \geq 2$. The following result is very important for our goals.

Corollary 1 (Corollary 3.2 in [5]). *Every n -dimensional convex n -point homogeneous polytope in \mathbb{R}^n which has the vertex set M with the cardinality $m \geq n + 1$, is m -point homogeneous.*

Hence, for $n = 3$, the 3-point homogeneity of a non-degenerate polyhedron P implies its m -point homogeneity for all $m \in \mathbb{N}$. One of our main results is

Theorem 1 (Theorem 5 in [8]). *Let P be a 2-point homogeneous polyhedron in \mathbb{R}^3 . Then one of the following properties holds:*

- 1) P is a regular polyhedron (tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron, or icosahedron);
- 2) P is a cuboctahedron;
- 3) P is a homogeneous tetrahedron with four pairwise isometric faces that are acute triangles;
- 4) P is a right prism over a regular n -gon, $n \geq 3$, such that the set of distances between vertices of P from a fixed base has empty intersection with the set of distances between vertices of P from distinct bases;

- 5) P is a right antiprism over a regular n -gon, $n \geq 2$, such that the set of distances between vertices of P from a fixed base has empty intersection with the set of distances between vertices of P from distinct bases;
- 6) P is a rectangular parallelepiped of size $a \times b \times c$, where $a \leq b \leq c$ and $a^2 + b^2 \neq c^2$.

It should be noted that the list of 3-point homogeneous polyhedra (Theorem 6 in [8]) is shorter than the above list of 2-point homogeneous polyhedra exactly in one item: the regular dodecahedron is 2-point homogeneous but is not 3-point homogeneous.

References

1. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Finite homogeneous metric spaces* (in Russian) // Sib. Mat. Zh. 2019. Vol. 60, No 5. P. 973–995. English translation: Siberian Math. J. 2019. Vol. 60, No 5. P. 757–773.
2. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Finite homogeneous subspaces of Euclidean spaces* (in Russian) // Mat. Trudy. 2021. Vol. 24, No 1. P. 3–34. English translation: Siberian Advances in Mathematics. 2021. Vol. 31, No 3. P. 155–176.
3. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Semiregular Gosset polytopes* (in Russian) // Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat. 2022. Vol. 86, No 4. P. 51–84. English translation: Izv. Math. 2022. Vol. 86, No 4. P. 667–698.
4. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *On finite homogeneous metric spaces* // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2022, Vol. 2, No 2. P. 51–61.
5. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *On m -point homogeneous polytopes in Euclidean spaces* // Filomat. 2023. Vol. 37, No 25. P. 8405–8424.
6. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Perfect and almost perfect homogeneous polytopes* // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 271. P. 762–777.
7. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *On the Geometry of Finite Homogeneous Subsets of Euclidean Spaces, In: Surveys in Geometry II, eds. A. Papadopoulos*. Springer, Cham, 2024. P. 305–335.
8. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *On m -point homogeneous polyhedra in 3-dimensional Euclidean space* // Preprint. 2024. arXiv:2408.09911.
9. Edmonds A. L. *The geometry of an equifacetal simplex* // Mathematika. 2005. Vol. 52, No 1–2. P. 31–45.
10. Edmonds A. L. *The partition problem for equifacetal simplices* // Beitr. Algebra Geom. 2009. Vol. 50, No 1. P. 195–213.
11. Robertson S. A. *Polytopes and symmetry*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 90. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1984.
12. Robertson S. A., Carter S. *On the Platonic and Archimedean solids* // J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 2. 1970. Vol. 1. P. 125–132.
13. Robertson S. A., Carter S., Morton H. R. *Finite orthogonal symmetry* // Topology. 1970. Vol. 9. P. 79–95.

THE MINIMAL POLYNOMIALS OF ELEMENTS IN THE ORDINARY REPRESENTATIONS OF SYMMETRIC GROUPS

A.M. Staroletov

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Acad. Koptyug avenue, 630090, Novosibirsk, Russia, staroletov@math.nsc.ru

Let F be an algebraically closed field and G a finite group. Consider some irreducible representation of G over F . For $g \in G$ denote by $\deg(\rho(g))$ the degree of the minimal polynomial of the matrix $\rho(g)$ and by $o(g)$ the order of g modulo $Z(G)$. The general problem on finding the minimal polynomials was formulated in [1] as follows.

Problem 1. Determine all possible values for $\deg(\rho(g))$, and if possible, all triples (G, ρ, g) with $\deg(\rho(g)) < o(g)$, in the first instance under the condition that $o(g)$ is a p -power.

There are many publications in this area and we mention only the results on symmetric and alternating groups of degree n , which will be denoted by A_n and S_n , respectively. The minimal polynomials of prime order elements of A_n and S_n in the ordinary or projective representations were found in [2]. For the algebraically closed fields of positive characteristic p , Kleshchev and Zalesski [3] described the minimal polynomials of order p elements in the irreducible representations of covering groups of A_n . In [4], the Problem 1 was solved for the powers of cycles from the symmetric (alternating) group in characteristic 0. In this talk, we discuss these results and some new ones related to Problem 1 for S_n and A_n .

Acknowledgments. The work was supported by the Russian Science Foundation, project 24-11-00119.

References

1. Tiep P. H., Zaleskii A. E. *Hall-Higman type theorems for semisimple elements of finite classical groups* // Proc. London Math. Soc. 2008. Vol. 97. P. 623–668.
2. Zaleskii A. E. *Eigenvalues of prime-order elements in projective representations of alternating groups* (in Russian) // Vestsi Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz. Mat.-Navuk 1996, Vol. 131, No 3. P. 41–43.
3. Kleshchev A. S., Zaleski A. E. *Minimal polynomials of elements of order p in p -modular projective representations of alternating groups* // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 132. P. 1605–1612.
4. Yang N., Staroletov A. M. *The minimal polynomials of powers of cycles in the ordinary representations of symmetric and alternating groups* // J. Algebra Appl. 2021, Vol. 20, No 11. Art. 2150209.

ON MINIMAL AND STABLE MINIMAL HYPERSURFACES IN EUCLIDEAN SPACES AND RIEMANNIAN MANIFOLDS

S. Stepanov^{1,2}, I. Tsyganok², J. Mikeš³

¹Russian Institute for Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences,
20 Usievicha street, Moscow, 125190 Russia, s.e.stepanov@mail.ru

²Finance University, 49-55 Leningradsky Prospect, Moscow, 125468 Russia i.i.tsyganok@mail.ru

³Palacky University, 17. listopadu 12, Olomouc, 77146 Czech Republic, josef.mikes@upol.cz

Introduction. The study of minimal surfaces has a long history in geometry (see [1, Chapter 5]). We recall that an n -dimensional minimal submanifold (M, g) in an m -dimensional Riemannian manifold (\bar{M}, \bar{g}) for $m > n$, is a critical point of its volume functional. In addition, any such submanifold (M, g) is said to be stable if the second variation of its volume is always non-negative for any normal deformation with compact support.

The main goal of our report is to obtain new rigidity results for minimal and stable minimal hypersurfaces in Euclidean space and Riemannian manifolds. The method of our research is the generalized Bochner technique (see [2]). They allowed us to obtain new results in this actively studied topic.

Complete minimal hypersurfaces. The second fundamental form φ of a minimal hypersurface (M, g) in \mathbb{R}^{n+1} is a harmonic symmetric bilinear form (see [3, p. 350]). At the same time, we proved in [4] that on a complete Riemannian manifold (M, g) with non-negative sectional curvature there is no nonzero harmonic form $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ such that $\int_M \|\varphi\|^p dv_g < \infty$ at least for one $p \geq 1$. Then we have

Theorem 1. *There is no complete minimal hypersurface $(M, g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ with non-negative Ricci curvature satisfying the condition $\int_M \|\varphi\|^p dv_g < \infty$ for the second fundamental form φ of (M, g) and for at least one $p \geq 1$.*

Let (M, g) be a complete stable minimal hypersurface in \mathbb{R}^{n+1} , then there exists a smooth positive function u satisfying the Jacobi equation $\Delta_g u = -\|\varphi\|^2 u$, where $\Delta_g u$ is the Laplace–Beltrami operator (see [6]). Then we have

Theorem 2. *Let (M, g) be an n -dimensional, $n \geq 2$, complete, stable minimal hypersurface in \mathbb{R}^{n+1} with Ricci curvature Ric_g is bounded below. If there is a function $0 < u \in L^p(M, g)$ at least for one $0 < p \leq 1$ such that it solves the Jacobi equation, then (M, g) is a hyperplane.*

Let (M, g) be a hypersurface in a Riemannian manifold (\bar{M}, \bar{g}) . Based on the above and [5] we obtain the following.

Corollary 1. *Let (M, g) be a complete minimal hypersurface in a Riemannian manifold (\bar{M}, \bar{g}) of positive constant sectional curvature. If its sectional curvature is nonnegative and second fundamental form φ satisfies the condition $\int_M \|\varphi\|^p dv_g < \infty$ at least for one $p \geq 1$, then (M, g) is a spherical space form.*

The stability of (M, g) is equivalent to the non-positivity of the Jacobi operator $L_g := \Delta_g + \|\varphi\|^2 + Ric_{\bar{g}}(v, v)$, where $Ric_{\bar{g}}(v, v)$ is the Ricci curvature of (\bar{M}, \bar{g}) in the direction of the unite normal vector field v to (M, g) (see [5]). Then the analogue of Theorem 2 is valid.

Theorem 3. *Let (M, g) be an oriented, complete, stable minimal hypersurface in a Riemannian manifold (\bar{M}, \bar{g}) . If there exists a smooth function $0 < u \in L^p(M, g)$ satisfying inequality $L_g u \leq 0$ at least for one $0 < p \leq 1$, then (M, g) is totally geodesic submanifold in (\bar{M}, \bar{g}) .*

References

1. Chen B.-Y. *Riemannian submanifolds* // Handbook of differential geometry, Vol. 1, Amsterdam: North Holland, 2000. P. 187–418.
2. Mikeš J., Stepanov S. *What is the Bochner technique and where is it applied* // Lobachevskij J. Math. 2022. Vol. 43, No 3. P. 709–719.
3. Petersen P. *Riemannian Geometry*. Springer: Basel, Switzerland, 2016.
4. Shandra I., Stepanov S., Mikeš J. *On higher-order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds* // Ann. Global Anal. Geom. 2019. Vol. 56. P. 429–442.
5. Catino G., Mastrolia P., Roncoroni A. *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces* // Geom. Funct. Anal. 2024. Vol. 34. P. 1–18.

GENUS OF DIVISION ALGEBRAS OVER FIELDS WITH INFINITE TRANSCENDENCE DEGREE

S.V. Tikhonov¹,

¹Belarusian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030, tikhonovsv@bsu.by

Let F be a field and $Br(F)$ its Brauer group. If classes of two central simple F -algebras generate the same subgroup of the group $Br(F)$, then these algebras have the same splitting fields. Amitsur's theorem on generic splitting fields yields that if two central division F -algebras share the same splitting fields, then these algebras have the same degree and their classes generate the same subgroup of $Br(F)$. However, if one considers only finite-dimensional splitting fields, the situation is not so clear. In this regard, the notion of genus of a division algebra has been introduced.

Definition. The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra D over a field F is defined as the set of classes $[D'] \in Br(F)$, where D' is a central division F -algebra having the same maximal subfields as D .

Different variations of the notion of the genus are mentioned in [1] and [2].

In [3], the authors describe a general approach to proving the finiteness of $\mathbf{gen}(D)$ and estimating its size that involves the unramified Brauer group with respect to an appropriate set of discrete valuations of F . In [4] and [5], it is proved that the genus is finite for any central division algebra over a finitely generated field.

Over general fields, the genus of algebras can be infinite. In [6], the authors give an example of a quaternion algebra D over a large center, constructed by iterative composition of function fields, such that $\mathbf{gen}(D)$ does not consist of a single class. In [7], it is shown that there exist quaternion division algebras with infinite genus over fields with infinite transcendence degree over the prime subfield. In [8], these results are generalized to the case of division algebras of any prime degree. In [9], the authors constructed examples of infinite collections of division algebras over a field which share all the same finite splitting fields and splitting fields which are function fields of curves of genus at most 1.

We prove the finiteness of the genus of finite-dimensional division algebras over many infinitely generated fields. More precisely, let K be a finite field extension of a field which is a purely transcendental extension of infinite transcendence degree of some subfield. We show that if D is a central division K -algebra, then $\mathbf{gen}(D)$ consists of Brauer classes $[D']$ such that $[D]$ and $[D']$ generate the same subgroup of $Br(K)$. In particular, the genus of any division K -algebra of exponent 2 is trivial. Note that the family of such fields is closed under finitely generated extensions.

References

1. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. *Division algebras with the same maximal subfields* // Usp. Mat. Nauk. 2015. Vol. 70, No 1. P. 89–122 (in Russian). English translation: Russ. Math. Surv. 2015. Vol. 70, No 1. P. 83–112.
2. Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A. S., Rowen L. H., Saltman D. *Division algebras with common subfields* // Manuscripta Math. 2022. Vol. 169, No 1–2. P. 209–249.
3. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. *The genus of a division algebra and the unramified Brauer group* // Bull. Math. Sci. 2013. Vol. 3, No 2. P. 211–240.

4. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. *On the size of the genus of a division algebra* // Proc. Steklov Inst. of Math. 2016. Vol. 292, No 1. P. 63–93.
5. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. *The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and generalizations* // Israel J. Math. 2020. Vol. 236, No 2. P. 747–799.
6. Garibaldi G., Saltman D. *Quaternion algebras with the same subfields* // Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, Dev. Math. 18, Springer, New York, 2010. P. 225–238.
7. Meyer J. S. *Division algebras with infinite genus* // Bull. London Math. Soc. 2014. Vol. 46, No 3. P. 463–468.
8. Tikhonov S. V. *Division algebras of prime degree with infinite genus* // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2016. Vol. 292. P. 264–267 (in Russian). English translation: Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. P. 256–259.
9. Krashen D., Lieblich M. *Transcendental splitting fields of division algebras* // Amitsur Centennial Symposium, Contemp. Math., 800 Israel Math. Conf. Proc., A. Mann, L. H. Rowen, D. J. Saltman, A. Shalev, L. W. Small, U. Vishne eds. American Mathematical Society, RI, 2024. P. 191–202.

СЕКЦИЯ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

К ЧИСЛЕННЫМ МОДЕЛЯМ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Г. Абрашина-Жадаева

Минск, Беларусь, zhadaeva282@gmail.com

Введение. Рассматривается операторно-разностный подход [1] и показано, что развитая теория многокомпонентного расщепления (например, см. [2], [3] и цитируемую там литературу) может быть расширена на класс задач с дифференциальными уравнениями в частных производных дробных порядков по времени [4–10].

К многокомпонентным векторным схемам. В некотором гильбертовом пространстве H рассматривается абстрактная задача Коши, следуя [1]:

$$\partial_{0t}^\gamma u + Au = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

Здесь $\partial_{0t}^\gamma u$ – дробная производная в смысле Герасимова-Капуто (см., например, [4], [8]), а A – линейный положительный оператор в H , порожденный эллиптическим дифференциальным оператором L и системой граничных условий.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть в абстрактной задаче Коши (1) оператор $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$, где A_α – положительно определенные операторы в H , тогда $u_\alpha(t)$ совпадает с решением задачи $u(t)$ для любых $t \in [0, T]$, $\alpha = 1, \dots, p$ в смысле терминов

$$Z_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{z_\alpha(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\gamma} = 0, \quad (2)$$

$$z_\alpha = u_\alpha - u, \quad Z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t)),$$

$$\partial_{0t}^\gamma z_\alpha + \sum_{\beta=1}^p A_\beta z_\beta = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (3)$$

с начальными условиями

$$z_\alpha(0) = 0 \in H, \quad \alpha = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Аналогично [3], [6] доказывается, что решение вспомогательной системы устойчиво и переход к дробной задаче Коши корректен. Таким образом, с полным основанием мы обобщаем все результаты, полученные ранее в работах, например, см. [3] и цитируемую там литературу и, опираясь на результаты [8–10] для решения многомерных задач, описывающих аномальный перенос обусловленный эффектами памяти. Полагая, что решение $u(t)$ обладает необходимой гладкостью, будем иметь:

$$\partial_{0t_j}^\gamma u = \frac{\tau^{(1-\gamma)}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^j b_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + O(\tau), \quad b_i = (j+1-i)^{1-\gamma} - (j-i)^{1-\gamma}.$$

Последнее выражение приведем к виду (см., например, [10])

$$\partial_{0t_j}^\gamma u = \Delta_{0t}^\gamma u + O(\tau) = \frac{\tau^{(1-\gamma)}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^j b_i u_i + O(\tau), \quad u_{t_j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\tau}$$

или [7]

$$\tilde{\Delta}_{0t}^\gamma u = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} [u_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_i - b_{j-1} u_0] + O(\tau^{(2-\gamma)}), \quad b_i = (j+1-i)^{1-\gamma} - (j-i)^{1-\gamma}.$$

На основании выше сказанного для решения системы (3), (4) на сетке \bar{w}_τ приведем некоторые новые разностные схемы с учетом [3]:

$$\Delta_{0t}^\gamma y + \sum_{\beta=1}^{\alpha} \tilde{A}_\beta y_\beta^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^p \tilde{A}_\beta y_\beta^s = \varphi^*, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Delta}_{0t}^\gamma y + \sigma(\tilde{A}_\alpha y_\alpha^{s+1} - \tilde{A}_\alpha y_\alpha^s) + \sum_{\beta=1}^p \tilde{A}_\beta y_\beta^s = \varphi^*, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (6)$$

$$\tilde{A}_\alpha = \Gamma(2 - \alpha)A, \quad \varphi^* = \Gamma(2 - \alpha)\hat{f} - \tau^{1-\gamma} \sum_{l=0}^s b_l y_t^l,$$

$\Gamma(\cdot)$ - гамма функция, $0 < \gamma < 1$. Если просуммировать, например, (6) по $\alpha = \overline{1, p}$, то получим аналог неявной разностной схемы [1], см. в [3] при $\tilde{y} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha$. В [2–3] разностная схема изучена для решения начально-краевой задачи дробной диффузии в цилиндре основанием которого является p -мерный параллелепипед и доказаны соответствующие теоремы об устойчивости. На основе [2], [7] при $\sigma = p$ и при $0 < \sigma < 1$ схема (6) безусловно устойчива, а при $\gamma \rightarrow 1$ следует известный результат из [1]. Сама реализация алгоритма (6) подпадает под вариант распараллеленных вычислений. Например, при $p = 2$ и $\sigma = 1$ алгоритм (6) при выборе операторов \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 треугольными, согласно [1], [3], имеем распараллеленный вариант попеременно-треугольного метода.

Заключение. Идеология многокомпонентного расщепления, представленная в работах [2–6] для построения векторных адитивных схем, может быть применена для численного решения начально-краевых задач в многомерной области для уравнения аномальной диффузии с учетом различных аппроксимаций дробной производной по времени (см. [7] и цитируемую там литературу), а так же [12] на случай дробной производной в смысле Капуто-Фабрицио и в методе декомпозиции области [11]. Теоретические исследования подтверждены многочисленными вычислительными экспериментами [4], [5], [7].

Литература

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М., 1989.
2. Абрашин В. Н. *Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики* // Дифференциальные уравнения. 1990. Vol. 26, No 2. С. 311–323.
3. Абрашина-Жадаева Н. Г. *Векторные адитивные схемы для задач математической физики*. М.: URSS, 2023.
4. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. *Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 819–825.
5. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. *Многокомпонентные методы для аномальных процессов диффузии* // Труды 1-ого международного семинара АМАДЕ-2021, 2022. С. 5–11.
6. Абрашина-Жадаева Н. Г. *Совершенствование численных методов расчета задач математической физики с уравнением влагопереноса* // Материалы международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2022), 2022. Ч. 2. С. 304–310.
7. Abrashina-Zhadaeva N. G., Romanova N. S. *A splitting type algorithm for numerical solution of PDEs of fractional order* // Mathem. Modeling and analysis. 2007. Vol. 12, No 4. P. 399–408.
8. Podlubny I. *Fractional differential equations*. New York: Academic Press, 1999.
9. Алиханов А. А. *Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 660–666.
10. Шханукова М. М., Шхануков-Лафишев М. Х. *Локально-одномерные разностные схемы для уравнений диффузии дробного порядка* // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 10. С. 1878–1887.
11. Жадаева, Н. Г., Самарская Е. А. *Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач* // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 2. С. 225–231.
12. Caputo M. and Fabrizio M. *Damage and fatigue described by a fractional derivative model* // J. Comput. Phys. 2014. Vol. 293. P. 400–408.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА**А.Н. Авлас, Г.Ф. Громыко**

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
{aulas, grom}@im.bas-net.by

Развитие современных отраслей промышленности, создание новых технологий во многом связано с применением различных композиционных материалов. Композиционные материалы имеют широкий круг применения, например, при создании покрытий различного типа: упрочняющих, теплозащитных, фрикционных, антифрикционных и др. Возникает задача либо улучшения свойств имеющихся композиционных материалов, либо задача разработки принципиально новых композиционных материалов с заданными физическими характеристиками.

Прогнозирование свойств композиционного материала является сложной задачей. Физические характеристики композита определяются свойствами составляющих компонент, формой и геометрическими размерами включений, плотностью их укладки и др. Разработка нового материала под заданные свойства даже при небольшом количестве варьирующих компонент, различных вариантах их геометрических свойств, задача трудоемкая, требующая значительных финансовых и временных затрат как на изготовление экспериментальных образцов, так и на их тестирование на испытательном оборудовании.

Процесс разработки композиционного материала, в частности, прогнозирование его свойств, может быть значительно оптимизирован за счет использования математического моделирования. Численное моделирование дает возможным образом сократить финансовые расходы и время на разработку, а также рассмотреть большее количество вариантов компоновки композита и провести оценку влияния порошковых добавок на его эффективные свойства.

Работа посвящена методу расчета эффективных механических характеристик композиционного материала с порошковыми включениями. По аналогии с предыдущими исследованиями по нахождению эффективного коэффициента теплопроводности [1,2], применяется подход, основанный на прямом численном моделировании задачи упругости в плоской постановке на представительном объеме [3]. Для материалов с регулярной структурой в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Сочетание структурных элементов разного масштаба в представительном объеме приводит к использованию сеточных методов. Поэтому ячейка периодичности должна быть относительно небольшой по размерам, чтобы можно было ввести достаточно подробную сетку, способную отразить наличие структурных элементов минимальных размеров. Следуя подходу [3], ищется отклик представительного объема на внешние воздействия.

Расчетную область представительного объема выбираем в виде прямоугольника. Для нахождения модуля Юнга (модуля упругости первого рода) предпочтительнее использовать решения прямых задач об одноосном или двуосном растяжении представительного объема. Поэтому граничные условия сформулируем следующим образом: на верхней и нижней границах имитируем нагрузку растяжения вдоль вертикальной оси, заданную смещением границ вдоль нормали к ней и отсутствием касательных смещений на ней; на боковых границах – зададим условия скольжения без трения вдоль жесткой стенки. Предполагаем также, что механические свойства матрицы и включений известны и контактные границы между матрицей и включениями являются идеальными. Разбиение расчетной сетки делается таким образом, чтобы сеточные узлы приходились на границы раздела фаз. В этом случае внутри каждого элементарного сеточного объема механические характеристики его определяются свойствами фазы, попавшей в этот элемент, и не претерпевают разрывов. Когда принимается, что адгезия на границах ячейки идеальна, то при расчете в процессе всего деформирования новые дополнительные узлы и ячейки не вводятся. При расчете напряженно-деформированного состояния композиции материалы матрицы и включений рассматривают как однородные нелинейно-упругие среды с известными механическими свойствами. Решением задачи упругости на выбранной сетке получаем детальные распределения напряженно-деформированного состояния в выбранных узлах сетки с точностью до сеточного шага.

Используя выбранную процедуру осреднения по представительному объему, получим эффективные характеристики композиционного материала. В частности, модуль упругости представительного объема можно вычислить исходя из энергетических соображений [3]. Энергия всего объема материала в предположении, что он деформируется как однородное упругое тело, равна энергии неоднородного тела из композиционного материала, в котором найденные деформации и напряжения в каждой сеточной ячейке суммируются. Из этого равенства находится эффективный модуль упругости.

Литература

1. Громько Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф., Лешок А. В. *Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала* // Сборник «Порошковая металлургия». 2020. Вып. 43. С. 132–139.
2. Авлас А. Н. *Численный расчёт эффективного коэффициента теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 1. С. 91–102.
3. Люкшин Б. А. и др. *Компьютерное моделирование и конструирование наполненных композиций*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

В.М. Волков, Дун Цзинхуэй, Г.А. Расолько

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
{volkovvm,mmf.dunc1,rasolka}@bsu.by

Проведен сравнительный анализ эффективности спектрального и разностного методов на примере решения двумерной краевой задачи Дирихле для эллиптического уравнения со смешанными производными при пониженных требованиях гладкости коэффициентов и решения задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ удовлетворяют условию эллиптичности:

$$\sigma_{xy}^2(x, y) = \sigma_{yx}^2(x, y) < \sigma_{xx}(x, y)\sigma_{yy}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Для численного анализа задачи (1), (2) были использованы разностные схемы [1,2] и спектральный метод коллокации Чебышева [3,4]. Для реализации рассмотренных методов разработаны итерационные алгоритмы на основе стабилизированной версии метода би-сопряженных градиентов (BCG) [5] с переобуславливателем в виде комбинации диагональной матрицы коэффициентов уравнения и соответствующего дискретного аналога двумерного оператора Лапласа. Диагональная компонента переобуславливателя применялась непосредственно к дискретной модели перед началом итерации, а для обработки второй компоненты переобуславливателя на каждой BCG итерации использован алгоритм Бартелса-Стюарта [6] с предвычисленными компонентами декомпозиции Шура.

Рассмотрена тестовая задача (1), (2) с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y) = d, \quad \sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = \begin{cases} 1 + d, & x \cdot y \geq 0, \\ 1, & x \cdot y < 0, \end{cases} \quad (3)$$

при этом правая часть уравнения такова, что точное решение задачи имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} (\sin(\pi x) \sin(\pi y))^p, & x \cdot y > 0, \\ (\sin(\pi x) \sin(\pi y))^{p+d}, & x \cdot y \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

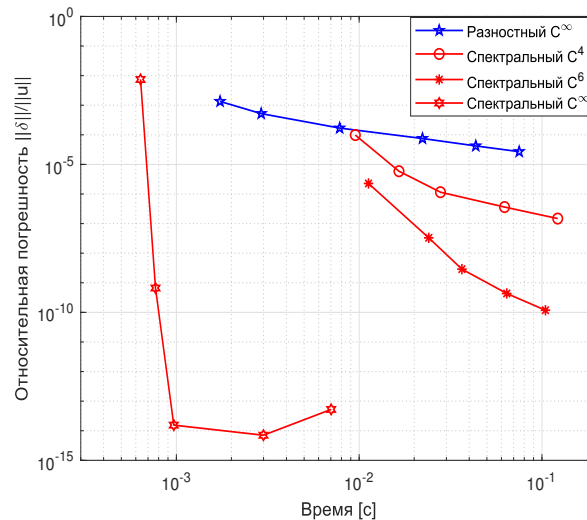


Рис. 1. Зависимость погрешности спектрального и разностного методов от вычислительных затрат для решений, обладающих различной степенью гладкости.

Несложно убедиться, что для $p \geq 1$, в случае $d = 0$ и $d = 1$ решение (4) $u(x, u) \in C^\infty(\Omega)$, и $u(x, u) \in C^{p-1}(\Omega)$ соответственно. Отметим, что для разностных методов [1,2] в случае $u(x, u) \in C^4(\Omega)$ погрешность имеет квадратичную скорость сходимости, $\delta(N) = O(N^{-2})$, где N – количество узлов сетки вдоль каждого координатного направления. Погрешность спектрального метода Чебышева в случае $u(x, u) \in C^\infty(\Omega)$ имеет экспоненциальную скорость сходимости, $\delta(N) = O(\exp(-cN))$.

В связи с этим имеет место:

Утверждение. Рассмотрим два метода решения двумерной эллиптической задачи (1), (2), имеющей достаточную гладкость коэффициентов и решения:

I. Разностный метод второго порядка точности, для которого погрешность $\delta_1 = c_1 N^{-2}$, а вычислительная сложность $M_1 = Q_1 N^2$;

II. Спектральный метод, имеющий экспоненциальную скорость сходимости, $\delta_2 = \exp(-c_2 N)$, и вычислительную сложность $M_2 = Q_2 N^3$.

Здесь c_1, c_2, Q_1, Q_2 — положительные постоянные, не зависящие от N .

Для достижения достаточно малой погрешности приближенного решения, $\delta < \varepsilon_0$, вычислительные затраты разностного метода I превосходят соответствующие вычислительные затраты спектрального метода II.

Полученные оценки согласуются с данными численных экспериментов. В частности, для задачи (1)–(4), решение которой $u \in C^\infty$, спектральный метод Чебышева превосходит в эффективности метод конечных разностей при любых требованиях точности (см. рис. 1).

Как видно из рис.1., преимущества спектрального метода сохраняются и для случая решений меньшей гладкости, вплоть до $u \in C^4$.

Таким образом, для рассмотренного класса задач спектральный метод Чебышева существенно превосходит в эффективности разностные методы, сохраняя преимущество при пониженных требованиях к гладкости решения. Аналогичные показатели эффективности численных методов на основе полиномов Чебышева продемонстрированы на примере решения сингулярных интегральных уравнений (см., например, [7]).

Литература

1. Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Шишкин Г. И. *Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными* // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 17–26.
2. Волков В. М., Проконина Е. В. *Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными* // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2019. Т. 54, № 4. С. 454–459.

3. Дун Дзинхуэй. *Спектральный метод Чебышева для решения двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными* // Материалы XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2023). Могилев, 2023. С. 83–85.
4. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2000.
5. Van der Vorst H. A. *Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems* // SIAM Journal on scientific and Statistical Computing. 1992. Vol. 13, No 2. P. 631–644.
6. Bartels R. H., Stewart G. W. *Algorithm 432 [C2]: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$* // Communications of the ACM. 1972. Vol. 15, No 9. P. 820–826.
7. Расолько Г. А., Волков В. М. *Численное решение одного слабо сингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов для различных классов функций* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 4. С. 546–555.

ЭКРАНИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПЛОСКИМ НАМАГНИЧЕННЫМ ЭКРАНОМ ИЗ ПЕРМАЛЛОЯ

Г.Ф. Громыко, Г.М. Заяц

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
{grom, zayats}@im.bas-net.by

Введение. Электронные устройства, используемые в современной технике, являются чувствительными к воздействию внешних электромагнитных полей, влияющих на точность их функционирования. В связи с этим актуальна проблема защиты микроэлектронной и радиоэлектронной аппаратуры, информационных линий от влияния различного рода электромагнитных воздействий. Наиболее сложными с точки зрения защиты аппаратуры являются импульсные воздействия. К ним относятся как природные явления (атмосферный разряд молнии, вспышки на солнце), так и явления, обусловленные деятельностью человека (короткое замыкание при обрыве линий электропередач, разряд дуговой сварки и т.д.). Одним из способов защиты устройств, конфиденциальной информации является экранирование внешних электромагнитных воздействий с помощью тонкостенных пленочных экранов и покрытий из специальных материалов. При производстве защитных экранов широко используется пермаллой – магнитомягкий, то есть легко намагничиваемый сплав никеля с железом, обладающий высокой магнитной проницаемостью при незначительной толщине материала. Пермаллой характеризуется также полем намагниченности, которое при импульсных полях, то есть в нестационарном режиме, сильно изменяется во времени нелинейным образом. В силу сложности производства, экспериментальный подбор нужных свойств экрана является дорогостоящим процессом, поэтому важнейшим, необходимым инструментом исследования магнитных характеристик экранов служит математическое моделирование, что существенно образом снижает стоимость конструкторских разработок.

Работа [1] посвящена математическому моделированию задачи экранирования внешних импульсных электромагнитных полей плоским намагниченным экраном из пермаллоя. В трехмерном пространстве с электрической и магнитной постоянными ϵ_0 , μ_0 рассматривается плоский экран $D(0 < z < \Delta)$, ограниченный плоскостями $\Gamma_1(z = 0)$ и $\Gamma_2(z = \Delta)$. Предполагается, что в начальный момент времени экран намагничен. Из полупространства $D_1(z < 0)$ на слой D воздействует первичное импульсное электромагнитное поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. В результате в области D_1 образуется отражённое поле $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ и суммарное электромагнитное поле $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1, \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$. В полупространство $D_2(z > \Delta)$ через экран D проникает поле $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$. В слое D из пермаллоя образуется электромагнитное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} и поле намагниченности \mathbf{M} .

В работе [1] сформулирована математическая модель задачи экранирования и разработан численный метод ее решения. Математическая модель основывается на использовании системы уравнений Максвелла. Дополнительно для моделирования поля намагниченности материала экрана \mathbf{M} используется уравнение Ландау-Лифшица, которое нелинейным образом связывает магнитное поле \mathbf{H} и поле \mathbf{M} . Система уравнений дополнена условиями непрерывности тангенциальных

составляющих электромагнитных полей и поля намагниченности на плоскостях Γ_1, Γ_2 , граничными условиями для поля намагниченности на плоскостях Γ_1, Γ_2 и условиями излучения на бесконечность в областях D_1, D_2 . В качестве первичного поля, воздействующего на экран, рассматривается импульсное электромагнитное поле, удовлетворяющее нестационарным уравнениям Максвелла:

$$\mathbf{E}_0(z, t) = -B_0 \left(\frac{ct - z}{c\tau} \right) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_0(z, t) = \frac{1}{Z_0} B_0 \left(\frac{ct - z}{c\tau} \right) \mathbf{e}_x, \quad B_0(t') = Z_0 H_0 b(t'), \quad (1)$$

где $\tau = \tau_{fr}$ – время фронта импульса, c – скорость света, H_0 – максимальное значение напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_0 .

Для возбуждения поля намагниченности \mathbf{M} в материале экрана используется магнитное поле \mathbf{H}_{sm} . При этом при $t' \leq 0$ экран намагничён с постоянной намагниченностью вида

$$\mathbf{H}_{sm} = H_{sm}(z) \mathbf{e}_z, \quad H_{sm}(0) = 0, \quad H_{sm}(\Delta) = 0, \quad t' \leq 0. \quad (2)$$

При $t' > 0$ намагниченность экрана изменяется под воздействием внешнего импульсного поля.

Для оценки экранирующих свойств экрана используется коэффициент эффективности экранирования \mathfrak{E} , показывающий во сколько раз ослабевает электромагнитный импульс при прохождении через экран:

$$\mathfrak{E} = \max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_0(0, t)| / \max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_2(\Delta, t)|. \quad (3)$$

Моделирование первичного импульсного электромагнитного поля в виде атомарных функций. Атомарные функции представляют собой бесконечно дифференцируемые функции отличные от нуля в ограниченных областях [2, 3]. Указанные функции широко используются в различных задачах прикладной математики и радиофизики, при решении краевых задач математической физики, в электродинамике для моделирования импульсных электромагнитных воздействий. Атомарные функции позволяют описывать импульсные поля в виде широких классов степенных, экспоненциальных, тригонометрических и некоторых других функций, а также многочленов любой степени. В данной работе на основе модели, разработанной в [1], исследовано влияние первичного импульсного электромагнитного поля, представленного атомарными функциями, на экранирующие свойства плоского намагниченного экрана из пермаллоя.

Импульсная функция $b(t')$ в формуле (1) выбрана в виде атомарной функции $hp_a(x)$ [3]:

$$b(t') = g(t') hp_a \left(2 \frac{t'}{h} - 1 \right), \quad 0 < t' < h, \quad (4)$$

$$\text{где } g(t') = e^{-c_0(t'-h_0)}, \quad c_0 = \frac{\ln 2}{h_{\text{пол}} - h_0}; \quad hp_a = \frac{a-1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} Hp_a(\pi k) \cos(\pi k x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$hp_a = 0, \quad x \leq -1, x \geq 1; \quad Hp_a(y) = 2 \frac{a-1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \text{sinc} \left((a-1) \frac{y}{a^n} \right), \quad -\infty \leq y \leq \infty,$$

($\text{sinc}(x) = \sin x/x$, $-\infty \leq x \leq \infty, x \neq 0$, $\text{sinc}(0) = 1$ – кардинальный синус).

Проведено численное исследование характеристик электромагнитного поля и поля намагниченности в экране, а также коэффициента эффективности (3) плоского экрана из пермаллоя толщиной $\Delta = 10^{-4}$ м при следующих параметрах импульсной функции (4): $a = 10$; $h_0 = 0.2$; $h_{\text{пол}} = 0.5$; $h = 2$. Получены зависимости коэффициента экранирования от проводимости и степени намагниченности (2) экрана.

Литература

1. Ерофеев В. Т., Громько Г. Ф., Заяц Г. М. Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1682–1697.
2. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. Монография. М.: Радиотехника, 2003.
3. Ерофеев В. Т., Кравченко В. Ф. Конструирование временных сигналов экспоненциально затухающими атомарными функциями // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9, № 4. С. 30–37.

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ УПРОЧНЯЮЩИХ ГРАДИЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ TiC**Г.Ф. Громыко¹, Н.П. Мацука¹, А.И. Шевцов²**¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
{grom, matsuka}@im.bas-net.by²Институт порошковой металлургии НАН Беларуси, Платонова 41, 220005 Минск, Беларусь

Работа связана с применением аппарата математического моделирования для создания композиционных покрытий повышенной износостойкости на основе самофлюсующегося сплава, модифицированного твердыми тугоплавкими соединениями и импульсными высокоэнергетическими воздействиями. В [1] предложена математическая модель тепловых процессов самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) при формировании износостойкого покрытия, полученного в результате импульсно-плазменной обработки композиционной обмазки из шихты, содержащей СВС-реагенты. Установлено, что оптимальные режимы (дистанция напыления, мощность плазменной струи и др.) для формирования упрочняющего покрытия связаны с теми режимами, которые обеспечивают равномерное заживание первых слоев частиц-микрокомпозитов (упрочняющая фаза) со стороны источника нагрева и запускают эстафетный процесс реакций в глубину, что способствует образованию зерен карбида титана (TiC) по всей глубине композиционного слоя и формированию равномерного упрочняющего покрытия.

Настоящая работа продолжает эти исследования и развивает их в области создания композиционных градиентных газотермических покрытий с повышенной износостойкостью. Поскольку упрочняющие покрытия наносятся с целью повысить ресурс работы деталей в области трибосопряжений, то излишнее повышение ресурса всего покрытия не всегда целесообразно. Кроме того, затраты на упрочнение по всей толщине покрытия могут оказаться неоправданно высокими. В этом случае имеется возможность создания покрытий в виде конструкции из слоев с различным содержанием упрочняющей фазы, что обеспечивает постепенное изменение упрочняющих свойств по глубине покрытия. Конструкция покрытия создает предпосылки повышения его прочности за счет постепенного изменения теплофизических и механических свойств этих слоев от подложки к рабочей поверхности и снижения уровня остаточных напряжений. Нанесение каждого слоя проводится газотермическим напылением [1] с выбором оптимального режима обработки. Как уже отмечено, в пределах каждого слоя имеет место достаточно равномерное распределение твердой карбидной фазы TiC, которая образует систему со связующим сплавом.

Вопрос о процентном содержании упрочняющей фазы напрямую связан с изменением свойств всего слоя и требует предварительного анализа будущих механических свойств покрытия. Прогнозирование свойств композиционного материала – сложная задача. Физические характеристики композита определяются свойствами составляющих компонент, геометрическими размерами твердых включений, плотностью их укладки и др. На изготовление экспериментальных образцов, а также на их тестирование на испытательном оборудовании, требуются значительные финансовые затраты и много времени. В настоящее время разработаны математические модели, позволяющие с достаточной степенью точности прогнозировать теплофизические и механические свойства композиционного материала [2,3]. Так для исследования механических свойств композиции с заданными процентным содержанием упрочняющей фазы будем применять подход [3], основанный на прямом численном моделировании задачи упругости в плоской постановке на представительном объеме. Для материалов с регулярной структурой в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности.

Для каждого слоя покрытия выбирается ячейка периодичности, в которой вводится достаточно подробная сетка, связанная с минимальным размером упрочняющего включения. Следуя подходу [3], ищется отклик представительного объема на внешние воздействия. Предполагается также, что механические свойства сплава и упрочняющих включений известны, адгезия на контактных границах ячейки идеальна. Разбиение расчетной сетки делается таким образом, чтобы

сеточные узлы находились на границах раздела разных материалов. В этом случае внутри каждого элементарного сеточного объема его механические характеристики определяются свойствами фазы, попавшей в этот элемент, и не претерпевают разрывов. Для нахождения модуля упругости первого рода (модуля Юнга) решаем прямую задачу об одноосном растяжении представительного объема. Поэтому граничные условия сформулируем следующим образом: на верхней и нижней границах имитируем нагрузку растяжения вдоль вертикальной оси, заданную смещением границ вдоль нормали к ней и отсутствием касательных смещений на ней; на боковых границах – зададим условия скольжения без трения вдоль жесткой стенки. При расчете напряженно-деформированного состояния представительного объема материалы матрицы и включений рассматривают как однородные нелинейно-упругие среды с известными механическими свойствами.

Вопрос разработки градиентного покрытия рассматривается на примере конструкции из двух слоев на основе нихрома NiCr и карбида титана TiC: поверхностный слой – NiCr + 40% TiC, средний слой – NiCr + 20% TiC.

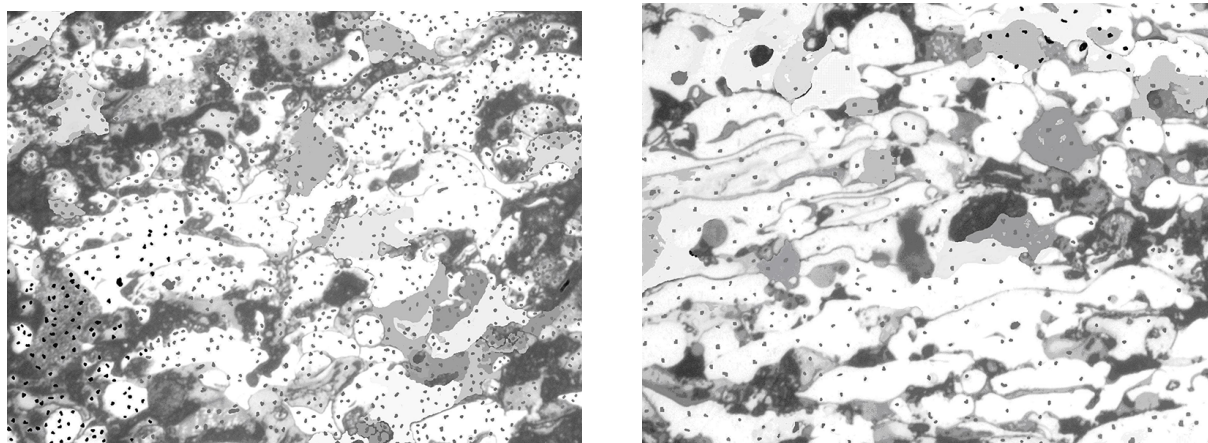


Рисунок. Микроструктура слоев газотермического покрытия в поперечном сечении $\times 100$: слева – поверхностный слой с 40% TiC, справа – промежуточный слой у подложки с 20% TiC.

Из рисунка видно, что каждый слой покрытия представляет собой оплавленный металлокерамический материал, где основным материалом является NiCr, в котором крапинками достаточно равномерно распределены включения TiC. При моделировании свойств, поры и др. соединения (достаточно мелкие), возникшие при после формирования каждого слоя, не учитывались.

Решая задачу упругости на выбранной сетке, получим детальное распределение напряженно-деформированного состояния в выбранных узлах сетки с точностью до сеточного шага. Следуя [3], на основе выбранной процедуры осреднения по представительному объему находим эффективные характеристики композиционного материала, в частности, модуль упругости первого рода. Указанный подход позволяет найти эффективные модули упругости композиционного материала для каждого слоя.

Следует отметить, что с помощью математического моделирования можно приближенно найти величину, которая является одной из основных характеристик: твердость и микротвердость покрытия. Твёрдость покрытия можно измерять в различных диапазонах: макро, микро, нано. Макродиапазон регламентирует величину нагрузки на индентор от 2 Н до 30 кН. Микродиапазон (микротвёрдость) регламентирует величину нагрузки на индентор менее 2 Н и глубину внедрения индентора больше 0,2 мкм. При выборе соответствующего подхода формулируется задача упругости для образца при воздействии соответствующей нагрузки (индентора) и исследуется площадь поверхности получаемого отпечатка.

Литература

1. Gromyko G. F., Matsuka N. P., Ilyuschenko A. Ph., Shevtsov A. I., Astashynski V. M., Buikus K. V. *Mathematical modeling of self-propagating high-temperature synthesis in formation of a wear-resistant coating by pulse plasma processing of a composite plaster involving shs reagents* // Journal High Temperature Material Processes. 2016. Vol. 20, No 1. P. 59–83.

2. Громыко Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф., Лешок А. В. *Исследование теплофизических свойств порошкового материала на основе прямого численного моделирования тепловых процессов* // Порошковая металлургия. 2010. Вып. 43. С. 12–18.

3. Люкшин Б. А. и др. *Компьютерное моделирование и конструирование наполненных композиций*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ В СЛУЧАЕ УЗЛОВ И ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, ОДНОВРЕМЕННО ЯВЛЯЮЩИХСЯ КВАДРАТНЫМИ МАТРИЦАМИ

М.В. Игнатенко

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, ignatenkomv@bsu.by

Рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами различного порядка.

Сначала приведем [1] формулы линейного интерполирования. Пусть $F : K_s \rightarrow K_p$ – оператор, где K_s и K_p – пространства квадратных матриц порядков s и p соответственно, а узлы $A_0, A_1 \in K_s$.

Обозначим через S_{lr} и S_{rl} матрицы порядков $l \times r$ и $r \times l$ соответственно ($l, r \in \mathbb{N}; r > l$), которые имеют вид

$$S_{lr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [I_l \ O_{l,r-l}],$$

$$S_{rl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l} \end{bmatrix},$$

где I_l – единичная матрица порядка l ; $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – прямоугольные нулевые матрицы порядков $l \times (r-l)$ и $(r-l) \times l$ соответственно.

При условии существования обратных матриц $(A_0 - A_1)^{-1}$, $[F(A_0)]^{-1}$, $[F(A_1)]^{-1}$ матричный многочлен в форме Лагранжа

$$L_1(X) = F(A_0)S_{ps}(A_0 - A_1)^{-1}(X - A_1)S_{sp} + F(A_1)S_{ps}(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0)S_{sp},$$

где $p \leq s$, является интерполяционным для оператора $F(X)$.

Если же существуют обратные матрицы $(A_0 - A_1)^{-1}$, $[F(A_1) - F(A_0)]^{-1}$, то матричный многочлен в форме Ньютона

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]S_{ps}(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0)S_{sp},$$

где $F(A_1) - F(A_0) = B_0C_0$ – скелетное разложение; p – ранг матрицы $[F(A_1) - F(A_0)]$; $p \leq s$, также является интерполяционным для $F(X)$.

Перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной n -й степени. Пусть определен оператор $F : K_s \rightarrow K_p$ и заданы узлы $A_0, A_1, \dots, A_n \in K_s$.

Пусть существуют обратные матрицы $(A_k - A_i)^{-1}$, $[F(A_k)]^{-1}$ ($k, i = 0, 1, \dots, n$), тогда матричный многочлен

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) S_{ps} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right) S_{sp},$$

где $p \leq s$, будет интерполяционным для оператора $F(X)$.

Рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами одинакового порядка.

Сначала приведем формулы линейного интерполирования. Пусть оператор $F : K_s \rightarrow K_s$ и узлы $A_0, A_1 \in K_s$.

Если существуют обратные матрицы $(A_0 - A_1)^{-1}$, $[F(A_0)]^{-1}$, $[F(A_1)]^{-1}$, то справедливо следующее представление интерполяционного многочлена в форме Лагранжа:

$$L_1(X) = F(A_0)(A_0 - A_1)^{-1}(X - A_1) + F(A_1)(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0).$$

Если же существуют обратные матрицы $(A_0 - A_1)^{-1}$, $[F(A_1) - F(A_0)]^{-1}$, то имеет место формула линейного интерполирования в форме Ньютона:

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)](A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0).$$

Перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной степени. Пусть $F : K_s \rightarrow K_s$ – оператор и узлы $A_0, A_1, \dots, A_n \in K_s$.

Пусть существуют обратные матрицы $(A_k - A_i)^{-1}$ и $[F(A_k)]^{-1}$ ($k, i = 0, 1, \dots, n$), тогда для интерполяции матричными многочленами произвольной фиксированной n -й степени справедливо представление матричного многочлена в форме Лагранжа:

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right).$$

В заключение отметим, что монография [2] посвящена вопросам теории интерполирования функций от квадратных и прямоугольных стационарных и функциональных матричных переменных с умножением в обычном смысле, по Йордану, Адамару, Фробениусу и др. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц изложена в монографии [3].

Литература

1. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *К теории операторного интерполирования в пространствах прямоугольных матриц* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 263–279.
2. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных*. Минск: Беларус. навука, 2016.
3. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц*. Минск: Беларус. навука, 2020.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ФЕРРОГИДРОСТАТИКИ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ МАГНИТНЫХ НАНОЧАСТИЦ

О.А. Лаврова, В.К. Полевиков

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {lavrovaoa,polevikov}@bsu.by

Введение. Магнитная жидкость представляет собой коллоидальную суспензию ферромагнитных наночастиц в немагнитной жидкости-носителе [1]. При наличии магнитного поля частицы

диффундируют в направлении градиента поля, т. е. возникает эффект магнитофореза. Во внешнем статическом магнитном поле магнитная жидкость формирует равновесные состояния, при которых устанавливается неоднородное распределение частиц внутри жидкости как под влиянием магнитного поля, так и с учетом взаимодействия между частицами, гравитации и геометрической конфигурации магнитной жидкости. Распределение частиц в свою очередь оказывает влияние на структуру магнитного поля и форму магнитной жидкости. В работе рассматриваются равновесные магнитожидкостные системы со сложной взаимозависимостью между концентрацией частиц, структурой магнитного поля и формой свободной поверхности жидкости.

Математическая модель. Первые численные исследования задач гидродинамики магнитной жидкости осуществлялись без учета процесса диффузии наночастиц [1]. Численные расчеты с учетом диффузии сначала проводились для слабо-концентрированных магнитных жидкостей (концентрация магнитной фазы $\varphi_m < 10\%$). В этом случае можно пренебречь взаимодействием между частицами, что позволяет построить аналитическое решение для статического уравнения диффузии при отсутствии потока частиц через границу магнитной жидкости, см. [2]:

$$C(H) = k \frac{\sinh(\xi H)}{\xi H}, \quad k := C_0 |\Omega| / \int_{\Omega} \frac{\sinh(\xi H)}{\xi H} d\Omega, \quad (1)$$

где C — концентрация частиц со средним значением C_0 в области магнитной жидкости Ω , H — напряженность магнитного поля внутри магнитной жидкости, ξ — заданный параметр. С разработкой в [3] уравнения массопереноса магнитных наночастиц внутри магнитной жидкости с учетом стерического, дипольного и гидродинамического взаимодействий между частицами расширились возможности численного моделирования для средне-концентрированных ($\varphi_m \approx 10 - 12\%$) и сильно-концентрированных ($\varphi_m \approx 12 - 18\%$) магнитных жидкостей. В случае равновесного состояния магнитной жидкости можно построить неявную аналитическую зависимость между магнитным полем и концентрацией, см. [4-6],

$$\Phi(H, C) = const, \quad (2)$$

где Φ является заданной функцией, неизвестная константа $const$ определяется с помощью интегрального условия сохранения массы частиц в объеме жидкости.

Структура магнитного поля описывается уравнениями Максвелла как внутри магнитной жидкости, так и вне ее [1]. В силу того, что все среды полагаются непроводящими, уравнения Максвелла переформулируются в терминах магнитоэстатического потенциала u в виде нелинейного уравнения эллиптического типа внутри магнитной жидкости Ω и уравнения Лапласа в немагнитной среде:

$$\nabla \cdot (\mu(H, C) \nabla u) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \nabla^2 u = 0 \text{ в немагнитной среде}, \quad (3)$$

где μ является заданной функцией, $H = |\nabla u|$.

Математическая модель для расчета свободной поверхности магнитной жидкости строится на основе уравнения Юнга-Лапласа, см. [1], с учетом влияния магнитного поля, гравитации, капиллярных сил и концентрации магнитных наночастиц внутри жидкости. Для двумерных и осесимметричных задач неизвестными полагаются функции $X(s), Y(s)$, представляющие параметризацию равновесной линии $\Gamma = \{(x, y) | x = X(s), y = Y(s), s \in [0, \ell]\}$ по ее длине s , см. [7]. Уравнение Юнга-Лапласа переформулируется в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от H и C , см., например, [4,6]:

$$X'' = -Y'F, \quad Y'' = X'F, \quad 0 < s < \ell; \quad F = F(X, Y, Y', \ell, H, C), \quad (4)$$

с дополнительными граничными условиями на концах свободной поверхности при $s = 0$ и $s = \ell$ и интегральным условием сохранения объема жидкости.

Численное моделирование. Численное решение задачи феррогидростатики основано на итерационном согласовании трех различных вычислительных алгоритмов:

1. Метод Ньютона для системы из алгебраических уравнений вида (1) или (2) для заданных точек области магнитной жидкости и фиксированного магнитного поля H ;

2. Аппроксимация краевой задачи на основе уравнений (3) либо методом конечных элементов, см. [4], либо комбинированным методом конечных разностей и граничных элементов, см. [5], для фиксированной концентрации C ;
3. Конечно-разностная аппроксимация краевой задачи на основе уравнений (4) для фиксированного магнитного поля и концентрации.

В статьях [4-6] показано, что равновесное распределение частиц в магнитной жидкости является существенно неоднородным и оказывает значимое влияние на поведение и характеристики магнитожидкостных систем. В частности, по результатам численного моделирования обнаружено, что процесс диффузии приводит к более сильному вытягиванию конечного объема магнитной жидкости в направлении приложенного магнитного поля как в задаче об устойчивости слоя [4], так и в задаче о магнитной жидкости вокруг проводника с током [6]. Также численные результаты в [5] демонстрируют увеличение эффективности экранирования внешнего однородного магнитного поля кольцевым слоем магнитной жидкости за счет диффузии в заданных диапазонах внешних магнитных полей.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, шифр НИР 1.4.01.4.

Литература

1. Rosensweig R. E. *Ferrohydrodynamics*. New York: Cambridge University Press, 1985.
2. Polevnikov V. Tobiska L. *On the solution of the steady-state diffusion problem for ferromagnetic particles in a magnetic fluid* // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2008. Vol. 13, No 2. P. 233–240.
3. Pshenichnikov A. F., Elfimova E. A., Ivanov A. O. *Magnetophoresis, sedimentation, and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids* // *J. Chem. Phys.* 2011. Vol. 134. P. 184508.
4. Lavrova O., Polevnikov V. Tobiska L. *Modeling and simulation of magnetic particles diffusion in a ferrofluid layer* // *Magnetohydrodynamics*. 2016. Vol. 52. P. 439–452.
5. Lavrova O., Polevnikov V. *Numerical study of the shielding properties of a ferrofluid taking into account magnetophoresis and particle interaction* // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2022. Vol. 27, No 1. P. 161–178.
6. Lavrova O., Polevnikov V. *Numerical study of ferrofluid covering of a current-carrying conductor, taking into account diffusion of interacting particles* // *Magnetohydrodynamics*. 2024. Vol. 60, No 1. P. 21–38.
7. Polevnikov V. K., *Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces* // *Comput. Methods Appl. Math.* 2004. Vol. 4, No 1. P. 66–93.

ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЙ БЛОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ВЕРХНЕЙ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Э.Е. Малиев¹, Н.А. Лиходед²

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь, maliev@im.bas-net.by

²Белорусский государственный университет,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, likhoded@bsu.by

В качестве вида целевой системы линейных алгебраических уравнений рассмотрены часто возникающие на практике при численном решении уравнений в частных производных методом сеток блочно-трёхдиагональные системы с трёхдиагональными блоками. Для решения таких систем в работе применен, после блочного предобусловливания Якоби [1] с блоками, совпадающими с диагональными блоками исходной системы, блочный алгоритм последовательной верхней релаксации (SOR). Блочный алгоритм Гаусса-Зейделя [1] и близкий к нему алгоритм SOR, включает обращение матриц-блоков главной диагонали и на каждом шаге итерационного процесса сначала умножение матриц-блоков на вектор, затем умножение плотных обратных матриц на вектор. Компоненты векторов, на которые умножаются матрицы-блоки, получены на предыдущем шаге или, если они уже уточнены, на этом шаге. Алгоритм легко распараллеливается.

После блочного предобусловливания Якоби сходимость итерационного процесса должна быть более быстрой, а диагональные матрицы-блоки станут единичными. Не потребуются обращения диагональных блоков и умножения (на каждом итерационном шаге алгоритма SOR) плотных обратных матриц на вектор, но матрицы-блоки на поддиагонали и на наддиагонали станут плотными. Исследования работы актуальны, так как для многих вычислений с использованием метода сеток можно организовать параллельное выполнение аналогично исследуемому в работе способу.

Пусть N_1, N_2 – некоторые натуральные числа, $A_1, \dots, A_{N_1}, B_0, B_1, \dots, B_{N_1-1}, C_0, C_1, \dots, C_{N_1}$ – вещественные матрицы порядка $N_2 - 1$, $Y_0, Y_1, \dots, Y_{N_1}, F_0, F_1, \dots, F_{N_1}$ – $(N_2 - 1)$ -мерные векторы. Рассмотрим блочно-трёхдиагональную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} C_0 Y_0 + B_0 Y_1 &= F_0, \\ A_i Y_{i-1} + C_i Y_i + B_i Y_{i+1} &= F_i, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A_{N_1} Y_{N_1-1} + C_{N_1} Y_{N_1} = F_{N_1}.$$

Будем рассматривать важный для практического использования случай трёхдиагональных матриц-блоков, B_0, A_{N_1} – нулевые, а C_0, C_{N_1} – единичные матрицы.

Рассмотрим следующий блочный предобусловливатель Якоби M_{bj} : блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками C_0, C_1, \dots, C_{N_1} . Применим к системе (1) предобусловливатель:

$$\begin{aligned} Y_0 + B_0^* Y_1 &= F_0^*, \\ A_i^* Y_{i-1} + Y_i + B_i^* Y_{i+1} &= F_i^*, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_{N_1}^* Y_{N_1-1} + Y_{N_1} = F_{N_1}^*,$$

где $A_i^* = C_i^{-1} A_i, i = 1, \dots, N_1, B_i^* = C_i^{-1} B_i, i = 0, \dots, N_1 - 1, F_i^* = C_i^{-1} F_i, i = 0, \dots, N_1$. Матрицы A_i^*, B_i^* являются плотными (кроме $B_0^*, A_{N_1}^*$), $F_0^* = F_0 = Y_0, F_{N_1}^* = F_{N_1} = Y_{N_1}$. Матрицы C_i^{-1} в явном виде не используются: для получения, например, A_i^* , решается методом прогонки $C_i A_i^* = A_i$.

Запишем псевдокод для параллельной реализации L итераций блочного метода последовательной верхней релаксации решения систем вида (2) ($Y_0 = F_0, Y_{N_1} = F_{N_1}$).

```

for  $i = 1$  до  $N_1 - 1$ :
     $Y_i = Y_i^0$  // выбирается начальное приближение
end for
for  $l = 0$  до  $L - 1$ :
    for  $i = 0$  до  $N_1 - 1$ :
         $Y_i = (1 - w)Y_i + w(F_i^* - A_i^* Y_{i-1} - B_i^* Y_{i+1})$ 
    end for
end for

```

Блочный метод SOR сходится при любом начальном приближении, если выполняются условия блочного строгого диагонального преобладания [2].

В последовательных алгоритмах при вычислении нового значения используются или значения, полученные на предыдущей итерации, или вполне конкретные значения, полученные как на предыдущей, так и на текущей итерации. При параллельных реализациях возможно использование значений, полученных на предыдущей и на текущей итерации, но не обязательно указанных на какой из них [3].

В этом докладе экспериментально исследовано влияние на время реализации алгоритма размеров системы и блоков системы. Основной задачей вычислительных экспериментов являлась проверка эффективности алгоритмов и программной реализации рассмотренного варианта блочного предобусловливания Якоби. Эксперименты показали, что рассмотренный вариант предобусловливания можно эффективно реализовать в случае сравнительно небольшого размера диагональных блоков исходной системы, причём размер блоков кратно меньше числа блочных строк. Такой вид

системы может возникнуть на практике, в частности, после построения методом контрольных объёмов двумерной модели движения крови в прямом сосуде без дефектов [4].

Направления дальнейших исследований: численные эксперименты на многоядерных компьютерах с общей памятью, с распределённой памятью, на графических ускорителях; разработка и программная реализация параллельных алгоритмов численного решения прикладных задач с использованием предлагаемого подхода на вычислительных устройствах различной архитектуры; сравнение эффективности предлагаемого подхода, матричной прогонки и методов крыловского типа для решения систем рассматриваемого вида; разработка специализированного программного комплекса для численного решения задач гемодинамики и смежных с ними задач на суперкомпьютере.

Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы».

Литература

1. Саад Ю. *Итерационные методы для разреженных линейных систем*. М.: Издательство Московского университета, 2013. Т. 1.
2. Котина Е. Д. *О сходимости блочных итерационных методов* // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2012. Т. 5, № 3. С. 41–55.
3. Гергель В. П. *Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем*. Учебник. М.: Издательство Московского университета, 2010.
4. Баханович С. В., Громько Г. Ф., Лиходед Н. А., Толстиков А. А. *Параллельная реализация алгоритмов численного решения двумерных параболических уравнений гемодинамики* // Параллельные вычислительные технологии – XVIII всероссийская научная конференция с международным участием, ПАВТ'2024. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. С. 52–64.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В.Б. Малютин¹, Б.О. Нуржанов²

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь, malyutin@im.bas-net.by

²Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Университетская 9, 100174 Ташкент, Республика Узбекистан, nurjanov@list.ru

Квазиклассическая аппроксимация или Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) аппроксимация используется в квантовой механике для приближенного решения одномерного не зависящего от времени уравнения Шредингера с помощью разложения в ряд по степеням постоянной Планка \hbar . Квазиклассическая аппроксимация используется при вычислении пропагатора (оператора эволюции) представленного через функциональный интеграл. Вычисления основываются на разложении действия относительно классической траектории, в которой действие принимает экстремальное значение.

Квазиклассическая аппроксимация также используется при вычислении функционального интеграла, полученного при переходе в евклидову область, то есть к "мнимому времени".

Функциональный интеграл по условной мере Винера записывается в виде

$$I = \int \exp \left\{ -\frac{S}{\hbar} \right\} D[x],$$

где $S = \int_s^t L(\dot{x}, x, \tau) d\tau$ – действие, $L(\dot{x}, x, \tau) = \frac{1}{2}(\dot{x}(\tau))^2 + V(x(\tau))$ – Лагранжиан, \hbar – параметр, принимающий положительные вещественные значения.

Интеграл можно интерпретировать как суммирование по всем траекториям, соединяющим точки $x(s) = x_s$ и $x(t) = x_t$. Наибольший вклад в сумму дает классическая траектория $x_{кл}$, для

которой действие экстремально. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

В квазиклассической аппроксимации используется разложение действия относительно классической траектории $x_{\text{кл}}$ [1]

$$S[x(\tau)] \approx S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta^2 x} y^2 + \frac{1}{3!} \frac{\delta^3 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta^3 x} y^3 + \dots,$$

где $y = \delta x$, $x = x_{\text{кл}} + \delta x$.

После замены переменных $y = \sqrt{\hbar} \bar{y}$ получим

$$\frac{1}{\hbar} S[x(\tau)] \approx \frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta^2 x} \bar{y}^2 + \sqrt{\hbar} O(\bar{y}^3).$$

То есть в разложении действия можно оставить только слагаемые с нулевой и второй степенью по \bar{y} .

Вариацию второго порядка $\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta^2 x} y^2$ можно записать в виде

$$\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta^2 x} y^2 = \int_s^t y \Lambda y d\tau,$$

где

$$\Lambda = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}.$$

Таким образом, интеграл I запишется в виде

$$I = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] \right\} \int D[y] \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_s^t y \Lambda y d\tau \right\}. \quad (1)$$

В интеграле в формуле (1) показатель экспоненты содержит переменные в степени два. Такие интегралы называются гауссовыми и вычисляются. Таким образом, из равенства (1) получаем квазиклассическую аппроксимацию исходного функционального интеграла.

Метод квазиклассической аппроксимации использован при вычислении функциональных интегралов содержащих потенциал $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$ (ангармонический осциллятор) и Davidson potential $V(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$. Численные результаты показывают, что с помощью квазиклассической аппроксимации получаются хорошие приближенные значения для функциональных интегралов с различными потенциалами. При уменьшении \hbar точность аппроксимации увеличивается. Но квазиклассическая аппроксимация хорошо приближает функциональный интеграл не только при малых значениях \hbar .

Литература

1. Horacio S. Wio. *Path integrals for stochastic processes: An introduction*. World Scientific Publishing Company, 2013.

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ПОЛУНОРМЕ
ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА**

О.В. Матысик

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, б. Космонавтов 21, 224000 Брест, Беларусь,
matysikoleg@mail.ru

Проблема решения некорректных задач актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в сейсмике, технике, оптимальном управлении, экономике, медицине (компьютерной томографии) и космических исследованиях (спектроскопии).

В гильбертовом пространстве H для решения некорректного уравнения первого рода $Ax = y_\delta$ с неточной правой частью y_δ ($\|y - y_\delta\| \leq \delta$), где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, используется регуляризирующий алгоритм ($0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна) в виде явной схемы итераций:

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A (y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (1)$$

Изучим сходимость явного итерационного метода (1) в полунорме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [1-2] в случае единственного решения уравнения. При этом число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Справедливы

Теорема 1. При условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|^2}$ явный процесс (1) сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $\sqrt[4]{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Для метода итераций (1) справедливы: оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|, n \geq 2$ и априорный момент останова $n_{opt} = 2^{-3}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\|x\|^2\delta^{-2}$.

Теорема 2. Если выполнены условия: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, где $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – фиксированное положительное число ($0 < \varepsilon < \|A\|$), то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Литература

1. Матысик О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. Брест: Брест. гос. ун-т, 2014.
2. Matysik O. V., Van Hulle M. M. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier), 2022. № 456. P. 1–12.

**МОДЕЛЬ ИНВАЗИОННОЙ АКТИВНОСТИ ПОПУЛЯЦИЙ
ПРИ ТРИГГЕРНОМ ПРОТИВОДЕЙСТВИИ**

А.Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН,
14-я линия Васильевского острова 39, 199178 Санкт-Петербург, Россия,
madelf@rambler.ru

Введение. Междисциплинарный проект относится к направлению математических моделей биофизики и исследует особые состояния в модели иммунных процессов и агрессивных инвазий с разрушением вселенцем среды. Таким вселенцем может стать вирус уклоняющийся от иммунного ответа и разрушающий клетки лимфоциты, как ВИЧ и COVID. В результате развивается колебательный процесс хронизации инфекции.

Цель работы — создать сценарную модель непрерывного процесса инвазии с учётом факторов противодействия со стороны биотической среды и её влияния на иммунный ответ. Все агрессивные виды в результате инвазии сталкиваются ответом местных видов или лимфоцитов, адаптирующихся к ситуации. Значимость моделирования противодействия с адаптацией обоснована необходимостью биологической борьбы с чужеродными организмами и инфекциями, когда после вселения нежелательного вида проводится целенаправленная интродукция антагонистов. В этой роли часто используют специфических паразитов, динамику которых необходимо своевременно прогнозировать. В результате в некоторый момент после начала инвазии создается конкурентная система противоборства, которая, в отличие от известных хрестоматийных систем «хищники—жертва», имеет адаптационные ситуативные механизмы. Рассматриваемая проблема отличается тем, что возникает вариативность итогового состояния, но полного подавления инвазивного вида не происходит. Данное состояние наиболее остро проявляется при ответе на острую вирусную инфекции, когда в результате процесса коэволюции инфекция превращается в хроническую и периодическими рецидивами. Иммунный ответ строго регулируется. Часто интенсивный иммунный ответ подавляется далее самим организмом и до победы над вирусом. Моделирование иммунного ответа чрезвычайно сложная проблема, мы применяем феноменологические сценарные модели [1]. Для построения иммунологических и инвазионных моделей необходимо адекватное включение фактора запаздывания в разные функциональные составляющие модели с целью оценить скорость прохождения возникающей депрессии. Оказываемое воздействие с запаздывающей активацией мы выразим нелинейной зависимостью, так как адаптирующееся давление является следствием трудно формализуемой многоуровневой схемы регуляции, но распространенной в сообществах с высоким индексом биоразнообразия. Время отставания начала реакции фактор, определяющий течение процесса, что не так критично для видов в экосистеме, но для иммунной системы регуляция скорости ответа это вопрос выживания и запаздывание более \bar{t} станет фатальным.

Уравнения модели инвазионного процесса с сопротивлением среды. Предложим последовательные усовершенствования моделей инвазионного процесса с адаптивным включением противоборства триггерным образом. Так резко начинается действие эффекторной фазы иммунного ответа против COVID, так как коронавирус блокирует выработку нашими клетками интерферонов и тормозит защитный ответ, а в результате происходит опасная дисрегуляция воспаления. Представим несколько аспектов запаздывания.

Включение в модель запаздывания $x(t - \tau)$ способ разнообразить варианты поведения траектории, не расширяя структуру и не увеличивая размерность фазового пространства. Вопрос определения связи величины τ с какой-то непосредственной популяционной характеристикой далеко не закрыт [2]. Модификации моделей с запаздыванием представляют значимость для исследования редких сценариев популяционной динамики, которые относим к типу экстремальных.

В предложенной нами модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения r , $H = 1/3K$:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \gamma)), \gamma < \tau. \quad (1)$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход $N(t - \gamma)$ через предкритический порог H . Величина H трактовалась как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при $N(t) \rightarrow H + \varepsilon$ популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду [3]. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение $[H - N(t - \gamma)]$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с «выбросом» траектории из цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент $\max N_*(t_{max}; r\tau\gamma)$ предельного для экосистемы уровня траектория далее $N(t) \rightarrow \infty$. В модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории катастрофическая динамика.

Модель с пороговым эффектом в запаздывании. Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции. В таком варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения:

$$\frac{dN}{dt} = r \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau)} \right) - \mathcal{Q}N(t-\nu), \quad (2)$$

Определим такое запаздывание адапционным ν и будем отличать его от феноменологического регуляционного τ из уравнений Хатчинсона или Николсона. Для $f(N) = rN \ln(K/N)$ ордината точки перегиба N_p на кривой решения $\dot{N} = f(N)$ лежит ниже $K/2$, так как $f'(N_p) = 0, N_p = K/e$. В данной модификации мы используем в обозначение \mathcal{K} , так как достижение уровня может быть кратковременным при больших r . В вычислительном сценарии с наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций. При уменьшении r траектория демонстрирует обычные гармонические колебания $N_*(t; \tau r)$. Усовершенствуем (1) с включением нелинейности $F(N) = -\mathcal{Q}N^k(t-\nu), \tau \geq \nu$, что обосновано ситуацией, когда текущее воздействие может определяться предшествующим состоянием популяции.

Модель эпидемических волн COVID-19. Рассмотрим пульсирующий эпидемический процесс, который свойственен быстро мутирующему коронавирусу — до 12 волн образовалось в ходе эпидемии в Японии. В 2024 г. волна штамма Pirola нарушила стабильное затухание. При росте числа переболевших формируется популяционный иммунитет, но случайные мутации с неслучайным отбором ведут к образованию ветвей эволюции конкурирующих штаммов вируса. Момент активации нового штамма вероятностно вариативен $[\tau_1, \tau_1 + \Delta]$. С учетом стохастического возмущения τ_1 случайной величиной γ в диапазоне $\gamma(\omega) \in [1, 2]$ опишем с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$ волн эпидемии при смене доминирующего штамма:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\zeta Y(t - \gamma\tau) - \varepsilon \sqrt{(J - N(t - \tau))^2}), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t))^2} - \varphi Y(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (3) учтен эффект борьбы штаммов при эволюции на уклонение от связывания с антителами. При $Y(0) < J < \mathcal{K} N(t) \rightarrow 0 + \varepsilon$ происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t), \max N_*(t) < J, \min N_*(t)$ зависит от возмущения запаздывания. Конкуренция штаммов поддерживает эволюцию. Образуются не отдельные штаммы, а сразу ветви вариантов, один из которых становится доминирующим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект РНФ № 23-21-00339.

Литература

1. Переварюха А. Ю. *Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели* // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, № 4. С. 255–262.
2. Соловьева Т. Н. *Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутропуляционной структурой* // Информационно-управляющие системы. 2016. № 4. С. 60–67.
3. Переварюха А. Ю. *Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций* // Нелинейный мир. 2009. Т. 7, № 12. С. 925–932.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ КРОВИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ В СОСУДАХ

А.В. Подберезский, Г.Ф. Громько

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь, grom@im.bas-net.by

В последнее время в медицине для замены сосудов, например, с аневризмой (патологическое локальное расширение участка сосуда, обусловленное слабостью ее стенок) и потенциально угрожающей жизни с риском разрыва, применяются сосудистые протезы, которые длительное время

считались стандартным методом лечения, несмотря на ряд побочных явлений и осложнений вследствие хирургической травмы. Установка стентов, стент-графтов, шунтов сопровождается высоким риском развития послеоперационных осложнений. Развитие некоторых осложнений возможно предсказать, используя методы математического моделирования, главным достоинством которого является возможность проводить практически неограниченное число численных экспериментов без опасности для жизни и здоровья испытуемого. Одной из сфер, в которых математическое моделирование добилось значительного успеха в последние годы, является вычислительное исследование патологий сердечно-сосудистой системы. Распространение численных моделей в этой области связано, с одной стороны, с потребностью медицины в тщательном качественном и количественном изучении различных методик лечения, а с другой – с наличием развитого математического аппарата моделирования гидродинамических течений, который можно применить к описанию кровотока в сосудах.

Моделирование кровеносной системы является обширной областью для научной деятельности и включает в себя множество аспектов. Среди основных следует выделить течение крови в отдельном сосуде, течение в системе кровообращения, реакцию сосудов на деформацию, описание динамики стенки сосуда, взаимодействие с потоком крови и др. Большой интерес представляют вопросы, связанные с наличием стеноза. При сужении сосудистого русла зачастую возникают турбулентные потоки, которые приводят к травме крови (механическому гемолизу). Кроме того, по мере увеличения скорости вязкость крови снижается. Особенно это вызывает интерес при исследовании кровотока при наличии стентов, шунтов, фильтров и др.

В этом смысле вопрос о скорости кровотока и вопрос о строении сосуда и его реакции на деформацию первоначально логично рассматривать отдельно. На основе биологических особенностей строения ткани можно реализовывать различные модели эластичной стенки сосудов, в частности, волоконную модель эластичной стенки сосуда и др. В последнее время в качестве медицинских стентов используется нитинол, который обладает хорошей биосовместимостью и относится к материалам с памятью формы, представляющих собой особый класс современных интеллектуальных материалов, способных к значительной неупругой деформации, которые могут восстанавливать исходную геометрию под действием соответствующих термомеханических нагрузок. Взаимодействие гидродинамической модели крови и механической модели стенки сосуда представляет возможность исследования влияния установки модельного стент-графта на гемодинамику в сосуде.

Цель работы. Исследование направлено на разработку устойчивых численных алгоритмов для описания течения крови в сосуде с учетом взаимодействия несжимаемых жидкостей (неньютоновских) и деформируемых стенок двух типов (непроницаемые жесткие и непроницаемые упругие) и получение количественных оценок основных гемодинамических показателей.

Течение крови в системе кровообращения в общем случае описывается трехмерными нестационарными уравнениями для вязкой в общем случае неньютоновской жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов. Задача моделирования течения крови в значительной степени облегчается тем, что практически во всех отделах кровеносной системы наблюдается ламинарный режим течения, то есть течение без перемешивания слоев и образования вихрей. Исключение составляет лишь часть аорты, когда во время выброса крови из сердца наблюдается турбулентное течение, которое быстро переходит в ламинарное.

Математическая модель течения крови в сосуде. Течение крови будем описывать системой уравнений Навье–Стокса в двумерной постановке при следующих допущениях: течение ламинарное, жидкость несжимаемая, неньютоновская, трением о стенки сосудов пренебрегаем, на входе в сосуд задается пульсирующий характер. Поскольку кровь – дисперсная среда, то её реология отличается от реологии ньютоновских жидкостей. Кровь представляет собой сложную неньютоновскую жидкость, вязкость которой зависит от течения жидкости. Для описания крови будем использовать реологическую модель Карро (Carreau model) [1]. Она является одной из распространенных моделей крови и широко используется для описания кровотока при различных степенях стеноза.

В большинстве гидродинамических вычислений кровеносные сосуды представляются как жесткие трубки. Действием на сосуды окружающих тканей обычно пренебрегают, а способность

сосудов адаптироваться к изменениям средних показателей кровотока не учитывается. Поскольку в работе основной акцент уделяется вопросам построения численного алгоритма, связанным с влиянием нелинейной вязкости на аппроксимацию основных уравнений, то в этом смысле вопрос о строении сосуда и его реакции на деформацию логично рассматривать отдельно, что в дальнейшем будет проведено. Поэтому в качестве области расчета выбран прямой сосуд с твердыми стенками без дефектов. В качестве граничных условий задавали жесткие граничные условия (непротекания и прилипания), выражающие равенство нулю нормальной и тангенциальной компонент скорости на стенках сосуда, на участке входа в сосуд – задавали известный профиль входной скорости учетом двух фаз: систолы (соответствует выбросу крови сердцем в кровеносную систему) и диастолы (соответствует периоду накопления сердцем крови), на выходе из сосуда, при предположении, что длина сосуда значительно превосходила его диаметр, рассматривали граничные условия невозмущенного потока или условия свободного истечения, при которых производные от неизвестных на выходе обращаются в нуль.

Построение численного метода было выполнено с помощью метода контрольного объема. Балансовые соотношения записывались для небольших контрольных объемов. Дискретный аналог получали суммированием по всем граням контрольного объема потоков массы, импульса, с учетом необходимых аппроксимаций. Перепады внешнего давления, связанного с пульсирующим потоком, а также влияния на стенки сосудов, возникающие при таких условиях, повышают требования к устойчивости численных методов, и, в связи с этим, предпочтение были отдано неявным схемам. Для реализации неявных схем были построены итерационные процессы.

Полученные результаты являются частью общей работы для исследования гемодинамики в сосудах с подвижными стенками. Замена сосуда на искусственный, неоднородность его стенки, а также его реакция на деформацию со стороны крови, может привести впоследствии к травме крови. Поэтому в работе, исходя из найденных параметров потока в сеточной области, приведены формулы для основных гемодинамических параметров: пристеночные касательные напряжения (Wall Shear Stress – WSS), осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения (Time Averaged Wall Shear Stress – TAWSS) и другие. Гемодинамические параметры позволяют спрогнозировать последствия хирургического вмешательства. Кроме того, правильно подобранный искусственный сосуд, шунт, настроенный под конкретного пациента (с учетом пульсовой волны, свойств стенок сосудов и др.), дают возможность оценить наиболее благоприятные места для хирургического вмешательства, скорректировать необходимый шунт или стент-графт, а также оценить возможные последствия от замены сосуда, помочь выбрать или скорректировать оптимальный сосуд. Использование численных методов позволит спрогнозировать деформационное состояние медицинского стента при движении крови, которое достаточно трудно измерить экспериментальным путем и установить наиболее опасные участки стента с точки зрения развития пластической деформации и потери эффекта памяти формы (например, участки сгибов проволоки медицинских стентов).

Прикладная часть исследования заключается в создании (на основе разработанных методов) и верификации численных моделей для решения медицинских задач, связанных с биомеханическими аспектами сердечно-сосудистых заболеваний. Такие численные модели являются особенно актуальными в связи с тем, что заболевания сердечно-сосудистой системы являются основной причиной смертности. Смещение клинической практики в сторону персонализированной медицины, реализующей пациент-ориентированные методы лечения, делает чрезвычайно востребованными математические модели кровотока: именно на их основе могут приниматься врачебные решения, учитывающие индивидуальные особенности пациента.

Литература

1. Yasuda K., Armstrong R. C., Cohen R. E. *Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes* // Rheol. Acta. 1981. Vol. 20, No 2. P. 163–178.

К ВОПРОСУ О КОРРЕКТИРОВКЕ СВОЙСТВ ОДНОШАГОВЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

В. И. Репников

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
repnikov@bsu.by

Одной из эффективных технологий повышения качества численных методов (в том числе и предназначенных для решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений) является технология регуляризации [1]. Техническая реализация ее традиционно состоит во введении конструкции исследуемого численного метода корректирующих элементов с их последующим выбором с учетом соответствующих соображений. Простейшее из соображений состоит в том, чтобы функция устойчивости [2] получающегося метода имела заданный вид (так называемая подгонка по функции устойчивости). Такая техника применяется, как правило, на скалярном модельном уравнении (во избежание сложных матричных вычислений) и приводит к возникновению проблем при покоординатном переносе на случай систем. В данном сообщении обсуждается обобщение указанной техники на системный случай (конкретно исследуется случай системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной симметричной знакоопределенной матрицей), причем в качестве соображений, на основе которых производится выбор корректирующих параметров, используются свойства аналитического решения рассматриваемой задачи (такие как монотонное поведение энергетической нормы решения, монотонное поведение отношения Релея и аналогичных ему функционалов), причем процедура применяется к конкретной разностной траектории, отслеживаемой данным методом. Указанная техника применяется для корректировки многомодульных методов как традиционного типа (Рунге-Кутты или последовательного повышения порядка точности), так и полученных на основе процедуры обращения части дифференциального оператора. Полученные экспериментальные данные позволяют сделать вывод о возможности использования обсуждаемого класса разностных схем при расчетах на грубых сетках.

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1983.
2. Деккер К., Вервер Я. *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*. М.: Мир, 1988.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАБОТЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА КАК СЕТИ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

К. С. Рябов

Высшая школа экономики, Большая Печерская 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия,
ksriabov@edu.hse.ru

Головной мозг является важным органом человеческого организма, отвечающим за координацию деятельности всего организма, обработку информации и принятие решений.

Главной моделью используемой в данных исследованиях является модель Курамото. Модель Курамото представляет собой динамическую систему, описывающую коллективное поведение набора взаимодействующих осцилляторов [1]. В рамках этой модели, каждый осциллятор представлен уравнением синуса и косинуса, описывающим его фазу и частоту. Взаимодействие между осцилляторами происходит за счет синхронизации их фаз, что приводит к возникновению коллективных колебаний [2].

Модель Курамото имеет важное значение в математике, так как она позволяет изучать сложные коллективные явления, такие как синхронизация и сверхсинхронизация. Эти явления

широко встречаются в природе, например, в деятельности нейронных сетей, сердечной деятельности и коллективном поведении животных [3–4].

Исследование модели Курамото позволяет не только понять принципы синхронизации в коллективных системах, но и применить их для решения различных практических задач, таких как управление сетями связи, оптимизация процессов зарядки батарей, анализ финансовых рынков и многое другое. Исследование направлено на изучение поведения нейронных сетей с симплекс связями различных порядков с целью выявления эффекта гистерезиса. Одной из наиболее распространенных моделей для этого является уравнение Курамото, которое позволяет анализировать поведение большого количества взаимосвязанных осцилляторов [4]. В исследовании рассмотрен вариант сети глобальных осцилляторов, где каждый узел связан со всеми остальными. Путем численного анализа изменений параметра порядка обнаружен явный скачок на графике, позволяющий выявить гистерезис. При обратном интегрировании системы наблюдается классическая петля. В данной статье исследователи предлагают новый метод анализа работы головного мозга, основанный на моделировании его функций с использованием сети фазовых осцилляторов. Фазовые осцилляторы являются математическими моделями, которые позволяют описать процессы колебаний в системе, такие как синхронизация и распределение сигналов.

Цель исследования заключается в выявлении основных принципов работы головного мозга и разработке новых методов анализа его функций. Полученные результаты могут помочь в понимании механизмов работы мозга, а также в разработке новых подходов к лечению ряда неврологических заболеваний.

В ходе исследования применяются математические методы аппроксимации для анализа динамики работы головного мозга и выявления основных закономерностей. Полученные результаты позволяют лучше понять процессы, происходящие в живом организме, и представить их в виде математических моделей.

Данная работа будет полезна для исследователей и специалистов в области нейробиологии и математики, интересующихся изучением работы головного мозга и развитием математических моделей для анализа его функций и процессов.

Исследование проводится с использованием различных математических методов и техник, таких как моделирование, аппроксимация данных и статистический анализ. Результаты работы могут иметь практическое применение в медицине, нейронауке и других областях, связанных с изучением работы головного мозга.

Литература

1. Bick C., Timme M., Paulikat D., Rathlev D. and Ashwin P. *Chaos in Symmetric Phase Oscillator Networks* // Physical Review Letters. 2011. Vol. 107, No 24: 244101.
2. Winfree A. T. *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators* // J. Theor. Biol. 1967. Vol. 16. P. 15–42.
3. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations. Waves and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
4. Kuramoto Y. *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators* // International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1975. Vol. 39. P. 420–422.

ИНСТРУМЕНТЫ ИНТЕРАКТИВНОГО КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДИНАМИКИ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

В.Б. Таранчук, Д.В. Баровик

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {taranchuk,barovik}@bsu.by

Введение. Лесные пожары в ряде регионов происходят с регулярной периодичностью, и при этом часто не подтверждается успешность в их предотвращении и тушении. Актуальны новые

технические решения, более эффективные методы организации и управления. Наиболее сложным при этом является этап ликвидации чрезвычайных ситуаций, когда для принятия оптимальных управленческих решений определяющим является наличие достоверных прогнозов распространения фронта горения. В правильных экспертных решениях обязательны учет конкретной обстановки, состава и состояния растительности, рельефа территории, истории и текущих погодных условий, совокупности других факторов. Понятно, что анализировать громадный объем информации в очень сжатые сроки затруднительно без использования информационных технологий, а проигрывать сценарии с оценками разных вариантов действий без моделей развития процессов вовсе невозможно. Выход — использовать созданные, проверенные компьютерные модели.

Разработки математических моделей лесных пожаров начались с середины прошлого века и активно продолжаются в настоящее время, текущее состояние, основные публикации, обзоры упомянуты в [1]. В обзорах публикаций наряду с определенными достижениями, отмечаются ряд нерешенных вопросов, в частности: недостаточная обоснованность принимаемых в моделях уравнений и входящих в них коэффициентов для описаний кинетики физико-химических превращений и реакций; сложность выбора адекватных моделей турбулентности в газовой фазе; незначительное число аналитических решений подобных задач, которые обязательны при оценках точности получаемых приближенных решений; отсутствие масштабных натуральных экспериментов, которые можно принять за эталон для верификации моделей. Наблюдается пробел между слишком упрощенными моделями, дающими прогнозы с неприемлемой для достоверных оценок погрешностью, и моделями с большим количеством параметров, расчеты по которым очень продолжительны [2–6].

В большинстве приведенных в литературе компьютерных моделей процесс распространения лесных пожаров описан, анализируется в однородных средах, хотя в реальности однородное распределение лесных горючих материалов (ЛГМ) встречается крайне редко. При этом известно, что многие наблюдаемые эффекты протекания лесных пожаров вызваны именно неоднородностью. Например, ускоренное распространение огня вдоль просек.

Выполненные вычислительные эксперименты, предложенные и использованные методы обработки и визуализации результатов позволили выявить, и в докладе будут предметом обсуждения, особенности распространения лесных пожаров при наличии неоднородностей в плотности ЛГМ, в частности, когда на площади имитируется наличие полей различных форм и размеров. Отдельно и специально рассмотрены результаты попыток обнаружить эффекты в распределении цифровых полей температуры, концентраций кислорода и горючих газов, вызванных именно неоднородностями размещения на площади горючей растительности, в том числе с учетом влияния направления и силы ветра [4–6].

О принятом математическом описании. Ввиду ограниченности объема тезисов, но для общего понимания сложности принятого математического описания (двумерное приближение с осреднением по высоте полога леса) и соответствующей реализованной компьютерной модели эволюции зоны горения ЛГМ на площади, ниже не приводятся уравнения краевой задачи, но отметим, какие параметры, их распределения по площади и эволюция (динамика по времени) определяются: температура лесного массива (сплошной многофазной реагирующей среды); объемные доли компонент ЛГМ (сухого органического вещества, содержащейся в древесине и растительности воды, коксика, золы, негорючей минеральной части); массовые концентрации компонент газовой фазы (кислород, горючие газы, водяной пар, углекислый газ, инертные компоненты воздушной смеси и продуктов реакций пиролиза и горения). В решаемой начально-краевой задаче перечисленные величины являются определяемыми функциями модели, они зависят от времени и координат, связаны нелинейными дифференциальными уравнениями сохранения, химических реакций; в коэффициентах уравнений учитываются зависимости от температуры, концентраций, координат [2–4].

О вычислительных аспектах реализованной компьютерной модели. Система дифференциальных уравнений модели решается численно. Применяются явные разностные схемы с равномерной сеткой по пространству и переменным временным шагом по времени. Текущие значения временного шага в расчетах уточняются из условий устойчивости численной схемы с учетом динамики фронта и скоростей протекания физико-химических процессов [2]. Вычислительные

эксперименты реализованы в многофункциональном интерактивном программном комплексе, разработанном на языке Wolfram Language в системе компьютерной алгебры Mathematica. Соответствующие методические и технические решения поясняются отдельно. Необходимость адаптации хода вычислений (включая пространственную сетку, временной шаг) обусловлена длительностью расчетов каждого конкретного варианта, а “вмешательство” анализирующего промежуточные результаты специалиста, его выполняемые специально разработанными средствами уточнения числа расчетных узлов позволяют сократить ненужные пересчеты на отдельных участках.

Важными моментами организации вычислений являются: включенные в комплекс специальные средства протоколирования результатов; инструменты “ручной” коррекции параметров расчетной сетки; возможности пересчета для любого временного интервала на другой пространственной сетке; используемый дополнительный инструментарий, обеспечивающий интеллектуальный анализ и когнитивную графическую визуализацию получаемых решений [7].

Заключение (Выводы). В ходе выступления предполагается демонстрация результатов расчетов развития лесного пожара при наличии в лесном массиве полян и водных преград различных форм, размеров и расположения [4–6], а также с учетом различной скорости и направления ветра (в том числе интерпретация результатов с применением инструментов интеллектуального анализа данных системы Wolfram Mathematica).

Литература

1. Баровик Д. В., Таранчук В. Б. *Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров* // Вестник БГУ, серия 1. 2011. № 3. С. 78–84.
2. Barovik D. V., Taranchuk V. B. *Mathematical modelling of running crown forest fires* // Mathematical Modelling and Analysis. 2010. № 15(2). P. 161–174.
3. Баровик Д. В., Корзюк В. И., Таранчук В. Б. *К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров* // Труды института математики. 2013. Т. 21, № 1. С. 3–14.
4. Barovik D. V., Taranchuk V. B. *Tools for the analysis and visualisation of distributions and vector fields in surface forest fires modelling* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022. № 2, P. 82–93.
5. Баровик Д. В., Таранчук В. Б. *Компьютерная модель, примеры анализа влияния ландшафтно-метеорологических факторов на динамику низовых лесных пожаров* // Экономика. Информатика. 2020. № 47(3). С. 610–622.
6. Barovik D. V., Taranchuk V. B. *Surface Forest Fires Modelling: Temperature and Oxygen Dynamics near Fuelbreaks* // Baltic J. Modern Computing. 2023. Vol. 11(2). P. 226–240.
7. Taranchuk V. B. *Examples of Integration of Intelligent Computing Modules and the System GeoBazaDannych* // Open Semantic Technologies for Intelligent Systems : Research Papers Collection. 2024. Issue 8. P. 189–194.

ТРЕХСЛОЙНЫЕ КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.Т.К. Туен

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vokimtuyen188@mail.com

Введение. В последнее время популярность получили так называемые компактные разностные схемы. Под компактными понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации, построенных на минимальных шаблонах. Эти схемы позволяют использовать экономичный метод прогонки для решения соответствующей системы алгебраических уравнений на конкретном временном слое.

Простейшие компактные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами приведены в известной монографии академика А. А. Самарского [1]. Самое интересное, что эти схемы удалось обобщить и на линейные уравнения математической физики с переменными коэффициентами и многомерные уравнения. Классической в этом смысле является работа 1963 года [2].

Новый бурный интерес к компактным схемам обусловлен появлением работ для нелинейных уравнений типа быстрой диффузии [3–6].

В докладе строятся и исследуются трехслойные компактные разностные схемы для параболических линейных и квазилинейных уравнений, также затрагиваются вопросы построения и исследования компактных схем в случае уравнений с краевыми условиями третьего рода, строятся трехслойные схемы Саульева порядка аппроксимации 6+3, приведены эксперименты, иллюстрирующие правильность наших теоретических утверждений [7].

Уравнение с постоянными коэффициентами. В области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

Задача (1)–(3) аппроксимируется с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ трехслойной разностной схемой

$$\frac{3}{2}y_i - \frac{1}{2}y_{\bar{i}} = \Lambda \hat{y} - \frac{h^2}{12}y_{i\bar{x}\bar{x}} + \varphi, \quad \varphi = \hat{f} + \frac{h^2}{12}f_{\bar{x}\bar{x}}, \quad (4)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y(x, \tau) = u_0(x) + \tau(u_0''(x) + f(x, 0)), \quad x \in \omega_h, \quad (5)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1, \quad (6)$$

Глобальная устойчивость. Схема (4)–(6) устойчива по начальным данным и правой части, а также является глобально устойчивой (при $t \rightarrow \infty$) по начальным условиям.

Схемы для квазилинейных уравнений. Рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad \varphi(u) = \int_0^u k(\omega) d\omega,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t).$$

Трехслойная разностная схема порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ имеет вид

$$\frac{3}{2}y_i - \frac{1}{2}y_{\bar{i}} = (\varphi(\hat{y}))_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{h^2}{12}y_{i\bar{x}\bar{x}} + \varphi, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{n+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{n+1}),$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$y_i^1 = u_0(x_i) + \tau \varphi''(u_0(x_i)), \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$y_0^1 = \mu_1(t_1), \quad y_N^1 = \mu_2(t_1).$$

Трехслойная схема Саульева порядка 6+3 на трехточечном шаблоне. Для уравнения (1) предлагаем трехслойную схему Саульева с порядком 6+3 [8], построенную на базе схемы 4+2.

$$y_i^\circ + \tau y_{\bar{i}} = \Lambda \hat{y} - \frac{h^2}{12}y_{i\bar{x}\bar{x}}, \quad \tau = h^2 / (5 + \sqrt{105}).$$

Краевые условия третьего рода. Пусть при $x = 0, x = l$ рассмотрим краевые условия третьего рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad (7)$$

$$-\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \beta_2 u(l,t) - \mu_2(t), \quad \beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0. \quad (8)$$

которые аппроксимируем с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ разностными выражениями

$$\hat{y}_{x,0} = \beta_1 \hat{y}_0 + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{3} \beta_1 \right) y_{i,0}^\circ + \left(\frac{h^3}{24} + \frac{\tau h}{2} \right) y_{\bar{i},0} - (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2),$$

$$-\hat{y}_{x,N} = \beta_2 \hat{y}_N + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{3} \beta_2 \right) y_{i,N}^\circ + \left(\frac{h^3}{24} + \frac{\tau h}{2} \right) y_{\bar{i},N} - (\hat{\varphi}_3 + \hat{\varphi}_4),$$

где

$$\varphi_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h^2}{6} \mu_1'(t), \quad \varphi_3(t) = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6} \mu_2'(t),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{h}{2} f(0,t) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0,t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0,t)}{\partial t},$$

$$\varphi_4(t) = \frac{h}{2} f(x_N,t) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(x_N,t)}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(x_N,t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(x_N,t)}{\partial t}.$$

Литература

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1987.
2. Самарский А. А. *Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.
3. Матус П. П., Утебаев Б. Д. *Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений* // Математическое моделирование. 2021. Т. 33, № 4. С. 60–78.
4. Матус П. П., Ань Х. Т. К. *Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 7. С. 963–975.
5. Матус П. П., Утебаев Б. Д. *Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 947–961.
6. Матус П. П., Громько Г. Ф., Утебаев Б. Д. *Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого для квазилинейных уравнений* // Доклады НАН Беларуси. 2024. Т. 68, № 1. С. 7–14.
7. Матус П. П., Туен В. Т. К. *Трёхслойные компактные разностные схемы для параболического уравнения* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 16, № 1. С. 110–120.
8. Саульев В. К. *Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток*. М.: Физматгиз, 1960.

КОНСЕРВАТИВНЫЕ КОМПАКТНЫЕ И МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Д. Утебаев

Каракалпакский государственный университет, Ч. Абдирова 1, 230112, Нукус, Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Университетская 9, 100174, Ташкент, Узбекистан, bakhadir1992@gmail.com

Данный доклад посвящен построению и исследованию компактных и монотонных разностных схем 4-го порядка точности, сохраняющие свойство консервативности (дивергентности) для квазилинейных уравнений [1]. Следует отметить, что разностная схема должна отражать основные свойства непрерывной среды. Поэтому естественно требовать, чтобы в схеме прежде всего выполнялись разностные аналоги основных законов сохранения, справедливых для исходной непрерывной математической модели. Разностные схемы, обладающие этим свойством, называются консервативными.

На важность требования консервативности схемы обратили внимание в начале 1950-х годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [2]. Ими был предложен интегро-интерполяционный метод для конструирования консервативных разностных схем и построен пример, когда неконсервативная схема,

обеспечивающая второй порядок сходимости в классе достаточно гладких коэффициентов, расходится в классе разрывных коэффициентов [3]. Итак, сохранение свойств консервативности является необходимым условием сходимости разностного решения к точному решению дифференциальной задачи в классе обобщенных решений.

Для линеаризации предложенных в докладе разностных схем используется итерационный метод типа Ньютона–Зейделя, также сохраняющий идею консервативности и монотонности ($s + 1$)-й итерации [4]. Основная идея реализации предложенных разностных схем на трехточечном шаблоне методом прогонки основана на возможности распараллеливания вычислительного процесса. Сначала решение находится в четных узлах, а затем в нечетных. При этом все разностные уравнения остаются трехточечными относительно неизвестной функции. Возникающие проблемы нахождения дополнительных граничных условий в приграничных узлах решаются при помощи интерполяционного многочлена Ньютона 4-го порядка точности. Приведенные результаты вычислительного эксперимента иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма. Указывается также возможность обобщения данного метода на более сложные задачи.

Литература

1. Матус П. П., Громько Г. Ф., Утебаев Б. Д. *Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2024. Т. 68, № 1. С. 7–14.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов* // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 1529–1532.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Об однородных разностных схемах* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 1. С. 5–63.
4. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1983.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

М.М. Чуйко¹, О.М. Королёва²

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
mikhail.chuiko@gmail.com

²Белорусский национальный технический университет, Независимости, 65, 220013 Минск, Беларусь,
korolyovaola@gmail.com

Рассмотрим постановку задачи о конвективных течениях несжимаемой жидкости в двумерной области Ω_{xy} сложной формы

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + \text{grad}p - \frac{1}{\text{Re}}\Delta \mathbf{v} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}\mathbf{e}\theta = \mathbf{f}(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + C(\mathbf{v})\theta - \frac{1}{\text{PrRe}}\Delta \theta = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{v}^0(x, y), \quad \theta(x, y, 0) = \theta^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy},$$

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{v}_0(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega_{xy},$$

$$\theta(x, y, t) = \theta_0(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_2 \in \partial\Omega_{xy},$$

где $\mathbf{v} = (u, v)^T$, p , θ – скорость, давление и температура, $\partial\Omega_{xy}$ – граница области Ω_{xy} , \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе, $C(\mathbf{v})$, Δ – конвективный и диффузионный операторы, Re , Pr , Gr – числа Рейнольдса,

Прандтля и Грасгофа соответственно, вектор $\mathbf{e} = (0, 1)$ задает направление выталкивающей силы. Для записи конвективных слагаемых используем кососимметричную форму

$$C(\mathbf{v})u = \frac{1}{2} ((\mathbf{v} \cdot \text{grad})u + \text{div}(\mathbf{v}u)).$$

При решении задач в сложных областях используются обобщенные криволинейные координаты, координатные линии которых совпадают с границами области [1]. Пусть преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ отображает область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$. В пространстве обобщенных криволинейных координат (ξ, η) задача (1) – (3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \text{grad}_{\xi\eta} p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\xi\eta} \mathbf{v} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \mathbf{e}\theta = \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (4)$$

$$\text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\theta - \frac{1}{\text{PrRe}} \Delta_{\xi\eta} \theta = 0, \quad (6)$$

$$C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\xi\eta}) \mathbf{v} + \text{div}_{\xi\eta}(\mathbf{v}\mathbf{v}) \right),$$

$$\text{grad}_{\xi\eta} p = \frac{1}{|J^{-1}|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta}, -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right),$$

$$\text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} = \frac{1}{|J^{-1}|} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \right],$$

$$\Delta_{\xi\eta} u = \frac{1}{|J^{-1}|} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right],$$

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right), \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$|J^{-1}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Здесь $|J^{-1}|$ – якобиан обратного преобразования $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, а B_{11} , B_{12} , B_{22} – метрические коэффициенты.

Введение обобщенных координат на дискретном уровне предполагает построение в нерегулярной области Ω_{xy} согласованной с границей $\partial\Omega_{xy}$ разностной сетки, являющейся прообразом равномерной по обоим направлениям прямоугольной сетки в параметрическом квадрате $\Omega_{\xi\eta}$. Координаты узлов построенной сетки используются для аппроксимации входящих в уравнения (4)–(6) метрических коэффициентов.

В [2] предложены разностные схемы для решения уравнений Навье-Стокса в нерегулярных областях на неразнесенных сетках, основанные на аппроксимациях второго порядка в целых узлах. При построении вычислительного алгоритма использовалась аппроксимация диффузионного оператора со смешанными производными, а для устранения осцилляций дискретного решения в уравнение неразрывности вводился регуляризирующий член, содержащий давление. Предложенный вычислительный алгоритм для расчета смешанной (естественной и/или вынужденной) конвекции несжимаемой жидкости в нерегулярных областях является обобщением результатов, полученных в [2] для случая изотермических течений.

Алгоритм расчета параметров конвективных течений на каждом временном слое распадается на следующие этапы: нахождение скоростей на промежуточном временном слое; решение

эллиптической задачи для определения поправки давления; нахождение скоростей и давлений и определение температур на очередном временном слое.

Для решения систем девятиточечных уравнений с симметричной матрицей при определении поправки давления использовался метод сопряженных градиентов, а для решения несимметричных задач при определении скоростей и температур – модифицированный сильно неявный метод [3]. Вычислительный алгоритм опробован на ряде тестовых задач и показал свою эффективность при получении как стационарных, так и нестационарных решений. Проведено сравнение полученных в ходе вычислительного эксперимента параметров установившихся течений с известными в литературе результатами решения тестовых задач.

Литература

1. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*. Т. 2. М.: Мир, 1991.
2. Chuiko M., Lapanik A. *Incompressible fluid flow computation in an arbitrary two-dimensional region on nonstaggered grids* // Comput. Meth. Appl. Math. 2005. Vol. 5, No 3. P. 242–258.
3. Schneider G., Zedan M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem* // Numer. Heat Transf. 1981. Vol. 4. P. 1–19.

DIFFERENCE SCHEME OF HIGHER ORDER OF ACCURACY FOR A LOADED HEAT EQUATION WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

M.KH. Beshtokov

The Institute of applied mathematics and automation, KBSC of RAS, 89A Shortanova str., 360000 Nalchik, Russia, beshtokov-murat@yandex.ru

Introduction. This paper is devoted to the difference method for solving the first initial-boundary value problem for a loaded heat equation with variable coefficients. A difference scheme of higher order of accuracy is constructed on a uniform grid. Using the method of energy inequalities for solving the difference problem, an a priori estimate is obtained, from which follow uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data of the problem, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate of $O(h^4 + \tau^2)$ in the grid norm $W_2^1(\omega_h)$. Numerical calculations of test examples are carried out, illustrating the theoretical results obtained in the work.

Statement of the first initial boundary value problem. In the rectangle $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ consider the first boundary value problem for the loaded heat equation

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sum_{s=1}^m q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

where $0 < c_0 \leq k(x, t), \frac{1}{k(x, t)} \leq c_1, \left| \left(\frac{1}{k(x, t)} \right)_x \right|, |q_s(x, t)|, |q_{s,xx}(x, t)| \leq c_2, \quad s = 1, 2, \dots, m,$

$$u(x, t) \in C^{6,3}(\bar{D}), \quad k(x, t) \in C^{5,1}(\bar{D}), \quad q_s(x, t), f(x, t) \in C^{4,1}(\bar{D}), \tag{4}$$

$x_s, (s = 1, 2, \dots, m)$ are arbitrary points of the interval $(0, l)$.

Denote by $M_i (i = 1, 2, \dots)$ positive constants that depend only on the input data of the original differential problem (1)-(3).

Stability and convergence of the difference scheme.

To solve problem (1)-(3), we apply the finite difference method. To do this, on the uniform grid $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$, where $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, 1, \dots, j_0}, \tau = T/j_0\}$, we associate the differential problem (1)-(3) with the difference scheme of the order of approximation $O(h^4 + \tau^2)$ [1-5]:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m d_s \bar{Y}_s + \varphi, \quad (5)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

where

$$a_i^j = a(x_i, t_j) = \frac{1}{\frac{1}{6}p_{i-1} + \frac{2}{3}p_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}p_i}, \quad p = p(x, t) = \frac{1}{k(x, t)}, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h, \quad x_{i_s} \leq x_s \leq x_{i_s+1},$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}), \quad y_{i\pm 1}^j = y(x_i \pm h, t_j), \quad y_{\bar{x}} = \frac{y - y_{i-1}}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1} - y}{h}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y^j}{\tau},$$

$$d_{s,i}^j = \left(q_s + \frac{h^2}{12} (a(pq_s)_{\bar{x}}) \right)_i^{j+\frac{1}{2}}, \quad \varphi_i^j = \left(f + \frac{h^2}{12} (a(pf)_{\bar{x}}) \right)_i^{j+\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} p, \quad y^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (y^{j+1} + y^j),$$

$$\bar{y}_s = \frac{(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_s+1})(x_s - x_{i_s+2})}{-6h^3} y_{i_s-1} + \frac{(x_s - x_{i_s-1})(x_s - x_{i_s+1})(x_s - x_{i_s+2})}{2h^3} y_{i_s} +$$

$$+ \frac{(x_s - x_{i_s-1})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_s+2})}{-2h^3} y_{i_s+1} + \frac{(x_s - x_{i_s-1})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_s+1})}{6h^3} y_{i_s+2}.$$

In what follows, we will assume that $h < \min\{x_1, l - x_m\}$.

We find the a priori estimate by the method of energy inequalities. To do this, we introduce scalar products and the norm: $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$, $(u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h$, $(u, u) = (1, u^2) = \|u(\cdot, t)\|_0^2 = \|u\|_0^2$.

Theorem 1. *Let conditions (4) be satisfied, then there exist τ_0, h_0 such that if $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2)$, then scheme (5)-(7) is absolutely stable with respect to the right-hand side and initial data so that for the solution of the difference problem (5)-(7), the a priori estimate*

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right) \quad (8)$$

is valid on each time layer in the sense of the $\|y\|_1^2$ norm, where $M = \text{const} > 0$ independent of h and τ .

The a priori estimate (8) implies the uniqueness of the solution of the difference problem (5)-(7), as well as the continuous dependence of the solution of the problem on the input data.

Let $u(x, t)$ be a solution to problem (1)-(3), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ be a solution to difference problem (5)-(7). To estimate the accuracy of the difference scheme (5)-(7), consider the difference $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, where $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Then, substituting $y = z + u$ into relations (5)-(7), we obtain the problem for the function z

$$z_t = (az_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m d_s \bar{Z}_s + \Psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \quad (9)$$

where $\Psi = O(h^4 + \tau^2)$ is the error of approximation of differential problem (1)-(3) by difference scheme (5)-(7) in the class of solutions $u = u(x, t)$ of problem (1)-(3).

Applying a priori estimate (24) to the solution of problem (9) we obtain

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_0^2 \tau.$$

where $M = \text{const} > 0$ independent of h and τ .

Theorem 2. *Let the conditions, under which*

$$\|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2),$$

and boundedness conditions (4) be satisfied; then scheme (5)-(7), as h and τ tend to zero independently, converges to the solution of the differential problem (1)-(3) in the sense of the norm $\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_x^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_x^{j'}\|_0^2 \tau$ on each layer so that for sufficiently small h and τ the estimate

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \tau \leq \tau_0, \quad h \leq h_0,$$

where $M = \text{const} > 0$ independent of grid choice.

References

1. Samarskiy A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1983.
2. Samarskiy A. A., Gulin A. V. *Stability of Difference Schemes*. Moscow: Nauka, 1973.
3. Samarskiy A. A. *Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation* // *Comput. Math. Math. Phys.* 1963. Vol. 3, No 5. P. 1107–1146.
4. Lele S. K. *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution* // *J Comput Phys.* 1992. Vol. 103, No 1. P. 16–42.
5. Matus P. P., Utebaev B. D. *Compact and Monotone Difference Schemes for Parabolic Equations* // *Math Models Comput Simul*, 2021. Vol. 13. P. 1038–1048.

**MULTI INPUT INTERVENTION ANALYSIS WITH NOISE MODEL
TRIPLE SEASONAL ARMA**

Syalam Ali Wira Dinata Simatupang

Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics of TSU, Russia,
Statistics Study Program, Department of Mathematics and Information Technology, Kalimantan Institute of Technology,
Indonesia

syalam_ali_wira_dinata@lecturer.itk.ac.id

A general model is introduced to summarize multi input interventions with noise model autoregressive moving average or ARMA in time series. Development of analysis to explain the magnitude and periodic variations is the main goal with

$$\ln(Z_t - \mu) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\eta_{f_i}(\mathcal{D}) \mathcal{D}^{c_i}}{\Psi_{h_i}(\mathcal{D})} \xi_{it} \right) + \frac{\left(\underbrace{\theta_q(\mathcal{D})}_{MA(q)} \underbrace{\Theta_{Q_1}(\mathcal{D}^{S_1})}_{MA(Q_1)} \underbrace{\Psi_{Q_2}(\mathcal{D}^{S_2})}_{MA(Q_2)} \underbrace{\Lambda_{Q_3}(\mathcal{D}^{S_3})}_{MA(Q_3)} \right)}{\left(\underbrace{\varphi_p(\mathcal{D})}_{AR(p)} \underbrace{\Phi_{P_1}(\mathcal{D}^{S_1})}_{AR(P_1)} \underbrace{\Omega_{P_2}(\mathcal{D}^{S_2})}_{AR(P_2)} \underbrace{\Gamma_{P_3}(\mathcal{D}^{S_3})}_{AR(P_3)} \right)} \varepsilon_t.$$

Triple Seasonal AR part can be described as follows:

$$\left(- \sum_{i=0}^{P_3} \Gamma_{\nu} \mathcal{D}^i \right) \left(- \sum_{i=0}^{P_2} \Omega_h \mathcal{D}^i \right) \left(- \sum_{i=0}^{P_1} \Phi_l \mathcal{D}^i \right) \left(- \sum_{i=0}^p \varphi_i \mathcal{D}^i \right) Z_t = \varepsilon_t.$$

Triple Seasonal MA part can be described as follows:

$$Z_t = \left(\sum_{\eta=0}^{Q_1} -(\Theta_{\eta}) \mathcal{D}^{\eta S_1} \right) \left(\sum_{\tau=0}^{Q_2} -(\Psi_{\tau}) \mathcal{D}^{\tau S_2} \right) \left(\sum_{\kappa=0}^{Q_3} -(\Lambda_{\kappa}) \mathcal{D}^{\kappa S_3} \right) \left(\sum_{j=0}^q -(\theta_j) \mathcal{D}^j \right) \varepsilon_t,$$

where

$$\varphi_p(\mathcal{D}) = \sum_{i=0}^p (-\varphi_i) \mathcal{D}^i, \Phi_{P_1}(\mathcal{D}^{S_1}) = \sum_{i=0}^{P_1} (-\Phi_i) \mathcal{D}^{S_1 i},$$

$$\begin{aligned}\theta_q(\mathcal{D}) &= \sum_{j=0}^q (-\theta_j) \mathcal{D}^j, \Theta_{Q_1}(\mathcal{D}^{S_1}) = \sum_{l=0}^{S_1} (-\Theta_l) \mathcal{D}^{S_1 l}, \\ \Omega_{P_2}(\mathcal{D}^{S_2}) &= \sum_{i=0}^{P_2} (-\Omega_i) \mathcal{D}^{S_2 i}, \Gamma_{P_3}(\mathcal{D}^{S_3}) = \sum_{i=0}^{P_3} (-\Gamma_i) \mathcal{D}^{S_3 i}, \\ \Psi_{Q_2}(\mathcal{D}^{S_2}) &= \sum_{l=0}^{Q_2} (-\Psi_l) \mathcal{D}^{S_2 l}, \Lambda_{Q_3}(\mathcal{D}^{S_3}) = \sum_{l=0}^{Q_3} (-\Lambda_l) \mathcal{D}^{S_3 l}.\end{aligned}$$

The parameters of this multi input intervention

$$\alpha(\mathcal{D})\mathcal{Z}_t = \beta(\mathcal{D})\xi_{i-c_i} + \vartheta(\mathcal{D})\varepsilon_t,$$

or

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha(\mathcal{D})\mathcal{Z}_t - \beta(\mathcal{D})\xi_{i-c_i}}{\vartheta(\mathcal{D})},$$

ε_t is $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ white noise and can be rewritten as

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \mathcal{Z}_t - \alpha_1 \mathcal{Z}_{t-1} - \alpha_2 \mathcal{Z}_{t-2} - \dots - \alpha_{h_i+p+P_1+P_2+P_3} \mathcal{Z}_{t-h_i-p-P_1-P_2-P_3} - \\ &- \beta_0 \xi_{i-c_i} - \beta_1 \xi_{i-c_i-1} - \beta_2 \xi_{i-c_i-2} - \dots - \beta_{f_i+p+P_1+P_2+P_3} \xi_{i-c_i-f_i-p-P_1-P_2-P_3} + \\ &+ \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} - \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \vartheta_{h_i+q+Q_1+Q_2+Q_3} \varepsilon_{t-h_i-q-Q_1-Q_2-Q_3}.\end{aligned}$$

An example of power load data is shown to demonstrate the estimate process of this model. A yearly seasonal cycle is visible in several years' worth of load data, in addition to daily and weekly cycles. Furthermore, this study addresses the evaluation of an intervention's impact on transformation data.

References

1. Abraham B. *Intervention analysis and multiple time series* // Biometrika. 1980. Vol. 67, No 1. P. 73–78.
2. Box G. E. P., Tiao G. C. *Intervention analysis with applications to economic and environmental problems* // Journal of the American Statistical association. 1975. Vol. 70, No 239. P. 70–79.
3. Lee M. H., Suhartono and Sanugi B. *Multi input intervention model for evaluating the impact of the Asian crisis and terrorist attacks on tourist arrivals* // Matematika. 2010. Vol. 26, No 1. P. 83–106.
4. Taylor J. W. *Triple seasonal methods for short-term electricity demand forecasting* // European Journal of Operational Research. 2010. Vol. 204, No 1. P. 139–152.
5. Wiradinata S. A., Yendra R., Suhartono, Gamal M. D. H. *Multi-input intervention analysis for evaluating of the domestic airline passengers in an international airport* // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2017. Vol. 5, No 3. P. 110–126.

SECOND-ORDER STABILIZED MONOTONIC APPROXIMATIONS TO EXPONENT AND INDUCED NUMERICAL METHODS FOR STIFF ODES

B.V. Faleichik

Belarusian State University, 4 Nezavisimosti, 220030 Minsk, Belarus,
faleichik@bsu.by

Stabilized explicit numerical methods for numerical solution of ordinary differential equations represent a viable alternative to implicit methods for solving mildly-stiff problems. Such methods do not require expensive matrix factorizations and impose much weaker restrictions on step size than classic explicit methods. We propose a new class of stabilized Runge–Kutta methods of second order which possess extended interval of monotonicity and positivity [1]. More precisely, besides general requirement of maximizing stability interval, we try to satisfy conditions

$$R_s(z) > 0, \quad R'_s(z) \geq 0 \quad \forall z \in (-m, 0)$$

for maximal possible m . Here R_s is the method's stability polynomial [2, IV.2], which we represent in the form

$$R_s(z) = \int_{-\frac{1}{2}(1+d_s)q_s}^z \frac{1 + T_{s-1}(\frac{1}{2}q_s \zeta + d_s)}{1 + T_{s-1}(d_s)} d\zeta,$$

where T_s is the Chebyshev polynomial of the first kind. Free parameters $d_s > 1$ and $q_s > 0$ are chosen to satisfy order conditions $R_s(0) = 1$ and $R_s''(0) = 1$ ($R_s'(0) = 1$ by design).

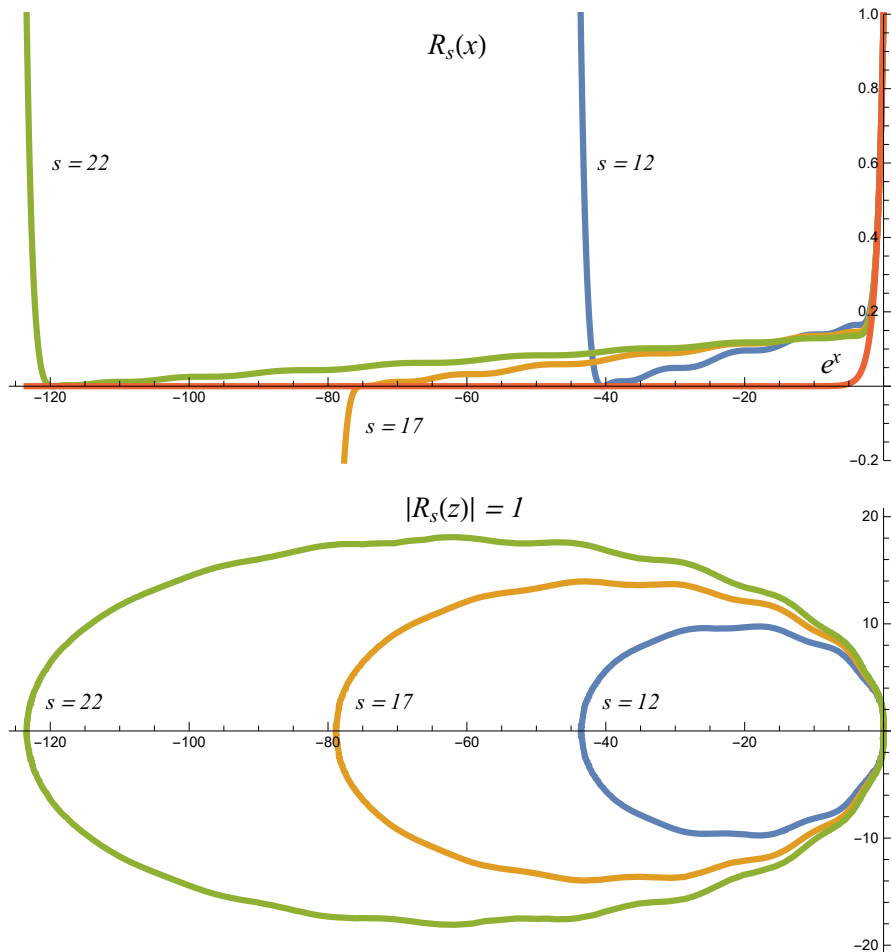


Figure. Graphs of stability polynomials and boundaries of corresponding stability regions for s -stage monotonic methods, $s = 12, 17, 22$.

In the talk we discuss the details of the proposed monotonic stability functions construction and the results of numerical comparison with RKC methods [3] in the case of constant step size.

References

1. Bobkov V. V. *Spectrally-monotonic approximations to matrix exponent and their applications* (in Russian) // Bulletin of BSU. Series 1. 2011. № 3.
2. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems* // second ed., Springer-Verlag, New York, 1996.
3. Sommeijer B. P., Shampine L. F., Verwer J. G. *RKC: An explicit solver for parabolic PDEs* // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998. Vol. 88, No 2.

**APPLICATION OF A SEMI-EXPLICIT FOURTH-ORDER VECTOR COMPACT SCHEME
FOR THE WAVE EQUATIONS WITH NON-SMOOTH DATA**

T.A. Lomonosov, A. Zlotnik

Higher School of Economics, 11 Pokrovskii bd., 109028 Moscow, Russia,
{tlomonosov,azlotnik}@hse.ru

The scheme. We consider an initial-boundary value problem for the n -dimensional acoustic wave equation (AWE), with the variable speed of sound,

$$\begin{aligned} \rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - Lu(x,t) &= f(x,t) \text{ in } Q_T = \Omega \times (0, T); \\ u|_{\Gamma_T} &= g(x,t); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

where $L := a_1^2 \partial_1^2 + \dots + a_n^2 \partial_n^2$, $\Omega = (0, X_1) \times \dots \times (0, X_n)$ and the nonhomogeneous Dirichlet boundary condition is used. Here $0 < \underline{\rho} \leq \rho(x) \leq \bar{\rho}$, and $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ are constants, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$. In addition, $\partial\Omega$ and $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$ are the boundary of Ω and the lateral surface of Q_T , respectively.

We introduce the uniform mesh $\bar{\omega}_{h_t}$ with the nodes $t_m = mh_t$, $0 \leq m \leq M$, and the step $h_t = T/M > 0$ on $[0, T]$; here $M \geq 2$. Let $\omega_{h_t} = \{t_m\}_{m=1}^{M-1}$. We define difference operators $\delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t}$ and $\Lambda_t y = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{h_t^2}$ where $y^m = y(t_m)$, $\check{y}^m = y^{m-1}$ and $\hat{y}^m = y^{m+1}$.

We introduce the uniform mesh $\bar{\omega}_{h_k}$ with the nodes $x_{ki} = ih_k$, $0 \leq i \leq N_k$, and the step $h_k = X_k/N_k$ in x_k . Let $\omega_{h_k} = \{x_{ki}\}_{i=1}^{N_k-1}$. We define a difference counterpart of ∂_k^2 and the Numerov average in x_k :

$$(\Lambda_k w)_i := \frac{1}{h_k^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), \quad s_{kN} w_i := \frac{1}{12}(w_{i-1} + 10w_i + w_{i+1})$$

on ω_{h_k} , where $w_i = w(x_{ki})$. Clearly $s_{kN} = I + \frac{1}{12}h_k^2 \Lambda_k$; here I is the unit operator.

We deal with the following *three-level semi-explicit in time vector compact scheme* constructed and investigated in [1,2]:

$$\begin{aligned} \rho \Lambda_t v - (\rho I + \frac{1}{12}h_t^2 L_h) \frac{1}{\rho} (a_1^2 v_{11} + \dots + a_n^2 v_{nn}) &= f_{\mathbf{h}} \text{ on } \omega_{\mathbf{h}} = \omega_h \times \omega_{h_t}, \\ s_{kN} v_{kk} &= \Lambda_k v \text{ on } \omega_{\mathbf{h}}, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

Here $\omega_h = \omega_{h_1} \times \dots \times \omega_{h_n}$ and $L_h := a_1^2 \Lambda_1 + \dots + a_n^2 \Lambda_n$ is the simplest difference counterpart of L . The collection of the main sought function $v \approx u$ and additional ones $v_{11} \approx \partial_1^2 u, \dots, v_{nn} \approx \partial_n^2 u$ constitutes the sought vector-function. We add the mesh boundary conditions

$$v|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}} = g, \quad a_k^2 v_{kk}|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}} = g_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

using the boundary condition $u|_{\Gamma_T} = g$ and the AWE on $\bar{\Gamma}_T$:

$$g_k = \rho \partial_t^2 g - \sum_{1 \leq l \leq n, l \neq k} a_l^2 \partial_l^2 g - f \text{ for } x_k = 0, X_k, \quad g_k = a_k^2 \partial_k^2 g \text{ for } x_l = 0, X_l, \quad 1 \leq l \leq n, \quad l \neq k,$$

on parts of Γ_T . If $g = 0$, the right-hand side of the former formula equals $-f$ and of the latter one is zero.

In order to find the function v^m at the first time level $m = 1$ with the 4th order of accuracy, we apply equations similar to the above main equations of the scheme:

$$\begin{aligned} \rho(\delta_t v)^0 &= \frac{1}{2}h_t(\rho I + \frac{1}{12}h_t^2 L_h) \frac{1}{\rho} (a_1^2 v_{11}^0 + \dots + a_n^2 v_{nn}^0) + u_{1\mathbf{h}} + \frac{1}{2}h_t f_{\mathbf{h}}^0, \\ s_{kN} v_{kk}^0 &= \Lambda_k v^0, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

on ω_h , with the specific $u_{1\mathbf{h}} \approx \rho u_1$ and $f_{\mathbf{h}}^0 \approx f^0 = f|_{t=0}$ such that

$$u_{1\mathbf{h}} := (\rho I + \frac{1}{6}h_t^2 L_h)u_1, \quad f_{\mathbf{h}}^0 := \frac{1}{3}f^0 + \frac{2}{3}f^{1/2} + \frac{1}{12}h_t^2 L_h \frac{f_0}{\rho} \text{ on } \omega_h, \quad f^{1/2} := f|_{t=h_t/2}.$$

Notice that other higher-order compact schemes for the wave equations have recently been considered, in particular, in [3–5].

Stability and Error Bound. For the given scheme, conditional stability is proved and 4th order error bound is derived in the enlarged energy norm in [2].

Numerical results. *Example 1.* We analyze the practical error orders for the nonsmooth data and compare them with some predicted theoretical error orders. To this end, we take spherically symmetric

initial functions $u_0 = w_1, w_2$, $u_1 = w_0$ and free term $f = w_1$ using piecewise polynomial functions in $r = |x|$ with a finite support in a domain Ω symmetric with respect to the origin:

$$w_0(r) = 1, \quad w_1(r) = \frac{r_0 - r}{r_0}, \quad w_2(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^2 \quad \text{for } r \leq r_0,$$

$$w_0(r) = w_1(r) = w_2(r) = 0 \quad \text{for } r > r_0,$$

with some $r_0 > 0$. Here w_0 is discontinuous and $w_\ell \in C^{\ell-1}[0, \infty)$, $\ell = 1, 2$.

We take the symmetric cubic domain $\Omega = (-X/2, X/2)^3$ with $X = 1$ and choose the parameters $a_1 = a_2 = a_3 = 1/\sqrt{3}$, $T = 0.3$ and $r_0 = 0.2$. For them, the exact solution is zero at the boundary and continuous for all $0 \leq t \leq T$. We deal with the following five cases: (a) $u_0 = w_1$; (b) $u_0 = w_2$; (c) $u_1 = w_0$; (d) $f = w_1$. We assume that the data unmentioned in the cases are zero, for example, $u_1 = 0$ and $f = 0$ in case (a).

In case (a), we show the very good agreement between the practical and the corresponding theoretical error orders in L_h^2 norm, however, the practical convergence rates in H_h^1 and energetic norms are less than the theoretical rates. In case (b), we observe the fine agreement between the practical and expected theoretical error orders in all the three norms. In case (c), the agreement between the practical and expected theoretical error orders is good for H_h^1 and energetic norms and not bad for L_h^2 norm. In case (d), we show nice agreement between practical and theoretical convergence rates in H_h^1 and energetic norms.

We also compare the results with the classical explicit 2nd order scheme, and in all the cases we fix the advantages of our scheme in errors and error orders over it.

Example 2. We study the wave propagation in a bilayer medium where the layers are divided via a dihedral angle formed by the planes $x = 1$ km and $y = 1$ km. The speeds of sound equal 1.5 and 1 km/sec, respectively, inside the dihedral angle and outside it. The domain is $\Omega = (0, X)^3$ with $X = 3$ km. In the layers, we take $\rho = \frac{4}{9}$ and 1, respectively, and, thus, ρ is discontinuous.

The source is the Ricker-type wavelet (popular in geophysics) smoothed in space

$$f(x, y, z, t) = \varphi_\gamma(r)\psi(t), \quad \text{with } \varphi_\gamma(r) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\gamma r^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\gamma(r) dx dy dz = 1,$$

where $\psi(t) = \sin(50t)e^{-200t^2}$ and now $r = |(x - x_0, y - y_0, z - z_0)|$, $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, 1.5, 1.5)$ is the center of the domain, and $\gamma \gg 1$ is a parameter. Also we take $u_0 = u_1 = 0$, $\gamma = 10000$ and $T = 1$ sec.

The wavefront first reaches the sides of the dihedral angle and partially reflects from them, and it then reaches the edge of the angle and partially reflects from it. Finally, the wavefront almost reaches the boundary of the domain. The pictures are presented in the report.

The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 23-21-00061.

References

1. Zlotnik A., Lomonosov T. *On stability and error bounds of an explicit in time higher-order vector compact scheme for the multidimensional wave and acoustic wave equations* // Appl. Numer. Math. 2023. Vol. 195. P. 54–74.
2. Zlotnik A., Lomonosov T. *On a semi-explicit fourth-order vector compact scheme for the multidimensional acoustic wave equation* // Preprint. 2024. <https://arxiv.org/abs/2403.16174>. P. 1–19.
3. Jiang Y., Ge Y. *An explicit high-order compact difference scheme for the three-dimensional acoustic wave equation with variable speed of sound* // Int. J. Comput. Math. 2023. Vol. 100, No 2. P. 321–341.
4. Smith F., Tsynkov S., Turkel E. *Compact high order accurate schemes for the three dimensional wave equation* // J. Sci. Comput. 2019. Vol. 81, No 3. P. 1181–1209.
5. Matus P., Anh H. *Compact difference schemes for the multidimensional Klein-Gordon equation* // Diff. Equat. 2022. Vol. 58, No 1. P. 120–128.

RADIAL SOLUTION OF HELIUM USING SPECTRAL TENSOR-TRAIN DECOMPOSITION

M.S. Maksimau¹, S.V. Lemeshevsky²¹The Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, 11 Surganov str., 220072 Minsk, Belarus, maksimau.mikhail@gmail.com²Simmakers Ltd – Skolkovo innovative center, 42 Bolshoy boulevard, 121205 Moscow, Russia, sergey.lemeshevsky@simmakers.ru

Introduction. Calculations of atomic spectra is accompanied by many complexities: such as high-dimensionality and unboundedness of solution domain. Among other methods there are tensor decompositions to handle high-dimensionality [1], [2] and spectral methods for treating unbounded domains [3]. Functional or spectral tensor train decomposition combines tensor decomposition with spectral methods for efficient solution of such PDEs [4], [5].

Problem statement. We attempt to approximate the solution of the following problem

$$H_1 + H_2 + r_{12}^{-1}\Psi(r_1, r_2) = E\Psi(r_1, r_2), \quad H_i = -\frac{1}{2}\nabla_i^2 - 2r_i^{-1}, \quad r_{12} = \|r_2 - r_1\|, \quad \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

which minimal eigenvalue corresponds to the non-relativistic ground state energy of helium atom in Born-Oppenheimer approximation. In this abstract we will consider the radial case, e.g. we are looking for the best approximation in spherical coordinates without angular dependence.

Discretization In order to discretize the problem, Ritz-Galerkin method was used. Basis functions $U_i(r_1, r_2)$ were chosen as a product of one-dimensional mapped polynomials $u_i(\rho_1)u_j(\rho_2)$, where $r_i = (\rho_i, \theta_i, \varphi_i)$. Three mappings to the unbounded domain were tested

$$\varphi_e^s = \sinh\left(\frac{s(1+x)}{2}\right), \quad \varphi_l^s(x) = \frac{s}{2} \ln\left(\frac{x+3}{1-x}\right), \quad \varphi_r^s(x) = s \frac{1+x}{1-x},$$

with fixed parameters.

Resulting finite-dimensional eigenvalue problem has the following form

$$(G \otimes H + H \otimes G + (4\pi)^{-1}R)X = \lambda(G \otimes G)X, \quad X \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \quad (1)$$

where \otimes is the Kronecker product of matrices; G, H correspond to discretized one-dimensional scalar product and H_1, H_2 operators; X is a vectorized matrix of solution coefficients; Matrix R corresponds to the electronic repulsion term

$$\int J(r_1)J(r_2)u_i(\rho_1)u_j(\rho_2)u_k(\rho_1)u_l(\rho_2)r_{12}^{-1}dr_1dr_2.$$

Matrix R is computed in a few steps. First Poisson equation $\nabla^2 Y_{jl} = -4\pi u_j u_l$ is solved for all j, l and then matrix TT-SVD is applied to $\int J(r)u_i(\rho)u_k(\rho)Y_{jl}(\rho)d\rho$, resulting in $R = \sum_{i=1}^{p^2} (R_i^1 \otimes R_i^2)$, which can be truncated at some $r_R < p^2$.

Minimization. Minimization is done using gradient descent method described in [6] with an additional projection at each step. Denoting left-hand side matrix of (1) by A and right-hand side by B , we get the following algorithm

$$X_{k+1} = \hat{P} \left[X_k - \alpha \left(AX_k + \gamma BX_k \left(1 - (X_k BX_k)^{-1/2} \right) \right) \right],$$

where $\alpha, \gamma > 0$ and operator \hat{P} first symmetrize the solution in r_1, r_2 variables, and then performs TT-SVD with the rank and error constraint. Matrix multiplications, dot product and other vector operations in this algorithm are done in TT format.

Results and discussion. In calculations basis functions with $\varphi_r^s(x)$ map required much lower values of α, γ compared to $\varphi_e^s(x), \varphi_l^s(x)$, resulting in a slow convergence, hence they are not presented on the plots. Exp and log in plots legend refer to φ_e^s, φ_l^s mappings. All errors except HF are relative to values from [7]. HF refers to the Hartree-Fock error on the left plot, where values obtained from our method were compared with the ones obtained in [8].

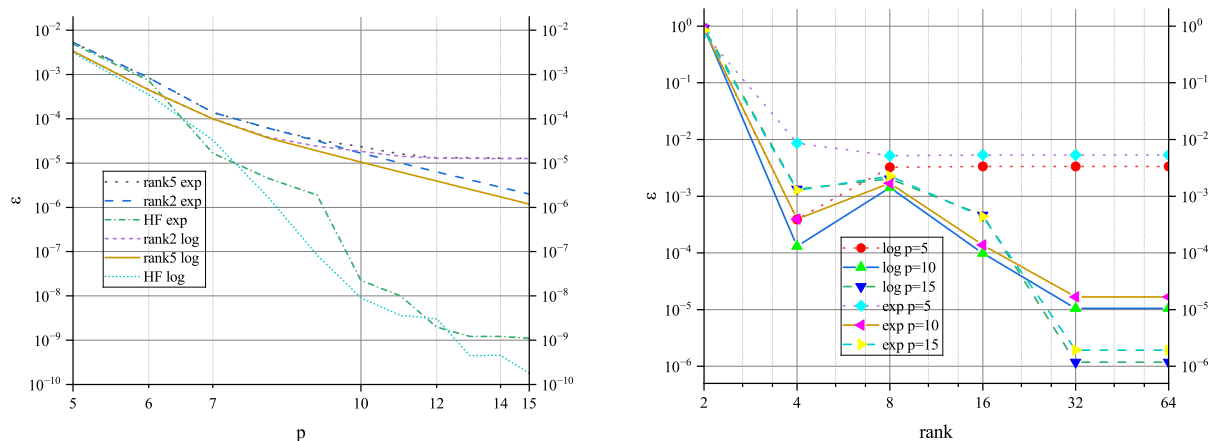


Figure: Ground state energy error dependence on one-dimensional polynomial order p for different rank restrictions on solution (left); On the operator TT rank restriction for different solution polynomial orders p (right).

On the left plot, rank 1 approximation converges to Hartree-Fock energy at high rate, as expected. Approximations with higher rank converge to radial limit of helium, as described in [7] with lower rate due to Kato cusp condition [9].

On the right plot, error of ground state energy becomes dependent on polynomial order of solution as order and operator rank increases. For low rank operator approximations (2, 4, 8) there is little correlation with polynomial order, while at increased rank (16) improvement of high order polynomials become more clear. As ranks increase further (32, 64), all energy errors are sorted by their polynomial order.

References

1. Szalay S. et al. *Tensor product methods and entanglement optimization for ab initio quantum chemistry*. International Journal of Quantum Chemistry. 2015. Vol. 115, No 19. P. 1342–1391.
2. Oseledets I. V. *Tensor-train decomposition*. SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. Vol. 33, No 5. P. 2295–2317.
3. Shen J. and Wang L. *Some recent advances on spectral methods for unbounded domains*. Communications in computational physics. 2009. Vol. 5, No 2-4. P. 195–241.
4. Bigoni D., Engels-Karup A. P. and Marzouk Y. M. *Spectral tensor-train decomposition*. SIAM Journal on Scientific Computing 38.4 (2016). Vol. 38, No 4. P. A2405–A2439.
5. Soley M. B. et al. *Functional tensor-train Chebyshev method for multidimensional quantum dynamics simulations*. Journal of chemical theory and computation. 2021. Vol. 18, No 1. P. 25–36.
6. Kim Yo. *An unconstrained global optimization framework for real symmetric eigenvalue problems*. Applied Numerical Mathematics. 2019. Vol. 144. P. 253–275.
7. Koga T. *Radial correlation limits of helium and heliumlike atoms*. Zeitschrift fur Physik D Atoms, Molecules and Clusters. 1996. Vol. 37. P. 301–303.
8. Celeste R. et al. *On the helium ground-state Hartree-Fock energy*. Chemical physics letters. 1991. Vol. 183, No 1-2. P. 31–33.
9. Kato T. *On the eigenfunctions of many-particle systems in quantum mechanics*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1957. Vol. 10, No 2. P. 151–177.

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КРИПТОГРАФИЯ И АНАЛИЗ ДАННЫХ»

О ЛАТЕНТНОСТИ XS-СХЕМ

С.В. Агиевич¹

¹Белорусский государственный университет,
НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, agievich@bsu.by

XS-схемы, введенные в работе [1], описывают тактовые преобразования широкого класса блочных шифров. Схема размерности n задается тройкой (a, B, c) , в которой a — вектор-столбец размерности n , B — квадратная матрица порядка n , c — вектор-строка размерности n . Координаты векторов и элементы матрицы лежат в поле \mathbb{F}_2 . Схема (a, B, c) уточняется дополнительными параметрами: полем \mathbb{F} — некоторым расширением \mathbb{F}_2 и S -блоком S — подстановкой на \mathbb{F} . Уточненная схема задает следующее преобразование вектор-строк $x \in \mathbb{F}^n$:

$$(a, B, c)[S](x) = xB + S(xa)c.$$

Будем рассматривать обратимые схемы — те, для которых данное преобразование обратимо при любом выборе \mathbb{F} и S . Условия обратимости даны в работе [1]. Там же выделены два типа обратимых схем: в схемах типа I матрица B обратима, а в схемах типа II — нет. Обратные преобразования обратимой схемы (a, B, c) также описываются XS-схемой. Будем обозначать ее $(a, B, c)^{-1}$.

В блочном шифре преобразования схемы (a, B, c) с разными (вообще говоря) ключезависимыми S -блоками объединяются в композиционные каскады, называясь при этом тактовыми преобразованиями или просто тактами. На вход каскада в качестве x подается открытый текст, с выхода снимается шифртекст. Для обеспечения базовых гарантий криптографической стойкости схема должна быть регулярной: во-первых, обратимой и, во-вторых, давать обратимые матрицы $A = (a \quad Ba \dots B^{n-1}a)$ и $C = ((cB^{n-1})^T \dots (cB)^T \quad c^T)^T$. Регулярную схему (a, B, c) будем записывать в первой канонической форме: B — клетка Фробениуса, $c = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Определение. Пусть (a, B, c) — регулярная XS-схема. Ее лаг $\text{lag}(a, B, c)$ — это минимальное натуральное l такое, что $cB^{l-1}a = 1$.

Лаг характеризует задержку с использованием выхода S -блока одного такта для формирования входа S -блока другого такта: в схеме с лагом l выход потребует через l тактов. С одной стороны, чем меньше лаг, тем выше качество криптографического перемешивания — сложные зависимости между входами и выходами отдельных S -блоков накапливаются и распространяются по координатам обрабатываемого вектора x максимально быстро. С другой стороны, чем больше лаг, тем шире возможности распараллеливания — при аппаратной или программной реализации шифра можно одновременно выполнять сразу l тактов, объединяя их в быстрые макротакты.

Обеспечив приемлемое качество перемешивания при достаточно большом лаге, можно рассчитывать на достижение гарантий стойкости шифра при небольшом числе макротактов и, таким образом, добиться малой временной задержки между подачей открытого текста и выдачей шифртекста. В таких случаях говорят о низкой латентности шифра. В последние годы в симметричной криптографии появился большой интерес к низколатентным (low-latency) шифрам в связи с задачами шифрования «на лету» областей оперативной памяти (см. [2]).

Говоря о латентности, мы должны учитывать не только время преобразования открытого текста в шифртекст, но и время обратного преобразования. Другими словами, если шифр строится по схеме (a, B, c) , то следует обеспечить достаточно большие значения как характеристики $\text{lag}(a, B, c)$, так и характеристики $\text{lag}(a, B, c)^{-1}$. Далее мы оценим эти характеристики.

Нам потребуются дополнительные обозначения, которые касаются векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{F}_2^n$:

$$\text{left}(u) = \min\{i: u_i = 1\}, \quad \text{right}(u) = \max\{i: u_i = 1\}.$$

Теорема. Пусть (a, B, c) — регулярная схема размерности n в первой канонической форме. Пусть b — последний столбец B . Тогда

$$\begin{aligned} \text{lag}(a, B, c) &= n - \text{right}(a) + 1, \\ \text{lag}(a, B, c)^{-1} &= \begin{cases} \text{left}(a) - 1, & \text{схема типа I,} \\ \text{left}(b) - 1, & \text{схема типа II, } b \neq 0, \\ n, & \text{схема типа II, } b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если (a, B, c) — схема типа I, то, как следует из теоремы,

$$\text{lag}(a, B, c) + \text{lag}(a, B, c)^{-1} \leq n.$$

Верхняя граница достигается при $\text{right}(a) = \text{left}(a)$, т. е. когда в a имеется ровно одна единица. Отметим, что при этом обеспечена регулярность:

- матрица C обратима, поскольку она является верхнетреугольной с единицами на диагонали;
- матрица A обратима, поскольку характеристический многочлен $f_B(\lambda)$ матрицы B имеет ненулевой свободный член и поэтому взаимно прост с многочленом $a(\lambda) = \lambda^{\text{left}(a)-1}$ (см. [1, теорема 9]).

Особый интерес представляет случай, когда единственная единица вектора a размещена в его центральной координате или рядом с ней. В этом случае

$$\text{lag}(a, B, c) \approx n/2 \approx \text{lag}(a, B, c)^{-1}.$$

И при зашифровании, и при расшифровании можно одновременно выполнять примерно по $n/2$ тактов. Это лучшие показатели латентности, которые обеспечивают регулярные схемы типа I.

Показатели латентности схем типа II потенциально лучше, поскольку лаги $\text{lag}(a, B, c)$ и $\text{lag}(a, B, c)^{-1}$ определяются различными векторами a и b . Управляя расположением единиц в этих векторах, можно достигать значений

$$\text{lag}(a, B, c) \approx n \approx \text{lag}(a, B, c)^{-1}.$$

Однако при этом могут теряться важные свойства схемы (например, 2-транзитивность).

Литература

1. Agievich S. *XS-circuits in block ciphers* // Mat. Vopr. Kriptogr. 2019. Vol. 10, No 2. P. 7–30. URL: <https://doi.org/10.4213/mvk281>.
2. Avanzi R., Mihalcea I., Schall D., Montaner H., Sandberg A. *Hardware-Supported Cryptographic Protection of Random Access Memory* // Cryptology ePrint Archive, Paper 2022/1472. 2022. URL: <https://eprint.iacr.org/2022/1472>.

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА И КРИПТОСТОЙКОСТЬ M-МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.Б. Байзаков¹, М.М. Шаршенбеков¹

¹Институт математики НАН Кыргызской Республики, пр-т Чуй 265 а, 220072 Бишкек, Кыргызстан,
asan_baizakov@mail.ru

Введение. Установлено, что основным математическим аппаратом построения магических квадратов (M -матриц) высокого порядка, является арифметическая прогрессия. В силу свойств

решений разностного уравнения получаем возможность построения собственного подпространства линейного пространства матриц. Линейная оболочка множества M -матриц принадлежащих собственному линейному подпространству дает отличное условие применения магических квадратов высокого порядка к информационной безопасности, в частности повышает криптостойкость.

Известно что, множество всех $m \times n$ матриц $\mathfrak{S}_{m \times n}$ с элементами \mathfrak{S} с операцией сложения матриц образует линейное пространство над полем \mathfrak{S} (\mathfrak{S} -здесь либо R , либо \mathbb{C}).

В работе [1] было предложено способ построения M -матриц высокого порядка, применяя метод декомпозиции. Отметим, что множество значений констант квадратов моделируется разностным уравнением второго порядка вида

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение разностного уравнения (1) имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0. \quad (2)$$

Так как корни характеристического уравнения (2) кратные: $\lambda = 1$ есть корень кратности два, то фундаментальную систему образуют решения вида $y_1 = 1, y_2 = n$. Тогда общее решение (1) имеет вид

$$y_n = c_1 + c_2 n, \quad (3)$$

где c_i ($i = 1, 2$) произвольные постоянные.

Далее будем интересоваться множеством последовательностей порожденный формулой (3) и магическими квадратами, которых назовем M -матрицами.

Рассмотрим множество магических матриц порядка n над полем \mathfrak{S} , причем элементами являются последовательные n^2 числа частного решения разностного уравнения (1). Множество таких магических матриц обозначим через $M_{n \times n}$. Построенное нами множество удовлетворяет двум правилам и восьми аксиомам и поэтому оно образует линейное пространство.

Очевидно, что построенное линейное пространство является собственным подпространством линейного пространства матриц, поскольку $M_{n \times n} \neq \mathfrak{S}_{m \times n}$ и $M_{n \times n} \subset \mathfrak{S}_{m \times n}$ [2].

Пусть $M_{n \times n}$ - собственное подпространства пространства матриц. Предположим, что $X_1, X_2 \in M_{n \times n}$. В общем случае линейной оболочкой множества X M -матриц принадлежащих линейному подпространству $M_{n \times n}$, называем совокупность всех линейных комбинаций этих M -матриц

$$\dot{L}(X) = \left\{ A = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid X_i \in X \subset M_{n \times n}, \lambda_i \in R, n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (4)$$

Отметим, что в (3) параметры λ_i произвольные постоянные. Поэтому соотношение (4) есть алгоритм, который представляет возможность ввести в криптографии режим (выбором λ_i) шифрование данных (т.е. шифрование по суточному или сезонному расписанию). А это и повышает криптостойкость шифра произведенной методом M -матриц.

Применение M -матриц при защите информации, когда идет речь о передаче и приеме данных также обладает свойством помехоустойчивости. Поскольку имеем дело с M -матрицами, то есть возможность восстановления потерянных данных в силу свойств констант квадратов.

Литература

1. Байзаков А. Б., Момбеков А. Д., Айтбаев К. А. *О разнообразии констант квадратов в подблоках при декомпозиции матриц* // Докл. НАН КР. Бишкек, 2017. № 2. С. 19–24.
2. Ланкастер П. *Теория матриц*. М.: Наука, 1978.
3. Чебраков Ю. В. *Теория магических матриц*. Выпуск ТММ-1. С.-Петербург, 2008.
4. Heinz H. *Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns*. Last updated Nov 2009.
5. Байзаков А. Б., Айтбаев К. А., Джээнбаева Г. А., Шаршенбеков М. М. *Применение разностного уравнения второго порядка к построению M-матриц высокого порядка* // МГУ, Междунар. конф. МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК, К юбилею ректора МГУ академика В. А. Садовниченко. Тезисы докладов. Москва, 2024. С. 548–549.

КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО МНОГООБРАЗИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВОИЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА: СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

В.А. Волошко^{1,2}

¹НИИ прикладных проблем математики и информатики,

²Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, valoshka@bsu.by

В докладе рассматривается многообразие МС распределений вероятностей стационарных цепей Маркова произвольного конечного порядка на множестве двоичных последовательностей $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_t)_{t \in \mathbb{Z}}, x_t \in \{0, 1\}, t \in \mathbb{Z}\}$. Равномерное распределение $U \in \text{МС}$ определено свойством $\mathbf{P}\{(x_{t+1}, \dots, x_{t+L}) = q\} \equiv 2^{-L}, t \in \mathbb{Z}, L \in \mathbb{N}, q \in \{0, 1\}^L$. В точке $U \in \text{МС}$ строится бесконечномерное касательное пространство \mathbf{T} , на котором вводится скалярное произведение (метрический тензор Фишера-Римана) $\langle \tau, \tau' \rangle_{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}, \tau, \tau' \in \mathbf{T}$. Точке U в касательном пространстве отвечает нулевой вектор $\mathbf{0} \in \mathbf{T}$.

Рассмотрим следующий класс статистических тестов для проверки гипотезы H_0 о равномерном распределении $\mathcal{L}\{x\} = U$ наблюдаемой случайной двоичной последовательности $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ длины $n \in \mathbb{N}$ (гипотезы “чистой случайности”):

$$v(x, n) = \sum_{i=0}^{n-L} f(x_{i+1}, \dots, x_{i+L}) \in \mathbb{R}^d, \quad f: \{0, 1\}^L \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad v_0 = 2^{-L} \sum_{q \in \{0, 1\}^L} f(q), \quad (2)$$

$$S_f(x, n) = n^{-1} (v(x, n) - v_0)' \Sigma_f^{-1} (v(x, n) - v_0) \geq 0. \quad (3)$$

Здесь f – векторная функция от двоичных L -грамм, определяющая тест, $v(x, n)$ – сумма значений функции f на пересекающихся L -гаммах наблюдаемой последовательности, v_0 – математическое ожидание функции f от чисто случайной L -граммы, $S_f(x, n)$ – статистика теста, $\Sigma_f \in \mathbb{R}^{d \times d}$ – асимптотическая матрица ковариаций вектора $v(x, n)$ при $n \rightarrow +\infty$ в случае истинной гипотезы H_0 (условие невырожденности этой матрицы $|\Sigma_f| \neq 0$ задает ограничение на допустимые функции f). Тест принимает гипотезу H_0 , если статистика теста меньше некоторого порога: $S_f(x, n) < C$. В случае истинной гипотезы H_0 статистика $S_f(x, n)$ при $n \rightarrow +\infty$ имеет асимптотическое распределение хи-квадрат с d степенями свободы.

Тесты описанного типа избыточно кодируются функциями f : две разные функции $f \not\equiv \tilde{f}$ могут определять один и тот же тест $S_f(x, n) \equiv S_{\tilde{f}}(x, n), \forall x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}$. Оказывается, неизбыточно (взаимно однозначно) такие тесты кодируются конечномерными подпространствами $T \subset \mathbf{T}$ касательного пространства \mathbf{T} . Другими словами, любой допустимой функции f отвечает некоторое касательное пространство $T = T(f) \subset \mathbf{T}$, однозначно задающее статистику теста $S_f(x, n)$. Поэтому можно корректно определить статистику теста как функцию от подпространства $T = T(f)$: $S_T(x, n) ::= S_f(x, n)$.

В докладе приводится ряд асимптотических свойств описанных статистик тестов $S_T(x, n)$ в зависимости от свойств подпространств $T \subset \mathbf{T}$ при увеличении длины наблюдаемой последовательности $n \rightarrow +\infty$.

Например, пусть истинное распределение наблюдаемой последовательности близко к равномерному, и отклонение от равномерности описывается касательным вектором $\tau \in \mathbf{T}$, так что имеет место следующая асимптотика сближения с гипотезой H_0 : $n \|\text{Pr}(\tau, T)\|_{\mathbf{T}}^2 \rightarrow \lambda \geq 0$, где $\text{Pr}(\tau, T) \in \mathbf{T}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{T}}^2 \in \mathbb{R}_+$ – соответственно ортогональная проекция τ на T и скалярный квадрат вектора относительно скалярного произведения Фишера-Римана. Тогда статистика $S_T(x, n)$ имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с d степенями свободы и параметром нецентральности λ . Отсюда следует, что тест на основе подпространства T не различает отклонений от равномерности τ , ортогональных этому подпространству: $\tau \perp T$. В этом случае $\lambda = 0$.

О ПРИМЕНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕСТА МОНОБИТ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.Н. Гайдук¹

¹Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, gaidukan@bsu.by

Введение.

Математическое ожидание количества единиц в случайной бинарной последовательности длины n равно $\frac{n}{2}$. Цель теста монобит заключается в том, чтобы определить действительно ли количество единиц и нулей в случайной бинарной последовательности одинаково распределено. Тест монобит является базовым и поэтому он используется практически во всех батареях статистического тестирования. Например, в наборе тестов NIST [1] используются два теста монобит: Frequency и Frequency within in a Block. Тест Frequency является классическим тестом монобит, в то время как тест Frequency within in a Block разбивает исходную последовательность на t равных подпоследовательностей, для каждой подпоследовательности вычисляется количество единиц и затем используется Хи-квадрат распределение с точным значением вероятностей.

Динамический тест монобит.

В работе [2] предложена модификация теста монобит с учетом динамического разбиения исходной последовательности. Фактически предложено использование отрицательного биномиального распределения для динамического разбиения исходной последовательности. Фиксируется число w и находится длина k первой подпоследовательности содержащей w единиц. Данная подпоследовательность затем удаляется и процесс повторяется. При этом дополнительно фиксируется число t такое, что длина подпоследовательности не может быть больше чем t , и вероятность того, что количество единиц в подпоследовательности длины t будет меньше чем w очень мала. Вероятность $P_{w(k)}$ того, что в подпоследовательности длины k впервые встретится w единиц равна:

$$P_{w(k)} = \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{w-1}. \quad (1)$$

В работе [2] предлагается выбрать значения $w = 128$ и $t = 280$. Тогда для проведения тестирования предложены следующие границы (см. таблицу 1). С использованием теоретико-информационного подхода были получены границы представленные в таблице 2, обладающие более «равномерным» распределением.

Таблица 6. Вероятности интервалов для $w = 128$ работы [2]

границы	128-238	239-245	246-250	251-255	256-260	261-266	267-274	275≤
вероятности	0.13522	0.12626	0.11445	0.12404	0.12171	0.12823	0.12455	0.12549

Таблица 7. Вероятности интервалов для $w = 128$ обладающие более «равномерным» распределением

границы	128-237	238-244	245-250	251-255	256-260	261-266	267-274	275≤
вероятности	0.12113	0.11957	0.13526	0.12405	0.12172	0.12823	0.12455	0.12549

В таблицах 3-5 представлены границы и вероятности для $w = 16$, $w = 32$, $w = 64$.

Данный подход может быть полезен для анализа случайных и псевдослучайных последовательностей. Использование отрицательного биномиального распределения позволяет динамически адаптировать длину подпоследовательностей, что увеличивает чувствительность теста к изменениям в структуре данных.

Таблица 8. Вероятности интервалов для $w = 16$

границы	16-25	26-27	28-29	30-31	32-33	34-35	36-38	39 \leq
вероятности	0.114761	0.106273	0.134501	0.144464	0.135834	0.114386	0.121842	0.127938

Таблица 9. Вероятности интервалов для $w = 32$

границы	32-54	55-58	59-61	62-63	64-66	67-69	70-73	74 \leq
вероятности	0.110164	0.145757	0.143155	0.100924	0.143885	0.120931	0.114362	0.120822

Таблица 10. Вероятности интервалов для $w = 64$

границы	64-115	116-120	121-124	125-128	129-131	132-135	136-141	142 \leq
вероятности	0.131527	0.129968	0.132378	0.141320	0.101369	0.117807	0.126488	0.119143

Литература

1. Rukhin A. *A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. NIST Special Publication 800-22 Revision 1a (2010)* // <https://csrc.nist.gov/pubs/sp/800/22/r1/upd1/final>
2. Akcengiz Z. *Statistical Randomness Tests of Long Sequences by Dynamic Partitioning* / Z. Akcengiz [et al.] // 2020 International Conference on Information Security and Cryptology (ISCTURKEY), Ankara, Turkey. 2020. P. 68-74.

МАТРИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В XS-СХЕМАХ БЛОЧНЫХ КРИПТОСИСТЕМ

Е.С. Лавренов¹

¹Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, lawre18@gmail.com

В работе [1] предложены XS-схемы описания тактовых подстановок, часто используемых в блочных криптосистемах. XS-схема размерности n над полем \mathbb{F} характеристики 2 задается двоичной матрицей B порядка n и двоичными векторами a и c размерности n (a – вектор-столбец, c – вектор-строка). Схема уточняется S -блоком S , действующим на \mathbb{F} . Итоговое преобразование обозначается через $(a, B, c)[S]$ и действует на вектор-строку $x \in \mathbb{F}^n$ следующим образом:

$$(a, B, c)[S](x) = xB + S(xa)c.$$

Мы рассматриваем только обратимые схемы — те для которых указанное преобразование обратимо. Обратное преобразование также описывается XS-схемой, которую обозначаем $(a, B, c)^{-1}$, ее вид указан в работе [1]. Среди обратимых схем будем выделять схемы типа I — те, для которых матрица B обратима.

В докладе рассматриваются матричные соотношения для XS-схем. Будем отождествлять двоичную матрицу R порядка n с индуцируемым ей преобразованием $x \mapsto xR$.

Определение 1. Пусть (a, B, c) — XS-схема размерности n и (R_1, R_2) — двоичные матрицы порядка n . Пара (R_1, R_2) называется матричным соотношением для (a, B, c) , если равенство

$$(a, B, c)[S] \circ R_1 \circ (a, B, c)[S] = R_2$$

выполняется для любых биективных S над любым допустимым полем \mathbb{F} .

В расширенной редакции работы [1] (см. <https://eprint.iacr.org/2018/592>) показано, что пара (R_1, R_2) задает матричное соотношение для XS-схемы (a, B, c) тогда и только тогда, когда

- 1) $BR_1B = R_2$;
- 2) $cR_1a = 0$;
- 3) $BR_1a = a$;
- 4) $cR_1B = c$.

Матричное соотношение $(R_1, R_2) = (B^{-1}, B)$ для обратимой схемы (a, B, c) типа I дает удобный способ переключения между зашифрованием и расшифрованием. Этот способ используется в криптосистемах Фейстеля, в криптосистеме SM4, во многих других случаях. Однако наличие матричных соотношений, как и любых других тождеств для тактовых подстановок криптосистемы, может быть опасным. Особенно опасны цепочки матричных соотношений — тоже тождеств, но не для одного, а для нескольких последовательных тактов криптосистемы.

Определение 2. Цепочка матричных соотношений длины l для схемы (a, B, c) — это l пар матричных соотношений $(R_1^{(1)}, R_2^{(1)}), (R_1^{(2)}, R_2^{(2)}), \dots, (R_1^{(l)}, R_2^{(l)})$, таких, что $R_2^{(i)} = R_1^{(i+1)}$, где $i = 1, \dots, l-1$.

Теорема 1. Пусть (a, B, c) — обратимая схема типа I. Если $cB^{-2} \neq ca$, то длина любой цепочки матричных соотношений для (a, B, c) не превосходит 2.

Определение 3. Профиль лага схемы (a, B, c) — это двоичная последовательность

$$c, ca, cBa, \dots, cB^{n-1}a, \dots$$

Теорема 2. Пусть (a, B, c) — обратимая схема типа I. Если первые n членов профиля лага (a, B, c) равны первым n членам профиля лага обратной схемы $(a, B, c)^{-1}$, то существует единственная цепочка матричных соотношений для (a, B, c) длины больше n . Иначе, длина цепочки матричных соотношений не может быть больше n .

В отечественном криптографическом стандарте СТБ 34.101.31 [2] для организации широкополосного шифрования используется семейство XS-схем `belt-wblock`. В схеме размерности n ($n \geq 2$):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = (1, 1, \dots, 1, 0)^T, \quad c = (0, 0, \dots, 1, 0).$$

Теорема 3. Длина цепочки матричных соотношений для схемы `belt-wblock` размерности $n > 2$ не может быть больше 2.

Отметим, что схема `belt-wblock` размерности 2 — это схема Фейстеля. Хорошо известно ее матричное соотношение:

$$(R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что соотношение продолжается на произвольно большое число тактов. Соотношение используется для переключения между зашифрованием и расшифрованием и не представляет опасности.

Литература

1. Agievich S. XS-circuits in Block Ciphers // *Mat. Vopr. Kriptogr.* 2019. P. 7–30.
2. СТБ 34.101.31-2020 «Информационные технологии и безопасность. Шифрование и контроль целостности»// Минск: Госстандарт, 2020.

**О ЧАСТОТНЫХ СТАТИСТИКАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА
ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЛОВЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

М.В. Мальцев

Белорусский государственный университет,
НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, maltsew@bsu.by

Для надежной работы систем защиты информации требуются параметры, вероятность предсказания которых злоумышленником пренебрежимо мала. К таким параметрам относятся ключи криптографических алгоритмов, гаммирующие последовательности поточных шифров, синхропосылки для некоторых режимов шифрования и ряд других величин [1]. Для их формирования используются генераторы случайных и псевдослучайных числовых последовательностей. К стойкости (надежности) генераторов, используемых в системах защиты информации, предъявляются строгие требования — последовательности, которые ими порождаются, должны быть неотличимы от равномерно-распределенной случайной последовательности (РРСП). Элементы РРСП независимы в совокупности и имеют равномерное распределение вероятностей. Основным методом выявления отклонений от РРСП является статистическое тестирование, в котором широко используются частотные статистики, вычисляемые по выходной последовательности генератора. Различным подходам к построению таких статистик посвящена настоящая статья.

Обозначим: $A = \{0, 1\}$, $X = (x_1, \dots, x_T) \in A^T$ — двоичная последовательность длины $T = ms$, $m, s \in \mathbb{N}$. Если X является РРСП, то из независимости и равномерной распределенности ее элементов следует равномерность распределения s -грамм:

$$p_{J_1^s} = P\{x_t = j_1, \dots, x_{t+s-1} = j_s\} = \frac{1}{2^s}, J_1^s = (j_1, \dots, j_s) \in A^s, s \geq 1.$$

Для проверки равномерности распределения s -грамм требуется по последовательности X построить статистические оценки $\hat{p}_{J_1^s}$. Данные оценки вычисляются на основе частот состояний J_1^s . Существует два подхода к вычислению этих частот — по пересекающимся и по непересекающимся фрагментам X . В первом случае оценки имеют следующий вид:

$$v(J_1^s) = \sum_{t=1}^{T-s+1} \mathbf{1}(x_t = j_1, \dots, x_{t+s-1} = j_s),$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ — индикаторная функция. Частоты для второго подхода, вычисленные по непересекающимся фрагментам, имеют вид:

$$\mu(J_1^s) = \sum_{t=1}^m \mathbf{1}(x_{(t-1)s+1} = j_1, \dots, x_{ts} = j_s).$$

Частоты $\mu(J_1^s)$ для РРСП представляют собой суммы независимых в совокупности случайных величин с равномерным на A^s распределением вероятностей, что упрощает построение статистических тестов, основанных на этих частотах. Использование частот $v(J_1^s)$ позволяет использовать больше информации о двоичной последовательности X , но их применение требует дополнительных вычислений.

В настоящей статье для статистического тестирования предлагается использовать следующее обобщение частот $v(J_1^s)$ и $\mu(J_1^s)$:

$$v_{\Delta}(J_1^s) = \sum_{t=1}^{T'} \mathbf{1}(x_{(t-1)\Delta+1} = j_1, \dots, x_{(t-1)\Delta+s} = j_s),$$

где $T' = \left\lceil \frac{T-s}{\Delta} + 1 \right\rceil$, $\Delta = 1, \dots, s$. Заметим, что при $\Delta = 1$ частоты $v_{\Delta}(J_1^s)$ совпадают с $v(J_1^s)$, а при $\Delta = s$ совпадают с $\mu(J_1^s)$. Таким образом, параметр Δ задает размер сдвига между соседними фрагментами при вычислении частот. Выбор этого параметра позволяет соблюсти компромисс между степенью зависимости фрагментов и точностью вычисления оценок вероятностей s -грамм.

Литература

1. Харин Ю. С., Агиевич С. В., Васильев Д. В., Матвеев Г. В. *Криптология*. Минск: БГУ, 2013.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕКСТОВ ПО ТЕМАТИКЕ

А.В. Миронова, М.С. Абрамович

Белорусский государственный университет, НИИ прикладных проблем математики и информатики, Независимости 4,
220030 Минск, Беларусь,
{fiz.mironova, abramovichMS}@bsu.by

Классификация текстов – это процесс разделения текстов на определенные категории или классы на основе их содержания и свойств. Это важная задача в области лингвистики и компьютерной обработки естественного языка, которая находит применение в различных областях, таких как анализ тональности текстов, определение тематики текстов, фильтрация спама и многое другое.

Классификация текстов имеет важное значение для обеспечения информационной и общественной безопасности (поиска в сетях контента, содержащего противоправную информацию).

В данной работе используется набор данных DBpedia[1], который содержит классы для 342,782 статей Википедии, распределённых по трем уровням, с 9, 70 и 219 классами соответственно. В дальнейшем будем использовать только первый уровень с 9 классами.

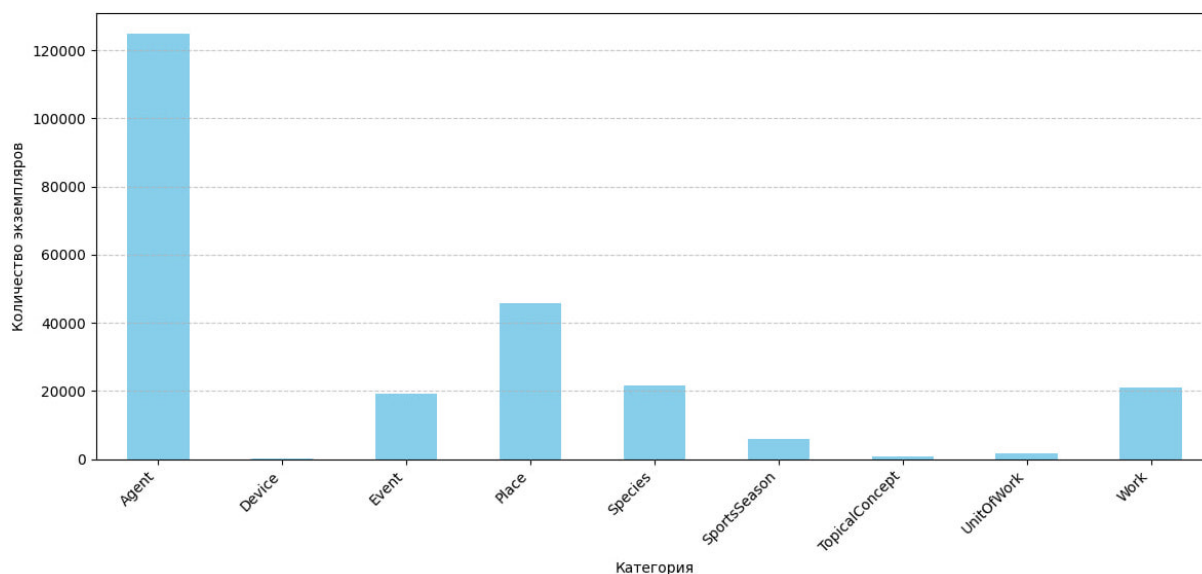


Рис. 2. Визуализация 9 классов в датасете первого уровня

Так как наблюдается значительный дисбаланс классов, ограничим количество экземпляров в каждом классе до 3000 и выберем 7 классов для дальнейшей работы.

Для предобработки использовались Python с библиотеками Pandas и NLTK. В процессе были удалены URL и адреса электронной почты, выполнена токенизация текста, удалены стоп-слова, а также проведена лемматизация.

Для решения задачи классификации по тематике использовались следующие методы:

1. Машинное обучение;
2. Нейронные сети;
3. Трансформеры из библиотеки Hugging Face.

Результаты классификации текстов методами машинного обучения. Результаты экспериментов по классификации текстов по тематике представлены в таблице 1. Для оценки точности алгоритмов классификации использовались метрики: precision(точность), recall (полнота), F1-score(средняя гармоническая точности и полноты), а также accuracy (точность классификации).

Таблица 11. Результаты классификации текстов методами машинного обучения

Классификатор	Precision	Recall	F1-Score	Accuracy
Метод опорных векторов	0.97	0.99	0.98	0.9765
Логистическая регрессия	0.97	0.98	0.97	0.9703
Случайный лес	0.95	0.97	0.96	0.9510
Метод k-ближайших соседей	0.93	0.94	0.94	0.9358
Деревья решений	0.88	0.89	0.89	0.8829

Результаты классификации текстов нейронными сетями. Проведены эксперименты с различными архитектурами нейронных сетей, включая свёрточную нейронную сеть (CNN)[2], сеть с длинной краткосрочной памятью (LSTM)[3] и сеть с управляемой рекуррентной памятью (GRU). Результаты представлены в таблице 12.

Таблица 12. Результаты классификации текстов с использованием нейронных сетей

Нейронная сеть	Precision	Recall	F1-Score	Accuracy
Свёрточная нейронная сеть (CNN)	0.9696	0.9695	0.9695	0.9695
Нейронная сеть с управляемой рекуррентной памятью(GRU)	0.9691	0.9690	0.9689	0.9689
Нейронная сеть с долгой краткосрочной памяти (LSTM)	0.9682	0.9682	0.9682	0.9682

Результаты классификации моделей из библиотеки Transformers платформы Hugging Face. Hugging Face—платформа с коллекцией предварительно обученных моделей глубокого обучения. Библиотека Transformers[4] предоставляет инструменты для быстрой загрузки и использования этих моделей, что экономит время и ресурсы на обучение с нуля. Результаты экспериментов по классификации текстов с использованием трансформеров приведены в таблице 13.

Таблица 13. Результаты классификации моделей из библиотеки Transformers платформы Hugging Face

Классификатор	Precision	Recall	F1-Score	Accuracy
bert-base-uncased	0.9954	0.9954	0.9954	0.9950
roberta-base	0.9944	0.9944	0.9944	0.9938
distilbert-base-uncased	0.9943	0.9942	0.9942	0.9937
albert-base-v2	0.9881	0.9887	0.9883	0.9876

Выводы. Исследование подтвердило эффективность современных подходов, показав, что трансформерные архитектуры, такие как BERT, значительно превосходят традиционные алгоритмы машинного обучения и нейронные сети по всем метрикам. Это подчеркивает целесообразность использования глубокого обучения для обработки естественного языка и открывает новые возможности в области классификации текстов.

Литература

1. *DBPedia Classes*. Kaggle Dataset. [Электронный ресурс]. Доступно по ссылке: <https://www.kaggle.com/datasets/danofier/dbpedia-classes>.
2. Kim Y. *Convolutional Neural Networks for Sentence Classification*. University Lecture Series, 2014. [Электронный ресурс]. Доступно по ссылке: <https://arxiv.org/pdf/1408.5882>.

3. Johnson R., Zhang T. *Supervised and Semi-Supervised Text Categorization Using LSTM for Region Embeddings*, 2016. [Электронный ресурс]. Доступно по ссылке: <https://arxiv.org/pdf/1602.02373>.

4. *Hugging Face Models*. [Электронный ресурс]. Доступно по ссылке: <https://huggingface.co/docs/transformers/index>.

О МОДИФИКАЦИИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «ЭАДП» ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНОЙ ГИПОТЕЗЫ ОБ S-МЕРНОЙ РАВНОМЕРНОСТИ

В.Ю. Палуха, К.В. Латушкин, Ю.С. Харин

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {palukha,kharin}@bsu.by

Пусть имеется случайная выборка $X_n = \{x_t : t = 1, \dots, n\}$ объёма n из распределения вероятностей $\{p_k : k \in A\}$, $p_k = P\{x_t = k\}$, где $A = \{1, \dots, N\}$, $N = 2^s$, порождённая генератором случайных или псевдослучайных последовательностей. Построим частотные оценки:

$$\hat{p}_k = \frac{v_k}{n}, \quad v_k = \sum_{t=1}^n I\{x_t = \omega_k\} \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad I\{x_t = \omega_k\} = \begin{cases} 1, & x_t = \omega_k; \\ 0, & x_t \neq \omega_k. \end{cases}$$

Для проверки качества генератора определим простую нулевую гипотезу $H_0 = \{\{x_t\} \text{ является равномерно распределённой случайной последовательностью}\} = \{\{x_t\} - \text{н.о.р.с.в.}, p_k = p_k^0 = 1/N, k = 1, \dots, N\}$ и альтернативу общего вида \bar{H}_0 . Рассмотрим специальную асимптотику:

$$n, N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty. \quad (1)$$

В НИИ ПМИ БГУ разработан программный комплекс «Энтропийный анализ дискретных последовательностей» (ПК «ЭАДП») [1], позволяющий вычислять оценки функционалов энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса дискретной последовательности и на основе критерия [2] при справедливости асимптотики (1) принимать или отклонять нулевую гипотезу. Однако на практике возможны незначительные отклонения распределения вероятностей тестируемой последовательности от s -мерной равномерности, что потребовало внести соответствующую модификацию в ПК «ЭАДП».

Определим сложную нулевую гипотезу $H_0^{(\varepsilon)}$ при $0 < \varepsilon_+ \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ [3]:

$$p_k = \frac{1}{N} + \varepsilon_k, \quad -\frac{1}{N} \leq \varepsilon_k \leq \frac{N-1}{N}, \quad \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad k \in A, \quad \sum_{k \in A} \varepsilon_k = 0, \quad \sum_{k \in A} \varepsilon_k^2 = \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_+.$$

Введём в рассмотрение функционал энтропии Тсаллиса при $r = 2$ и его статистическую оценку:

$$S_r(p) = \frac{1}{r-1} \left(1 - \sum_{k \in A} p_k^r\right), \quad S_2(p) = 1 - \sum_{k \in A} p_k^2, \quad \hat{S}_2(n, N) = 1 - \sum_{k \in A} \frac{v_k^2}{n^2},$$

где $x^2 = x(x-1) - 2$ -я нисходящая факториальная степень числа $x \in \mathbb{N}$.

Статистический критерий асимптотического уровня значимости $\alpha \in \{0, 1\}$ проверки гипотез $H_0, \bar{H}_0 \left(H_0^{(\varepsilon)}, \bar{H}_0^{(\varepsilon)} \right)$ на основе статистики Тсаллиса \hat{S}_2 имеет вид [3]:

$$\text{принимается} \quad \begin{cases} H_0 \left(H_0^{(\varepsilon)} \right), & \text{если } \Delta_- < \hat{S}_2 < \Delta_+, \\ \bar{H}_0 \left(\bar{H}_0^{(\varepsilon)} \right), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где для случая простой гипотезы $\Delta_- = \mu_{S,2} - \sigma_{S,2} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Delta_+ = \mu_{S,2} + \sigma_{S,2} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\mu_{S,2} = 1 - \frac{1}{N}$, $\sigma_{S,2}^2 = \frac{2}{Nn^2}$, для случая сложной гипотезы $\Delta_- = \mu_{S,2}^{(\varepsilon_+)} - \sigma_{S,2}^{(\varepsilon_+)} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Delta_+ = \mu_{S,2} + \sigma_{S,2}^{(\varepsilon_+)} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\mu_{S,2}^{(\varepsilon_+)} = \mu_{S,2} - \varepsilon_+^2$, $\sigma_{S,2}^{2(\varepsilon_+)} = \sigma_{S,2}^2 + \frac{2}{n^2} (2\lambda + 1) \varepsilon_+^2 + \frac{4\varepsilon_+^3}{n} (1 - \varepsilon_+)$; Φ – функция распределения стандартного нормального закона.

Будем рассматривать двоичные последовательности $\{y_\tau\}$, $\tau = 1, \dots, T$, полученные из бинарного файла. «Нарежем» их на непересекающиеся подряд идущие фрагменты длины s (s -граммы): $X^{(t)} = (X_j^{(t)}) = (y_{(t-1)s+1}, \dots, y_{ts}) \in \{0, 1\}^s$, $t = 1, \dots, n = \lfloor T/s \rfloor$. Из полученных s -грамм сформируем новую последовательность $\{x_t\}$ из алфавита мощности $N = 2^s$ по правилу $x_t = \sum_{j=1}^s 2^{j-1} X_j^{(t)} + 1$. Для каждого значения $s = 1, \dots, s_+$ вычислим оценку энтропии $\hat{S}_2(s)$, нормированные статистики \tilde{h} для простой и сложной гипотез соответственно и вспомогательную статистику для вычисления двустороннего p -значения:

$$\tilde{h}_0 = \frac{\hat{S}_2 - \mu_{S,2}}{\sigma_{S,2}}, \quad \tilde{h}_\epsilon = \frac{\hat{S}_2 - \mu_{S,2}}{\sigma_{S,2}^{(\epsilon_+)}} , \quad \check{h}_\epsilon = \frac{\hat{S}_2 - \mu_{S,2}^{(\epsilon_+)}}{\sigma_{S,2}^{(\epsilon_+)}} .$$

Формулы p -значений для простой и сложной гипотез соответственно равны

$$p_0 = 2(1 - \Phi(|\tilde{h}_0|)), \quad p_\epsilon = \begin{cases} 2(1 - \Phi(|\tilde{h}_0|)), & \text{если } \hat{S}_2 > \mu_{S,2}, \\ 2 - \Phi(|\tilde{h}_0|) - \Phi(|\check{h}_0|), & \text{если } \mu_{S,2}^{(\epsilon_+)} \leq \hat{S}_2 \leq \mu_{S,2}, \\ 2(1 - \Phi(|\check{h}_0|)), & \text{если } \hat{S}_2 < \mu_{S,2}^{(\epsilon_+)}. \end{cases}$$

ПК «ЭАДП» позволяет для заданного уровня значимости α вычислить последовательность статистик $\bar{h}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)}$ для $s = 1, \dots, s_+$, называемую энтропийным профилем. Для простой нулевой гипотезы интервал допустимых значений $\bar{h}_0(s)$ будет равен $[-1; 1]$, для сложной нулевой гипотезы интервал допустимых значений $\bar{h}_\epsilon(s)$ будет равен $\left[-1 - \frac{\epsilon_+^2}{\sigma_{S,2}^{(\epsilon_+)} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)}; 1\right]$. Также ПК «ЭАДП» позволяет отобразить последовательность p -значений и исходных оценок $\hat{S}_2(s)$. На рисунке 1 представлены энтропийные профили, полученные с помощью ПК «ЭАДП».

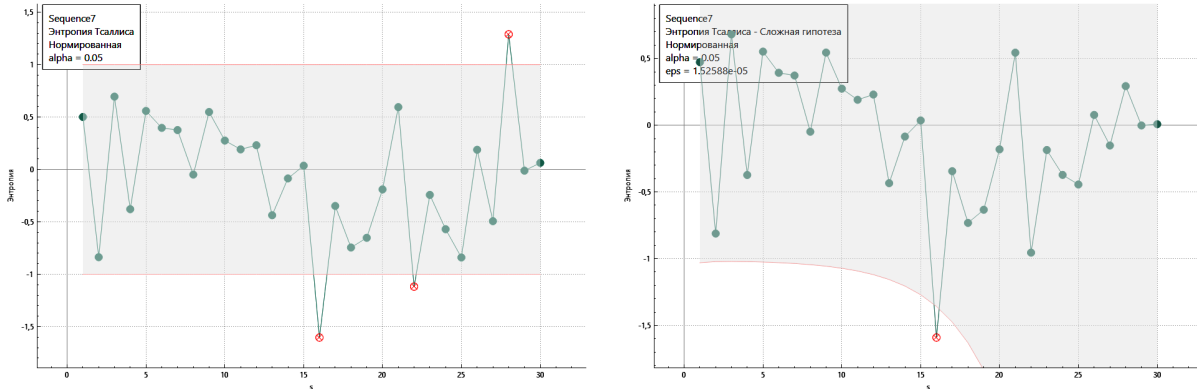


Рис. 3. Энтропийный профиль псевдослучайной последовательности, простая и сложная гипотеза

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках отдельного проекта № 20231671 Министерства образования Республики Беларусь.

Литература

1. Палуха В. Ю., Харин Ю. С. *О применении программного комплекса «ЭАДП» для статистического тестирования выходных последовательностей криптографических генераторов* // Комплексная защита информации: материалы XXVIII научно-практической конференции, Гомель, 25–27 мая 2023 г. Минск: УГЗ МЧС, 2023. С. 148–153.
2. Палуха В. Ю. *Статистические тесты на основе оценок энтропии для проверки гипотез о равномерном распределении случайной последовательности* // Весті НАН Беларусі. Серія фізіка-матэматычных навук. 2017. № 1. С. 79–88.
3. Палуха В. Ю., Харин Ю. С. *Статистическое тестирование криптографических генераторов на основе сложной нулевой гипотезы* // Теоретическая и прикладная криптография: материалы II Международной научной конференции, Минск, 19–20 октября 2023 г. Минск: БГУ, 2023. С. 185–193.

ОЦЕНКА БЕЗОПАСНОСТИ ОБЪЕКТОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Пирштук И.К., Вакулич Д.В.

БГУ, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, pirштук@bsu.by, vakdeniss@mail.ru

Введение, постановка задачи. Существующие технологии защиты от вредоносного программного обеспечения (ПО) и компьютерных угроз, такие как: сигнатурный анализ, эвристический анализ, эмуляция и другие имеют ряд недостатков, которые не позволяют обеспечить должный уровень защиты от компьютерных атак. Например, они не позволяют обнаружить и расследовать неизвестные ранее угрозы, компьютерные атаки без применения вредоносного ПО, сложные атаки (с применением технологий обхода средств защиты) и долго протекающие атаки (от нескольких дней до нескольких лет), признаки которых стали известны спустя продолжительное.

Поэтому необходимо разработать систему обнаружения вторжений (СОВ), которая делала бы предположение о возможном вторжении, основываясь на изменении матрицы корреляции наблюдаемых величин. Система должна иметь функцию накопления статистических данных, для построения эталонной корреляционной матрицы, соответствующей нормальному поведению. После построения такой матрицы она должна производить мониторинг изменений текущей матрицы корреляции по отношению к эталонной, и, при обнаружении отклонений, сигнализировать о предполагаемом вторжении. В случае обнаружения вторжения система должна предоставлять данные для анализа администратору системы.

Подходы исследований. Традиционная система выявления атак на сеть распознает трафик злоумышленника путем сопоставления его с шаблонами из predetermined набора, а сама процедура называется проверка сигнатур [1]. Эти системы работают наподобие пакета антивирусных программ, пытаясь установить соответствие каждого из поступающих в сеть пакетов сигнатуре известной атаки, и эффективно отыскивают уже известные сигнатуры. Недостаток такой системы в том, что проверка сигнатур теряет смысл после того, как злоумышленник видоизменяет сценарий атаки. Подобно тому, как антивирусный пакет незащищен перед новым вирусом, пока поставщики не установят заплатки на свое ПО, так и разработчики системы выявления атак должны регулярно обновлять свои базы данных с сигнатурами.

СОВ на основе метода выявления аномалий проводит обследование пакетов для классификации и отслеживания событий в сети, чтобы установить различия между типичным и нетипичным (аномальным) ее поведением. Под типичным или правильным поведением понимаются действия, выполняемые объектом и не противоречащие политике безопасности. Детекторы аномального поведения анализируют передачу данных между устройствами и отличают нормальный трафик от подозрительного без какого-либо сопоставления сигнатур. Главная трудность заключается в том, какой трафик принять за нормальный. От этого зависит вероятность ошибок первого (пропуск атаки, которая не подпадает под определение аномального поведения) и второго (обнаружение аномального поведения, которое не является атакой) рода. Ошибка второго рода гораздо опаснее. Для построения модели нормального поведения и минимизации ошибок первого и второго рода требуется большое количество времени, которое называется обучением. Это главный недостаток таких систем. Более того, если во время этой фазы имели место атаки, то система не будет реагировать на них в будущем. Преимуществом же такого подхода является устойчивость к новым атакам и то, что система не нуждается в постоянном обновлении сигнатур.

Результаты исследований. В качестве платформы для разработки системы были выбраны данные интернет-магазина и самые характерные для таких платформ величины.

Анализируемые признаки: 1) количество посетителей магазина; 2) количество просмотров товаров; 3) количество уникальных просмотров товаров; 4) количество зарегистрированных в магазине пользователей; 5) количество заказов; 6) общая стоимость всех заказов; 7) количество обращений в службу поддержки.

Для демонстрации работы приложения были разработаны программные модули генерации и загрузки данных, мониторинга данных с накоплением корректных данных, а также симуляции 5 видов атак и вторжений: спама, ложных аккаунтов, нагрузки на сервер, чрезмерного числа подключений и взлома базы данных. На основе корректных исходных данных была сформирована эталонная корреляционная матрица, которая представлена в таблице 14.

Таблица 14. Эталонная матрица

Номер	1	2	3	4	5	6	7
1	1.0000	0.8511	0.2755	0.2446	0.7811	0.5441	0.5807
2	0.8511	1.0000	0.2406	0.2142	0.9115	0.6322	0.4896
3	0.2755	0.2406	1.0000	0.8874	0.2258	0.1640	0.1737
4	0.2446	0.2142	0.8874	1.0000	0.2032	0.1495	0.1577
5	0.7811	0.9115	0.2258	0.2032	1.0000	0.6875	0.4477
6	0.5441	0.6322	0.1640	0.1495	0.6875	1.0000	0.3226
7	0.5807	0.4896	0.1737	0.1577	0.4477	0.3226	1.0000

Далее были рассмотрены и исследованы 5 видов атак и вторжений. Для наглядности в таблице 15 приведена корреляционная матрица, вычисленная по данным со спамом. Как видно из таблицы 15, значения элементов последнего столбца (и последней строки) матрицы существенно изменились: корреляции стали отрицательными.

Таблица 15. Матрица по выборке со спамом

Номер	1	2	3	4	5	6	7
1	1.0000	0.8603	0.2533	0.2094	0.7879	0.5348	-0.0203
2	0.8603	1.0000	0.2286	0.1862	0.9115	0.6119	-0.0095
3	0.2533	0.2286	1.0000	0.8797	0.2309	0.1500	-0.0050
4	0.2094	0.1862	0.8797	1.0000	0.1895	0.1229	-0.0106
5	0.7879	0.9115	0.2309	0.1895	1.0000	0.6839	-0.0288
6	0.5348	0.6119	0.1500	0.1229	0.6839	1.0000	-0.0451
7	-0.0203	-0.0095	-0.0050	-0.0106	-0.0288	-0.0451	1.0000

Выявление атак и вторжений проводится путем сравнения ковариационных матриц с последующим анализом. Одновременно решена задача классификации атак и вторжений на основе расстояния Махаланобиса.

Основные результаты: 1) разработан и протестирован концептуально новый подход к СОВ на основе корреляционного анализа; 2) СОВ требует достаточно длительного периода обучения; 3) предложенный подход способен своевременно предупредить об аномальной активности на интернет-ресурсе.

Литература

1. Корниенко А. А., Слюсаренко И. М. Системы и методы обнаружения вторжений: современное состояние и направления совершенствования // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы, г. С.-П., Петербургский гос. университет путей сообщения. 2004, № 1. С. 21-34.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ И НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ В СЕТЕВОМ ТРАФИКЕ

Т.Т. Сафиуллин

Белорусский государственный университет, Независимости 4, Минск, 220030, Беларусь
tuleubay.safiullin@mail.ru

Введение. В настоящее время одним из активно развивающихся и востребованных направлений в области обеспечения информационной безопасности является обнаружение атак и предотвращение вторжений злоумышленника в компьютерные системы и корпоративные сети. Для этого применяется ряд специализированных алгоритмов и средств использующих для обнаружения известных и неизвестных атак методы машинного обучения.

В работе рассматриваются вопросы классификации сетевого трафика на легитимный и аномальный с применением методов машинного обучения и нейронных сетей. Разработаны архитектуры полносвязной, рекуррентной нейронных сетей, а также нейронной сети с долгой краткосрочной памятью. Проведено исследование эффективности классификации с использованием метрик машинного обучения: точности, полноты, F1-меры и показателя AUC.

Обнаружение аномального трафика с использованием методов машинного обучения. Для тестирования программного обеспечения применялся набор данных NSL-KDD [1], включающий как легитимный так и аномальный сетевой трафик. Обучающий набор данных состоял из 125973 записей: 67343 легитимных записей и 58630 аномальных а тестовый состоял из 22544 записей: 9711 легитимных записей и 12833 аномальных. Всего признаков в обучающем и тестовом наборах данных 43.

Данные предварительно обрабатывались путем преобразования категориальных признаков, масштабирования числовых признаков и кодирования меток. Далее проводился отбор информативных признаков методом обертки с прямым отбором. Всего было отобрано 13 информативных признаков.

В качестве методов машинного обучения использовались: логистическая регрессия, метод опорных векторов, k-ближайших соседей, случайный лес, градиентный бустинг [2]. Для каждого метода найдены оптимальные гиперпараметры, обеспечивающие наибольшую точность классификации. Результаты классификации с использованием методов машинного обучения представлены в таблице 16.

Таблица 16. Эффективность классификации трафика методами машинного обучения на тестовом наборе данных

Модель	Точность	Полнота	F1-мера	AUC
Логистическая регрессия	0.8147	0.9398	0.8728	0.8990
Метод опорных векторов	0.8807	0.9430	0.9107	0.9231
k-ближайших соседей	0.8193	0.9633	0.8895	0.9013
Случайный лес	0.8601	0.9601	0.9074	0.9210
Градиентный бустинг	0.7387	0.9620	0.8357	0.8523

Как следует из таблицы 16, наиболее эффективным для классификации легитимного и аномального трафика среди методов машинного обучения оказался метод опорных векторов (он имеет наибольшее значение показателя AUC). Этим методом правильно классифицированы 8553 из 9711 легитимных записей и 12316 из 12833 аномальных записей.

Обнаружение аномального трафика с использованием нейронных сетей. В качестве нейронных сетей использовались: полносвязная нейронная сеть, рекуррентная нейронная сеть и нейронная цепь с долгой краткосрочной памятью [3].

Полносвязная нейронная сеть представляет собой 4 полносвязных слоя с (30, 60, 90, 1) нейронами в каждом соответственно. Последний слой – выходной, поэтому в нем только один

нейрон, так как решается задача бинарной классификации. После каждого внутреннего слоя следует функция активации ReLU. После выходного слоя следует функция активации сигмоида. После первого и третьего полносвязных слоев находятся дропаут-слои с параметром p равным 0.5 (для предотвращения переобучения). Обучение длилось 20 эпох. Размер батча составляет 32, оптимизатор – ADAM, функция потерь – бинарная кросс-энтропия. В качестве техники регуляризации также используется ранняя остановка с параметром patience равным 5.

Архитектура рекуррентной нейронной сети представляет собой 2 слоя с 60 и 30 нейронами соответственно, за каждым из которых следует дропаут-слой с параметром p равным 0.5. Функция активации выходного слоя - сигмоида, оптимизатор – ADAM, размер батча – 64, количество эпох – 11, функция потерь – бинарная кросс-энтропия.

Нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью LSTM определялась следующим образом: 2 слоя с 30 и 60 нейронами, дропаут-слои с параметрами p равными 0.5 и выходной слой. Модель компилируется с использованием оптимизатора ADAM, функции потерь – бинарная кросс энтропия. Обучение происходит в течении 5 эпох. Используется ранняя остановка с параметром patience, равным 5. Функция потерь – бинарная кросс-энтропия.

Таблица 17. Эффективность классификации трафика нейронными сетями на тестовом наборе данных

Модель	Точность	Полнота	F1-мера	AUC
Полносвязная нейронная сеть	0.8807	0.9430	0.9107	0.9231
Рекуррентная нейронная сеть	0.8807	0.9430	0.9107	0.9231
Нейронная цепь с долгой краткосрочной памятью	0.8193	0.9633	0.8855	0.9013

Как следует из таблицы 17, наиболее эффективными для классификации сетевого трафика оказались полносвязная нейронная сеть и нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью (правильно классифицированы 8546 из 9711 легитимных записей и 12314 из 12833 аномальных записей).

Проведенное исследование показало эффективность применения различных методов машинного обучения и нейронных сетей для выявления аномалий в сетевом трафике. Дальнейшие исследования могут быть направлены на улучшение алгоритмов обнаружения аномалий в сетевом трафике.

Литература

1. Canadian Institute for Cybersecurity [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.unb.ca/cic/datasets/nsl.html>. – Дата доступа: 12.02.2024..
2. Setiawan K., Wibowo A. *Data mining implementation for detection of anomalies in network traffic packets using outlier detection approach* // Jurnal Informatika dan Komputer. 2023. Vol. 6, No 2. P. 79–87.
3. Татарникова Т. М., Бимбетов Ф., Богданов П. Ю. *Выявление аномалий сетевого трафика методом глубокого обучения* // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2021. № 4. С. 36–41.

ОЦЕНКА НЕЗАВИСИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ БАТАРЕИ NIST SP 800-22

А.И. Трубей, В.А. Волошко, М.К. Данилевич, Я.А. Куркин

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
{trubei, valoshka, danilevichmk}@bsu.by

Введение. При построении процедур множественной проверки гипотез требуется учитывать зависимость между статистическими тестами. В докладе приведены способы оценки независимости статистических тестов батареи NIST SP 800-22, основанные на методе Фишера и критерии независимости хи-квадрат. Оценку независимости тестов будем осуществлять в 2 этапа:

1. Суммарная оценка независимости тестов методом Фишера. Проверку независимости тестов можно осуществить методом Фишера. Метод Фишера используется для объединения результатов проверки независимости нескольких тестов, опирающихся на одну и ту же общую гипотезу H_0 . Метод Фишера объединяет вероятности экстремальных значений из каждого теста, известные как Р-значения, в одну тестовую статистику χ^2 , используя формулу [1]:

$$\chi^2 = -2 \sum_{i=1}^k \ln(p_i),$$

где p_i — Р-значение для i -го теста гипотезы.

Когда все нулевые гипотезы верны, а p_i (или соответствующая им статистика тестов) независимы, χ^2 имеет распределение хи-квадрат с $2k$ степенями свободы, где k — количество объединяемых тестов. Этот факт можно использовать для определения интегрального Р-значения для χ^2_{2k} .

В качестве примера можно привести оценку независимости тестов на сравнение неперекрывающихся шаблонов (отрезков) длины $L = 1, 2, \dots, 17$: НШ(1) – НШ(17), а также тестов на сравнение перекрывающихся шаблонов (отрезков) длины $L = 2, \dots, 18$: ПШ(2) – ПШ(18), уровень значимости $\alpha = 0.01$.

В результате применения данных тестов к двоичным последовательностям объемом 10 Мб были получены следующие результаты.

Интегральное Р-значение для тестовой статистики хи-квадрат НШ-тестов равно 0.902. Это означает, что наличие зависимости данных тестов по методу Фишера не выявлено.

Интегральное Р-значение для тестовой статистики хи-квадрат ПШ-тестов равно 0.00011. Это означает, что нулевые гипотезы верны не для каждого теста, гипотеза о независимости данных статистических тестов не подтверждается, что согласуется с ранее теоретически доказанной попарной зависимостью ПШ-тестов [2].

Суммарное интегральное Р-значение для суммарной тестовой статистики хи-квадрат НШ-тестов ПШ-тестов равно 0.0099. Это означает, что нулевые гипотезы верны не для каждого из НШ-тестов и ПШ-тестов, гипотеза о независимости данных статистических тестов не подтверждается.

2. Проверка попарной независимости тестов с применением критерия независимости хи-квадрат. Далее, для проверки независимости батареи тестов можно последовательно использовать метод попарных проверок на независимость. Проверку будем осуществлять следующим образом: для двух тестов T_1, T_2 возьмем n выборок, соответствующих гипотезе H_0 . К каждой выборке применим тесты T_1, T_2 и сформируем новую выборку длины n двумерных векторов дискретизированных Р-значений тестов (диапазон Р-значений — интервал $I = (0, 1)$ — разбивается на 5 ячеек: $I_0 = (0, 0.2), I_1 = [0.2, 0.4), I_2 = [0.4, 0.6), I_3 = [0.6, 0.8), I_4 = [0.8, 1)$, и каждое Р-значение заменяется на номер ячейки, в которую оно попадает):

$$Y = \left((y_1^{(1)}, y_1^{(2)}), \dots, (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \right), \quad y_j^{(i)} = \left[5P_j^{(i)} \right] \in \{0, \dots, 4\},$$

где $P_j^{(i)}$ — Р-значение i -го теста на j -й выборке. По выборке Y вычисляем частоты:

$$v_{l,m} = \sum_{j=1}^n I \{ y_j^{(1)} = l, y_j^{(2)} = m \}, \quad l, m \in \{0, \dots, 4\},$$

$$v_{l,*} = \sum_{j=1}^n I \{ y_j^{(1)} = l \}, \quad v_{*,m} = \sum_{j=1}^n I \{ y_j^{(2)} = m \},$$

а также статистику критерия независимости хи-квадрат и соответствующее Р-значение [3]:

$$S_{ind} = n \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^4 \frac{(v_{l,m} - \frac{v_{l,*}v_{*,m}}{n})^2}{v_{l,*}v_{*,m}}, \quad P_{ind} = 1 - F_{16}(S_{ind}).$$

Здесь $F_d(S_{ind})$ — функция распределения хи-квадрат с d степенями свободы. Принимаем решение о независимости тестов T_1, T_2 , если

$$P_{ind} > \alpha$$

В противном случае делается вывод о том, что тесты T_1, T_2 зависимы.

Проверим независимость некоторых пар тестов на сравнение перекрывающихся шаблонов (отрезков) длины L (ПШ(L)). Эти тесты бывают двух типов, которые обозначим ПШ-1(L) (первый тип) и ПШ-2(L) (второй тип). Для вычисления статистик этих тестов разобьем исходную последовательность длины n на пересекающиеся отрезки длины L :

$$X_i^{(L)} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L-1}), \quad i = 1, \dots, n - L + 1,$$

Вычисляем частоты:

$$v_j^{(L)} = \sum_{i=1}^{n-L+1} I\{X_i^{(L)} = j\}, \quad j \in \{0, 1\}^L.$$

Вычисляем статистики тестов ПШ-1(L) и ПШ-2(L) ($S_1(L)$ и $S_2(L)$ соответственно) и Р-значения:

$$\gamma_L = \sum_{j \in \{0,1\}^L} \frac{\left(v_j^{(L)} - (n-L+1) \cdot 2^{-L}\right)^2}{(n-L+1) \cdot 2^{-L}}, \quad \gamma_0 ::= 0,$$

$$S_1(L) = \gamma_L - \gamma_{L-1}, \quad S_2(L) = \gamma_L - 2\gamma_{L-1} + \gamma_{L-2},$$

$$P_r(L) = F_{2^{L-r}}(S_r(L)), \quad r = 1, 2.$$

Тест ПШ- $r(L)$ ($r = 1, 2$) принимает гипотезу H_0 , если:

$$P_r(L) > \alpha.$$

Отметим, что тест ПШ-1(1) эквивалентен тесту НШ(1) (тесту знаков или монобит), а тест ПШ-2(2) эквивалентен тесту знакоперемен.

Ранее была теоретически доказана [2] асимптотическая независимость следующих пар тестов: попарно всех ПШ-2(L) при различных L ; ПШ-1(L_1) и ПШ-2(L_2) при $1 \leq L_1 < L_2$ (в частности, асимптотически независимы тесты монобит и знакоперемен: $L_1 = 1, L_2 = 2$).

Была проведена экспериментальная проверка независимости указанных пар тестов для двоичной последовательности объемом 10 Мб. Полученные Р-значения превышают уровень значимости $\alpha = 0.01$, что говорит об экспериментальном подтверждении теоретических выводов о независимости соответствующих пар тестов. В частности, это означает, что для любых $1 \leq L_0 < L_1 < \dots < L_k$ следующая батарея из $k + 1$ тестов независима (ее тесты попарно независимы): ПШ-1(L_0), ПШ-2(L_1), ..., ПШ-2(L_k).

Заключение. В ходе проведенных исследований наличие попарных зависимостей между тестами на сравнение перекрывающихся шаблонов (отрезков) первого и второго типа из батареи NIST SP 800-22, применяемым к двоичным последовательностям, с использованием критерия независимости хи-квадрат не выявлено.

Литература

1. Fisher R. A. *Statistical Methods for Research Workers*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1925
2. Волошко В. А. *Об асимптотических свойствах семейства χ^2 -тестов чистой случайности двоичной последовательности* // Сборник материалов II международной научной конференции «Теоретическая и прикладная криптография (ТПК-2023)», 2023. С. 15–43.
3. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир, 1976.

СЕКЦИЯ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА»

ВЗВЕШЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭРДЁША-СПЕНСЕРА О РАСКРАСКЕ ГИПЕРГРАФОВ

С.В. Асташкин¹, К.В. Лыков²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Московское шоссе 34, 443086 Самара, Россия, astash56@mail.ru

²Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь, alkv@list.ru

Введение. *Гиперграфом* называется пара (V, E) , где V — множество *вершин*, а $E \subset 2^V$ — множество *ребер*. Нас будет интересовать так называемый *разброс* (*уклонение*, *discrepancy*), определяемый для гиперграфа $H = (V, E)$ следующим образом:

$$\text{disc}(H) = \min_{f \in F} \max_{U \subset V} \left| \sum_{e \in E, e \subset U} f(e) \right|, \quad (1)$$

где F — это множество всех функций ("раскрасок") из E в $\{-1, 1\}$. Мы будем рассматривать при $1 \leq k \leq n$ *полные k -однородные гиперграфы* на n вершинах, т.е. такие, множество ребер которых состоит из всех подмножеств множества V мощности ровно k . Обозначать такие гиперграфы будем через $H_{n,k}$. В работе [1] был получен следующий результат о разбросе.

Теорема Эрдеша-Спенсера (1971) *С некоторыми константами c_k и C_k , не зависящими от n ,*

$$c_k n^{\frac{k+1}{2}} \leq \text{disc}(H_{n,k}) \leq C_k n^{\frac{k+1}{2}}.$$

Эта теорема вызвала значительный интерес, породила множество обобщений и вариаций, и привела в итоге к появлению новой большой области исследований на стыке анализа, теории вероятностей и дискретной математики — задачам о разбросе. Несмотря на это, имеется очень мало результатов по этой теме для взвешенных (весовых) гиперграфов с весами, расставленными на ребрах. В настоящей работе представлено прямое обобщение теоремы Эрдеша-Спенсера на этот случай.

Разброс взвешенного гиперграфа. Припишем каждому ребру $e \in E$ гиперграфа $H = (V, E)$ вес $w(e) \in \mathbb{R}$. Полученную тройку (V, E, W) , где $W = \{w(e)\}_{e \in E}$, будем называть *взвешенным гиперграфом* и обозначать через $H(W)$. Обобщая (1) разброс взвешенного гиперграфа определим формулой

$$\text{disc}(H(W)) = \min_{f \in F} \max_{U \subset V} \left| \sum_{e \in E, e \subset U} f(e)w(e) \right|. \quad (2)$$

Таким образом формула (1) получается из (2), если считать, что обычный (без весов на ребрах) гиперграф есть частный случай взвешенного гиперграфа, когда $w(e) = 1$ для всех $e \in E$. Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему Эрдеша-Спенсера.

Теорема о разбросе взвешенного гиперграфа. *С некоторыми константами c_k и C_k , не зависящими от n и набора весов W ,*

$$c_k \cdot \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E: v \in e} w(e)^2 \right)^{1/2} \leq \text{disc}(H_{n,k}(W)) \leq E_f \max_{U \subset V} \left| \sum_{e \in E, e \subset U} f(e)w(e) \right| \leq C_k \cdot \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E: v \in e} w(e)^2 \right)^{1/2}.$$

где математическое ожидание E берется по всем функциям $f \in F$, которые считаются *равновесными*.

Отметим, что в случае $w(e) \equiv 1$

$$\sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E: v \in e} w(e)^2 \right)^{1/2} = n \cdot \sqrt{C_{n-1}^{k-1}},$$

что приводит к теореме Эрдёша-Спенсера.

Методы доказательства. Представленная здесь теорема о разбросе получена как следствие из результатов о нормах полиномиального хаоса Радемахера в пространстве ограниченных функций L_∞ , анонсированных в работе [2]. В той же работе показано, как именно результаты о хаосах позволяют получать утверждения о графах на примере задачи разброса для полного двудольного графа $K_{n,n}$. В качестве промежуточного звена между хаосами и графами выступают матрицы со специальными нормами. Обнаруженная связь задач функционального анализа с дискретной математикой представляется весьма перспективной.

Работа Асташкина С.В. была поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова. Работа Лыкова К.В. была поддержана НАН Беларуси в рамках ГПНИ “Конвергенция-2025”.

Литература

1. Erdős P., Spencer J. *Imbalances in k -Colorations // Networks*. 1971/72. Vol. 1, No 4. P. 379–385.
2. Асташкин С.В., Лыков К.В. *Об одном свойстве кратной системы Радемахера и его применении к задачам об уклонении в графах // УМН*. 2024. Т. 79, № 4 (478). С. 173–174.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПАНЦИКЛИЧНОСТИ ДЛЯ t -ЖЕСТКИХ ГРАФОВ

В.И. Бенедиктович¹

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vbened@im.bas-net.by

Введение. Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный граф порядка n и размера m . *Окрестность* вершины $v_i \in V(G)$ обозначим через $N_G(v_i)$, ее *степень* – через $d_i = d(v_i) = |N_G(v_i)|$. $\delta(G)$ ($\Delta(G)$) или просто δ (Δ) обозначают *минимальную* (*максимальную*) степень графа G . Если $\delta = d_1 \leq \dots \leq d_n = \Delta$ – неубывающая степенная последовательность графа G , то для удобства используется обозначение $(0^{x_0}, 1^{x_1}, \dots, \Delta^{x_\Delta})$, где x_k – это число вершин степени k в графе G . *Цикл*, *полный граф* порядка n и *полный двудольный граф* с долями мощностей m и n обозначив через C_n , K_n и $K_{m,n}$ соответственно.

Граф G называется гамильтоновым, если он имеет простой цикл, содержащий все вершины графа G . Граф G называется панциклическим, если он имеет простые циклы всех длин от 3 до n . Хорошо известно, проблемы распознавания, является ли граф гамильтоновым или панциклическим, являются NP-полными.

Более 50 лет назад Хватал ввел новый инвариант для графа, названный им *жесткостью* графа [1]. С тех пор было проведено много исследований, касающихся взаимосвязи между условиями жесткости графа и существованием циклических структур в графе [2–14].

Для некоторого действительного числа t граф G называется t -жестким, если для любого его вершинного разреза S , справедливо неравенство $t \cdot c(G - S) \leq |S|$, где $c(G - S)$ обозначает число компонент связности графа $G - S$.

Жесткость графа G – это наибольшее значение t , при котором G является t -жестким, и обозначается $\tau(G)$.

Если G – полный граф K_n , то полагают $\tau(K_n) = +\infty$ для всех $n \geq 1$. Если G – не полный граф, то жесткость графа равна

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{c(G - S)} : S \subseteq V(G), c(G - S) \geq 2 \right\},$$

где минимум берется по всем разрезам вершин в G . Очевидно, t -жесткий граф является также и s -жестким для всех $s < t$.

Будем обозначать матрицу смежности графа G через $A(G)$. Пусть $D(G) = \text{diag}(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$ — диагональная матрица из степеней вершин графа. Тогда матрица $Q(G) = D(G) + A(G)$

называется *беззнаковой матрицей Лапласа (лапласианом)* графа G . Наибольшее собственное значение матрицы $A(G)$ называется его *спектральным радиусом* и обозначается через $\rho(G)$. Наибольшее собственное значение матрицы $Q(G)$ называется *спектральным радиусом беззнакового лапласиана* графа G и обозначается через $q(G)$.

В последние годы изучению проблемы гамильтоновости графа с использованием спектральной теории графов уделяется широкое внимание и были получены многие важные результаты.

Мы устанавливаем достаточные условия для того, чтобы t -жесткий граф был панциклическим.

Следующий полученный нами результат представляет самостоятельный интерес.

Теорема 1. Пусть G – простой связный t -жесткий граф порядка n и размера t . Тогда если $t \geq C_{n-2t}^2 + 3t^2$, то граф G является панциклическим или двудольным

- 1) когда $t = 1$ и $n \geq 7$;
- 2) когда $t = 2$ и $n \geq 16$;
- 2) когда $t = 3$ и $n \geq 28$.

Из этой теоремы получаем следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть для $t \in \{1, 2, 3\}$ G – простой t -жесткий связный граф порядка n . Тогда если спектральный радиус графа удовлетворяет неравенству

$$\rho(G) \geq \sqrt{n^2 - 4tn - 2n + 10t^2 + 2t + 1},$$

то граф G является панциклическим или двудольным,

- 1) когда $t = 1$ и $n \geq 7$;
- 2) когда $t = 2$ и $n \geq 16$;
- 2) когда $t = 3$ и $n \geq 28$.

Теорема 3. Пусть для $t \in \{1, 2, 3\}$ G – простой t -жесткий связный граф порядка n . Тогда если спектральный радиус беззнакового лапласиана графа удовлетворяет неравенству

$$q(G) \geq \frac{2n^2 + 10t^2 - 4tn + 2t - n}{n - 1} + n - 2,$$

то граф G является панциклическим или двудольным,

- 1) когда $t = 1$ и $n \geq 7$;
- 2) когда $t = 2$ и $n \geq 16$;
- 2) когда $t = 3$ и $n \geq 28$.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция 2025».

Литература

1. Chvátal V. *Tough graphs and Hamiltonian circuits* // Discrete Math. 1973. Vol. 5. P. 215–228.
2. Bauer D. *Some recent results on long cycles in tough graphs* // Proceedings of 6th International Conference on the Theory and Applications of Graphs. 1991. P. 113–123.
3. Bauer D. *Long cycles in graphs with prescribed toughness and minimum degree* // Discrete Math. 1995. Vol. 141. P. 1–10.
4. Bauer D. *Cycles in tough graphs updating the last 4 years* // Graph Theory, Combinatorics, and Applications: Proceeding of the Seventh Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs. 1995. Vol. 1. P. 19–34.
5. Bauer D. *Progress on tough graphs another four years* // Combinatorica. 1999. Vol. 1. P. 69–88.
6. Bauer D. *Not every 2-tough graph is Hamiltonian* // Discrete Appl. Math. 2000. Vol. 99. P. 317–321.
7. Bauer D. *Recognizing tough graphs is NP-hard* // Discrete Appl. Math. 1990. Vol. 28. P. 191–195.
8. Bauer D. *Toughness in graphs – a survey* // Graphs Combinat. 2006. Vol. 22. P. 1–35.
9. Brouwer A. E. *Toughness and spectrum of a graph* // Linear Algebra Appl. 1995. Vol. 226/228. P. 267–271.
10. Hoang C. *Hamiltonian degree conditions for tough graphs* // Discrete Math. 1995. Vol. 142. P. 121–139.
11. Huang X., Das K. C., Zhu S. *Toughness and normalized Laplacian eigenvalues of graphs* // Appl. Math. Comput. 2022. Vol. 425. Art. 127075.
12. Shan S. *An Ore-type condition for hamiltonicity in tough graphs* // Electron. J. Combin. 2022. Vol. 29. P. 1–5.
13. Fan D., Lin H., Lu H. *Toughness, hamiltonicity and spectral radius in graphs* // European journal of combinatorics 2023. Vol. 110. Art. 103701.

14. Enomoto H., Jackson B., Katerinis P., Saito A. *Toughness and the existence of k-factors* // J. Graph Theory. 1985. Vol. 9. P. 87–95.

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ
ПОМЕЧЕННЫХ СЛАБО СВЯЗНЫХ ОРГРАФОВ**

В.А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН,
Усиевича 20, 125190 Москва, Россия

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий ему неориентированный граф, получающийся заменой всех ориентированных ребер на неориентированные, является связным графом [1, с. 32].

Обозначим через D_n — число помеченных орграфов с n вершинами. Известно, что $D_n = 2^{n(n-1)}$ [2, с. 16].

Орграф называется *сильно связным*, если любые его две вершины взаимно достижимы [3, с. 233].

Теорема Пусть C_n — число помеченных слабо связных орграфов с n вершинами. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$C_n \sim 2^{n(n-1)}.$$

Доказательство. В.А. Лисковец получил рекуррентность [4]

$$C_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^{(n-k)(n-k-1)} C_k = 2^{n(n-1)}. \tag{1}$$

Так как имеем

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{n} \binom{n}{k},$$

то (1) можно представить в виде

$$C_n = D_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \binom{n}{k} C_k D_{n-k}.$$

После деления обеих частей этого равенства на D_n получим

$$\frac{C_n}{D_n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \binom{n}{k} \frac{C_k}{D_k} \frac{D_k D_{n-k}}{D_n}.$$

Так как $C_n \leq D_n = 2^{n(n-1)}$ для всех n , имеем $1 \geq C_n/D_n = 1 - f(n)$,

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \binom{n}{k} \frac{C_k}{D_k} \frac{D_k D_{n-k}}{D_n} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{D_k D_{n-k}}{D_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{(n-k)(n-k-1)+k(k-1)-n(n-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 4^{k(k-n)}.$$

В силу симметрии слагаемых в последней сумме относительно концов интервала и учитывая, что $\binom{n}{k} \leq n^k$ и $n-k \geq n/2$ найдем

$$f(n) \leq 2 \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} 4^{-k(n-k)} \leq 2 \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} n^k 4^{-kn/2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^k = \frac{2q_n}{1-q_n}, \text{ где } q_n = \frac{n}{2^n}.$$

Поэтому имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0, C_n \sim D_n = 2^{n(n-1)} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство закончено.

Из теоремы непосредственно получаем следствие 1.

Следствие 1. Почти все помеченные оргграфы являются слабо связными.

Так как почти все помеченные оргграфы являются сильно связными [4], то имеем следствие 2.

Следствие 2. Почти все помеченные слабо связные оргграфы являются сильно связными.

Литература

1. Омельченко А. В. *Теория графов*. М.: МЦНМО, 2018. 416с.
2. Харари Ф., Палмер Э. *Перечисление графов*. М.: Мир, 1977.
3. Харари Ф. *Теория графов*. М.: Мир, 1973.
4. Лисковец В. А. *Об одном методе подсчета графов с отмеченными вершинами* // ДАН СССР. 1969. Т. 184, № 6. С. 1284–1287.

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БИКЛИКОВОГО РАЗБИЕНИЯ ВЕРШИН ХОРДАЛЬНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ И ВЫПУКЛЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

О.И. Дугинов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Платонова 39, 220005, Минск, Беларусь,
duginov@bsuir.by

Среди оптимизационных задач на неориентированных графах видное место занимают задачи разбиения вершин графа на наименьшее число подмножеств, которые порождают подграфы с предписанными свойствами. Интерес к таким проблемам возник давно. Примером задачи из указанного класса может служить классическая задача распознавания совершенных паросочетаний в графе, изучавшаяся еще в середине прошлого века. Этому же классу принадлежит и задача о бикликовом разбиении вершин графа, которая привлекла внимание исследователей сравнительно недавно. Она находит практические приложения в анализе сетевых структур, при работе с данными [1].

Пусть G — двудольный граф. Подграф графа G , изоморфный некоторому полному двудольному графу, называется бикликой графа G . Семейство биклик графа G называется бикликовым разбиением вершин графа G , если каждая вершина графа G принадлежит одной и только одной биклике из семейства. Задача о бикликовом разбиении вершин графа G состоит в том, чтобы найти минимальное число биклик в бикликовом разбиении вершин графа G . Известно, что эта задача является NP-трудной в классе двудольных графов и решается за полиномиальное время в классе двудольных графов перестановок. Отметим тот факт, что последний класс графов содержится в классе выпуклых двудольных графов. Более того, справедлива следующая цепочка включений: двудольные графы перестановок \subset выпуклые двудольные графы \subset хордальные двудольные графы \subset двудольные графы. Хордальный двудольный граф — двудольный граф, в котором любой простой цикл порядка больше, чем четыре, имеет хорду. Хорда простого цикла — ребро, соединяющее не соседние вершины цикла. Выпуклый двудольный граф — двудольный граф, удовлетворяющий следующему условию: вершины одной из его долей можно упорядочить так, что окружение любой вершины противоположной доли вместе с любыми двумя своими вершинами содержит и все вершины между ними. Основные результаты состоят в установлении сложностного статуса задачи в «промежуточных» классах графов цепочки включений.

Теорема 1. *Задача о бикликовом разбиении вершин графа является NP-трудной в классе хордальных двудольных графов.*

Полиномиальное сведение строится от классической NP-трудной задачи о вершинном покрытии.

Разработан полиномиальный алгоритм динамического программирования, который позволяет найти минимальное число биклик в бикликовом разбиении вершин выпуклого двудольного графа.

Теорема 2. *Задача о бикликовом разбиении вершин графа решается за время $O(n^3)$ в классе выпуклых двудольных графов, где n — порядок графа.*

Алгоритм, решающий задачу минимизации, называется приближенным алгоритмом с гарантированной оценкой точности $\alpha(n)$, если для любого примера x размера n этой задачи алгоритм

находит решение y со значением $m(x, y)$ такое, что $m(x, y) \leq \alpha(n) \text{opt}(x)$, где $\text{opt}(x)$ — значение оптимального решения задачи для примера x .

Теорема 3. *Существует приближённый алгоритм с гарантированной оценкой точности 2, решающий задачу о бикликовом разбиении вершин хордального двудольного графа за полиномиальное время.*

Литература

1. Fleischner H., Mujuni E., Paulusma D., Szeider S. *Covering graphs with few complete bipartite subgraphs* // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 2045–2053.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОСТОВНЫЕ ПОДГРАФЫ В ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФАХ

Е.С. Климашевский¹, Ю.Л. Орлович²

¹ООО «Бел Хуавэй Технолоджис»,
пр-т Дзержинского 5, 220069 Минск, Беларусь, ephimius@yahoo.com

²Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, orlovich@bsu.by

Введение. Классы графов с ограниченной локальной структурой являются объектом пристального внимания исследователей, начиная примерно с 70-х годов прошлого столетия. Одним из наиболее изученных таких классов является класс локально связных графов [1] – графов, в которых окружение каждой вершины порождает связный подграф.

Хорошо известно, что класс локально связных графов является весьма содержательным [2]: число помеченных локально связных графов порядка n асимптотически равно числу всех помеченных графов порядка n . В научной литературе хорошо представлены гамильтоновы свойства локально связных графов, а именно достаточные условия наличия гамильтонового (т. е. остовного простого) цикла в таких графах [3–8].

Цель настоящей работы – получить новые достаточные условия существования остовного дерева треугольников в локально связном графе, установить в классе локально связных графов вычислительную сложность задачи существования остовного дерева треугольников, исследовать взаимосвязь теоретико-графового свойства «иметь остовное дерево треугольников» с другими известными циклическими свойствами графов.

Основные понятия. Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговорённые специально, можно найти в [9]. Всюду далее рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Приведём понятие дерева циклов, которое может быть определено индуктивно следующим образом:

(i) простой цикл $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_1)$ длины $k \geq 3$ называется деревом циклов, его рёбра $\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_k, a_1\}$ называются внешними рёбрами дерева циклов, а сам цикл $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_1)$ – элементарным;

(ii) если граф H является деревом циклов с множеством внешних рёбер S , то деревом циклов является также граф H^+ , который получается из графа H добавлением новых вершин x_1, x_2, \dots, x_ℓ , где $\ell \geq 1$, и $\ell + 1$ новых рёбер $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{\ell-1}, x_\ell\}, \{x_1, a\}, \{x_\ell, b\}$, где $\{a, b\}$ – произвольное внешнее ребро графа H , т. е. $\{a, b\} \in S$. Внешними рёбрами дерева циклов H^+ называются рёбра множества

$$S^+ = (S \setminus \{\{a, b\}\}) \cup \{\{x_1, a\}\} \cup \{\{x_\ell, b\}\} \cup \left(\bigcup_{i=1, 2, \dots, \ell-1} \{\{x_i, x_{i+1}\}\} \right),$$

а цикл $(a, x_1, x_2, \dots, x_\ell, b, a)$ – элементарным;

(iii) других деревьев циклов нет.

Другими словами, дерево циклов представляет собой некоторый 2-связный внешнепланарный граф. Дерево циклов называется остовным, если в нём содержатся все вершины исходного графа.

Нетрудно видеть, что граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда он содержит (в качестве подграфа) остовное дерево циклов.

Среди остовных деревьев циклов определённый интерес представляют остовные деревья треугольников – деревья циклов, в которых каждый элементарный цикл является треугольником [10]. Понятно, что дерево треугольников представляет собой максимальный внешнепланарный граф.

Отметим, что наличие в графе остовного дерева треугольников влечёт гамильтоновость этого графа, но обратное, вообще говоря, неверно.

В графе G простой цикл C называется расширяемым [11], если в этом графе существует простой цикл C^* , для которого $V(C) \subset V(C^*)$ и $|V(C^*)| = |V(C)| + 1$. Связный граф, в котором каждая вершина содержится в треугольнике и каждый негамильтонов цикл расширяемый, называется вполне циклически расширяемым [11].

Пусть p и q – целые неотрицательные числа. Граф называется p -регулярным, если степени всех его вершин равны p , и $\{p, q\}$ -регулярным, если степень каждой его вершины равна p или q .

Результаты работы. Известно [10], что каждый связный, локально связный, 5-регулярный граф содержит остовное дерево треугольников. Как показывает следующий результат, это утверждение остаётся верным и в более широком классе графов.

Теорема 1. *Если G – связный, локально связный граф, максимальная степень которого равна 5, а минимальная степень не меньше, чем 3, то G содержит остовное дерево треугольников.*

В теореме 1 оценку на минимальную степень нельзя понизить, поскольку для каждого чётного $k \geq 4$ можно построить связный, локально связный, гамильтонов граф порядка $3k$ с максимальной и минимальной степенями 5 и 2 соответственно, который не имеет остовного дерева треугольников.

Ещё одно достаточное условие существования в графе остовного дерева треугольников содержится в следующей теореме (определения графа треугольной решётки и графа D см. в [5]).

Теорема 2. *Каждый связный, локально связный порядка не меньше 3 граф треугольной решётки, не изоморфный графу D , содержит остовное дерево треугольников.*

Доказательства теорем 1 и 2 по своей сути конструктивны и позволяют построить полиномиальные (от порядка графа) алгоритмы нахождения остовного дерева треугольников для рассматриваемых графов. В общем случае, как показывает следующий результат, задача об остовном дереве треугольников является трудной.

Теорема 3. *В классе 3-связных планарных локально связных $\{3, 6\}$ -регулярных графов задача существования остовного дерева треугольников является NP-полной.*

Как установлено в [6], графы из условия теоремы 1 являются вполне циклически расширяемыми. Следующий результат говорит об отсутствии в общем случае связи между свойствами «иметь остовное дерево треугольников» и «быть вполне циклически расширяемым графом».

Теорема 4. *В классе связных локально связных графов ни одно из следующих свойств «иметь остовное дерево треугольников» и «быть вполне циклически расширяемым графом» не является следствием другого.*

Также в процессе проведённого исследования была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза. *Каждый связный, локально связный граф порядка не меньше 3, который не содержит порождённого подграфа $K_{1,3}$, обладает остовным деревом треугольников.*

Заметим, что каждый связный, локально связный граф порядка не меньше 3, не содержащий порождённого подграфа $K_{1,3}$, является вполне циклически расширяемым [11].

Литература

1. Chartrand G., Pippert R. E. *Locally connected graphs* // Časopis Pěst. Mat. 1974. Vol. 99, No 2. P. 158–163.
2. Erdős P., Palmer E. M., Robinson R. W. *Local connectivity of a random graph* // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7, No 4. P. 411–417.
3. Oberly D. J., Sumner D. P. *Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian* // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3, No 4. P. 351–356.
4. Ryjáček Z. *Almost claw-free graphs* // J. Graph Theory. 1994. Vol. 18, No 5. P. 469–477.
5. Gordon V. S., Orlovich Y. L., Werner F. *Hamiltonian properties of triangular grid graphs* // Discrete Math. 2008. Vol. 308, No 24. P. 6166–6188.

6. Gordon V. S., Orlovich Y. L., Potts C. N., Strusevich V. A. *Hamiltonian properties of locally connected graphs with bounded vertex degree* // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, No 16. P. 1759–1774.
7. Иржавский П. А., Орлович Ю. Л. *Полная циклическая расширяемость локально связных $K_{1,4}$ -ограниченных графов* // Тр. Ин-та математики. 2012. Т. 20, №2. С. 36–50.
8. van Aardt S. A., Burger A. P., Frick M., Thomassen C., de Wet J. P. *Hamilton cycles in sparse locally connected graphs* // Discrete Appl. Math. 2019. Vol. 257. P. 276–288.
9. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. М.: Наука, 1990.
10. Кикуст П. Б. *О существовании гамильтонова цикла в однородном графе степени 5* // Латв. мат. ежегодник. 1975. Т. 16. С. 33–38.
11. Hendry G. R. T. *Extending cycles in graphs* // Discrete Math. 1990. Vol. 85, No 1. P. 59–72.

СЕМИ ОНЛАЙН ВЕРСИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

В.М. Котов¹

¹Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, kotovvm@bsu.by

Введение. Исследуется семи онлайн версия задачи теории расписаний, когда требуется распределить работы на m идентичных процессоров с целью минимизации загрузки максимально загруженного процессора. При этом работы поступают онлайн, но имеется буфер размера $2m/3$.

Постановка задачи Имеется множество работ и m идентичных процессоров. Для каждой работы i известно время выполнения p_i данной работы на процессоре. Для каждой работы необходимо сказать на каком процессоре она будет выполняться. Загруженностью процессора назовем суммарное время выполнения всех работ, которые назначены на него. Необходимо минимизировать максимальную из загруженностей.

Существуют offline и online версии данной задачи. В offline-версии все работы (времена их выполнения) известны сразу. В online-версии работы поступают по одной (это значит, что мы даже не знаем количество работ, которые еще поступят).

Обозначим оптимальный ответ на задачу как C^* . Задача нахождения C^* является NP-полной в сильном смысле даже в offline-версии. Из этого следует, что интерес представляет поиск приближенных алгоритмов, которые находят решение не хуже чем pC^* для любых наборов входных данных, где p есть некоторая константа не меньшая чем 1.

Для заданного приближенного алгоритма число p называется гарантированной оценкой алгоритма. Это значит, что для любого набора входных алгоритм выдаст решение не более чем в p раз хуже оптимального.

Следует отметить, что при доказательстве гарантированных оценок существенную роль играет наличие нижних оценок для оптимального решения C^* . Как правило, используются 2 нижние оценки: дискретная и непрерывная. Дискретная оценка определяется как максимальное время выполнения среди всех поступивших работ, $\max(p_1, \dots, p_i)$. Непрерывная оценка определяется как среднее время выполнения всех поступивших работ, $(p_1 + \dots + p_i)/m$. В исследовании предлагается использовать еще одну дискретную оценку. Пусть $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ является списком уже поступивших работ, упорядоченных в порядке невозрастания процессорных времен их выполнения. Тогда в качестве нижней оценки можно рассматривать и величину $q_m + q_{m+1}$.

Таким образом, задача состоит в использовании нижних оценок и построению различных конструкций, которые позволяют использовать нижних оценок для анализа гарантированной оценки приближенного алгоритма с заданным p .

Существует несколько semi online версий рассматриваемой задачи для улучшения p .

В данном исследовании будем предполагать, что имеется буфер размера k . Тогда при поступлении новой работы мы имеем следующие варианты:

- 1) Если в буфере лежит меньше чем k работ, то мы можем просто добавить работу в буфер.

2) Если в буфере находится ровно k работ, то мы должны назначить одну из работ (текущую или работу их буфера) на процессор.

Введение буфера было исследовано в ряде других задач [1], [2]. Также отметим, что такая версия была исследована в задаче веб-кэширования в работах [3], [4].

В статье [5] показано, что при размере буфера не меньше чем $3m$, верхняя и нижняя оценка совпадают и равны некоторой функции $r(m)$, которая стремится к 1.4659 при достаточно больших m . В той же статье доказаны ряд других оценок при меньшем размере буфера.

Таким образом, что на данный момент нет достаточно эффективных алгоритмов, которые используют буфер размера меньше чем m . Целью исследования является анализ подходов к построению таких алгоритмов при размерах буфера меньше чем m .

Основная идея алгоритма. Здесь предлагается рассмотреть случай, когда буфер имеет размер $2m/3$. Для того чтобы построить алгоритм, который достигает оценку, лучше, чем при отсутствии буфера, логично поддерживать некоторый инвариант, который сохраняется при добавлении очередной работы и обеспечивает гарантированную оценку p .

Предлагается следующая схема. Разобьем процессоры на t групп, так чтобы в каждой группе было k_i процессоров $k_1 + \dots + k_t = m$.

Также выберем некоторые константы a_1, \dots, a_t . Тогда, будем поддерживать следующий инвариант.

Пусть процессор принадлежит i -ой группе, причем его загруженность не больше $a_i * L$, где L – это значение непрерывной оценки для работ, которые уже распределены на процессорах (т. е. мы не учитываем работы, которые еще не пришли и работы, которые содержатся в буфере).

Отметим очевидное необходимо свойство, которые должно быть выполнено для выбранных параметров: $k_1 * a_1 + \dots + k_t * a_t \geq 1$

Предлагается подход, который позволяет поддерживать такой инвариант. Суть этого подхода в том, чтобы добавить сразу несколько работ из буфера в одну из групп, так, чтобы работы группы перешли в другую группу таким образом, что произойдет циклический сдвиг групп или части работ группы.

Литература

1. Alborzi H., Torng E., Uthaisombut P., Wagner S. *The k -client problem* // J. Algorithms. 2001. No 11 P. 115–173.
2. Divakaran S., Saks M. *An Online Scheduling Problem with Job Set-Ups* // Tech.report, DIMACS, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 2000.
3. Feder T., Seiden S. S., R. van Stee, Zhu A. *Combining request scheduling with web caching* // Comput. Sci. 2004. No 324. P. 201–218.
4. Albers S. *New results on web caching with request reordering, in Proceedings of the 16th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*. ACM, New York, 2004.
5. Englert M., Ozmen D., Westermann M. *The Power of Reordering for Online Minimum Makespan Scheduling* // 49-th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Philadelphia, PA. 2008. P. 603–612.

ЗАДАЧА КЛАСТЕРИЗАЦИИ С ПЕРЕКРЫТИЕМ

В.В. Лепин

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
lepin@im.bas-net.by

Введение. Кластеризация – это проблема разделения набора элементов на непересекающиеся наборы так, чтобы элементы в одном наборе имели большое сходство при некоторой заданной мере сходства, а элементы из разных наборов имели низкое сходство.

Кластеризация данных на основе графов является важным инструментом исследовательского анализа данных [1,2]. Область применения варьируется от биоинформатики до обработки изображений. Теоретико-графовая формулировка задачи кластеризации основана на понятии графа

подобия, где вершины представляют элементы данных, а ребро между двумя вершинами выражает высокое сходство между соответствующими элементами данных. Затем вычислительная задача состоит в том, чтобы выделить подмножества вершин, образующих кластеры, где “кластер” – в самом общем понимании это некоторый плотный подграф.

Самой распространенной моделью “кластера” является следующая: “кластер” – это клика графа. При этой модели “кластерный граф” – это граф, у которого каждая связная компонента является полным графом.

В работе [2] были инициированы исследования кластеризации данных на основе графов с точки зрения *задач модификации графов*. Здесь задача состоит в том, чтобы изменить (добавить или удалить) как можно меньше ребер (вершин) входного графа, чтобы получить “кластерный граф”, то есть *вершинно-непересекающееся* объединение кластеров. Соответствующая задача называется кластерным редактированием.

Очень широко изученная версия задач модификации графов, в которой требуется изменить данный граф на граф, удовлетворяющий определенному свойству \mathcal{G} , удалив минимальное количество вершин. Случай, когда \mathcal{G} состоит из графов не имеющих ребер, эта задача является хорошо известной задачей о вершинном покрытии, одной из классических *NP*-трудных задач. Если \mathcal{G} – это “клика-кластерный граф”, граф, в котором каждая связная компонента является полным графом, то соответствующая задача – это другая хорошо известная *NP*-трудная задача, задача получения клико-кластерного графа удалением вершин (для краткости *cluster-vd*). Приведем формальную формулировку этой задачи.

Задача получения клико-кластерного графа удалением вершин (*cluster-vd*)

Вход: Граф $G = (V, E)$ и целое k .

Вопрос: Существует ли подмножество вершин $S \subseteq V$, мощности не превосходящей k , такое, что $G - S$ является клико-кластерным графом?

Многочисленные недавние публикации основываются на этой концепции кластерных графов. Отметим, что, решив задачу *cluster-vd* для графа, моделирующего сложную сеть в природе или обществе, не удастся раскрыть перекрывающуюся структуру сообществ элементов этой сети.

В некоторых приложениях требование, чтобы после модификаций граф был объединением полных графов, является слишком ограничивающим. Поэтому было предложено несколько вариантов модели кластера [3].

В статье [3] рассматривалась следующая модель кластера: кластер – это подмножество вершин, порождающее пересекающиеся максимальные клики графа. Исследовались задачи модификации кластерного графа с s -перекрытием вершин и кластерного графа с s -перекрытием ребер, где кластерный граф с s -перекрытием вершин (соответственно, кластерный граф с s -перекрытием ребер) представляет собой граф в котором каждая вершина (соответственно ребро) содержится не более чем в s максимальных кликах.

Пусть s – положительное целое число. Говорят, что граф G обладает свойством *s-перекрытия вершин* (*s-vertex-overlap*, или сокращенно *s-VO*), если каждая вершина графа G содержится в не более чем s максимальных кликах.

Ясно, что любой 1-VO-граф является клико-кластерным графом.

В работе [3] показано, что следующая задача является *NP*-трудной.

Задача получения *s-VO*-графа удалением вершин

Вход: Граф $G = (V, E)$ и целое k .

Вопрос: Существует ли подмножество вершин $S \subseteq V$, мощности не превосходящей k , такое, что $G - S$ является *s-VO*-графом?

Графы, свободные от P_4 , называются *кографами* [4]. Точнее, для непересекающихся графов $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, пусть $G_1 \cup G_2$ – объединение (или *ко-соединение*) G_1 и G_2 ,

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2),$$

и пусть $G_1 \vee G_2$ – соединение G_1 и G_2 ,

$$G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}).$$

В этих обозначениях кографы – это именно те графы, которые можно построить из графа с одной вершиной, применяя операции соединения и объединения. Таким образом, кограф – это граф с одной вершиной, или соединение двух меньших кографов, или объединение двух меньших кографов.

В [4] показано, что каждому кографу $G = (V, E)$ можно сопоставить так называемое *кодеревом* T графа G и в этой же работе представлен линейно-временной алгоритм с для определения того, является ли данный граф кографом, и если да, алгоритм строит его кодеревом.

Теорема 1. *Если дан n -вершинный кограф вместе с его кодеревом, то за линейное время можно вычислить число удаляемых вершин для получения s -VO-графа.*

Отметим, что для любого графа H свойство – быть H -свободным графом является наследственным. Это означает, что если H' является порожденным подграфом графа H , то H' -свободные графы являются H -свободными графами. Т.о., из теоремы 1 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Задача получения s -VO-графа удалением вершин эффективно решается на H -свободных графах, если H – индуцированный подграф 4-вершинного пути P_4 .*

Литература

1. Schaeffer S. E. *Graph clustering* // Computer Science Review, 2007. Vol. 1, № 1. P. 27–64.
2. Shamir R., Sharan R., Tsur D. *Cluster graph modification problems* // Discrete Applied Mathematics, 2004. Vol. 144, № 1-2. P. 173–182.
3. Fellows M. R., Guo J., Komusiewicz C., Niedermeier R., Uhlmann J. *Graph Based Data Clustering with Overlaps* // Discrete Optimization 2011. Vol. 8, № 1. P. 2–17.
4. Corneil D. G., Lerchs H., Stewart Burlingham L. *Complement reducible graphs* // Discrete Applied Mathematics, 1981. Vol. 3, № 3. P. 163–174.

ЗАДАЧА О $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -УПАКОВКЕ НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА В ГРАФЕ И КВАДРАТИЧНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В.В. Лепин

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
lepin@im.bas-net.by

Введение. Задачи об упаковке графа давно и интенсивно изучаются, что обусловлено их теоретическим и практическим значением. В некоторых таких задачах присутствуют ограничения на расстояние между упаковываемыми подграфами [1].

Рассматривается задача об оптимальной $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке графа. В такой упаковке $S = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ расстояние между любыми подграфами G_i и G_j не меньше k и не больше l . Представлены алгоритмы, которые, используя модульную декомпозицию, решают эту задачу.

Расстояние $d(v_1, v_2)$ между двумя вершинами v_1 и v_2 графа G определяется как длина кратчайшей цепи, связывающей эти вершины. В том случае, когда v_1 и v_2 находятся в разных компонентах связности, полагают $d(v_1, v_2) = \infty$. Кроме того, если $v_1 = v_2$, то $d(v_1, v_2) = 0$.

Расстояние $d(G_1, G_2)$ между двумя подграфами G_1 и G_2 графа G определяется как $\min\{d(v, u) : v \in V(G_1), u \in V(G_2)\}$.

Задачи об упаковке графа. Пусть H – фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов и G – произвольный граф.

Множество $S = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ подграфов графа G будем называть H -упаковкой графа G , если для каждого $G_i \in S$ существует такой граф $H \in H$, что $G_i \cong H$ и для любых двух подграфов $G_i, G_j \in S$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \geq 1$.

Независимой H -упаковкой графа G называется H -упаковка S , в которой для любых двух подграфов $G_i, G_j \in S$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \geq 2$. Т.е. в независимой H -упаковке графа G никакие два подграфа упаковки не соединены ребром графа G .

Пусть k, l – целые числа и $0 \leq k \leq l$. Множество подграфов $S = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ графа G будем называть (\mathbf{H}, k, l) -упаковкой графа G , если для каждого $G_i \in S$ существует такой граф $H \in \mathbf{H}$, что $G_i \cong H$ и для любых двух подграфов $G_i, G_j \in S, i \neq j$, выполняется $k \leq d(G_i, G_j) \leq l$.

\mathbf{H} -упаковка S графа G называется порожденной, если каждый подграф, входящий в S является порожденным подграфом графа G . Отметим, что когда $H \subseteq \{K_1, K_2, K_3\}$, то любая \mathbf{H} -упаковка графа является порожденной.

Пусть граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть \mathbf{H} – фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов и для каждого $H \in \mathbf{H}$ задана функция f_H , которая используется для вычисления веса подграфа $G' \subseteq G$, изоморфного H .

Пусть $S = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ – (\mathbf{H}, k, l) -упаковка графа G . Весом упаковки S будем называть число

$$w_{k,l}(G, S) = \sum_{i=1}^m f_{H \cong G_i}(G_i, w_V, w_E).$$

В задаче о (\mathbf{H}, k, l) -упаковке наибольшего веса в графе дан граф G вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Требуется для графа G найти (\mathbf{H}, k, l) -упаковку с наибольшим весом.

Задача о (\mathbf{H}, k, l) -упаковке наибольшего веса в графе может быть эффективно решена в ряде классов графов. Одним из подтверждений этого утверждения является факт существования следующего сведения такой задачи к задаче о независимом множестве наибольшего веса в графе. Пусть G – граф и \mathbf{H} – множество графов и k, l – целые числа и $1 \leq k \leq l$. Построим граф $H(G, \mathbf{H}, k, l)$, вершинами которого являются подграфы графа G , каждый из которых изоморфен некоторому графу из \mathbf{H} , и две вершины соединены ребром, когда для соответствующих им подграфов G' и G'' выполняется $d(G', G'') \notin \{k, \dots, l\}$. Тогда (\mathbf{H}, k, l) -упаковке графа G соответствует независимое множество вершин в графе $H(G, \mathbf{H}, k, l)$ и наоборот. Если граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, то установим вес вершины $v \in V(H(G, \mathbf{H}, k, l))$ равным $w_{k,l}(v) = f_{G_v}(G_v, w_V, w_E)$, где G_v – подграф графа G , соответствующий вершине v . Тогда (\mathbf{H}, k, l) -упаковке веса ω графа G соответствует независимое множество вершин веса ω в графе $H(G, \mathbf{H}, k, l)$ и наоборот.

Утверждение 1. Пусть \mathbf{H} – фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов, k, l – целые числа и $1 \leq k \leq l$. Если в классе графов Γ граф $H(G, \mathbf{H}, k, l)$ может быть построен за полиномиальное от размера G время и независимое множество наибольшего веса в графе $H(G, \mathbf{H}, k, l)$ может быть найдено за полиномиальное время, то в классе графов Γ задача о (\mathbf{H}, k, l) -упаковке наибольшего веса также может быть решена за полиномиальное время.

Задача о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса.

Пусть граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $S = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ – $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковка графа G . Весом упаковки S будем называть число

$$w_{k,l}(G, S) = \sum_{v \in U} w_V(v) + \sum_{e \in F} w_E(e),$$

где $U = \bigcup_{G_i \in S: G_i \cong K_1} V(G_i)$ и $F = \bigcup_{G_i \in S: G_i \cong K_2} E(G_i)$.

Будем полагать, что $w_{k,l}(G, \emptyset) = 0$.

В задаче о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса требуется найти $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковку графа G , имеющую наибольший вес $w_{*k,l}(G) = \max_S w_{k,l}(G, S)$.

Квадратичная безусловная бинарная оптимизация (QUBO)

Много NP-трудных задач дискретной оптимизации сформулированы как QUBO. Более того, из-за своей тесной связи с моделями Изинга, QUBO представляет собой центральный класс задач для адиабатических квантовых вычислений, где она решается с помощью физического процесса, называемого квантовым отжигом [2,3].

Приводится формулировка задачи о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса в форме QUBO.

Изучаются свойства локальных максимумов квадратичной оптимизации с box -ограничениями, являющейся релаксацией для задачи о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса в графе. В частности, даны характеристики бинарных локальных максимумов в терминах определенных индуцированных подграфов данного графа. Эти результаты используются для разработки эффективного алгоритма локального поиска, который находит бинарный локальный максимум в специальных окрестностях быстрее, чем стандартный алгоритм локального поиска.

Литература

1. Лепин В.В. *Задача о $(\{K_1, K_2\}, k, l)$ -упаковке наибольшего веса в графе* // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук». 2023. Т. 59, № 2. С. 121–129.
2. Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., Wang Y. *The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey* // Journal of Combinatorial Optimization. 2014. Vol. 28. P. 58–81.
3. Lucas A. *Ising formulations of many NP problems* // Frontiers in physics. 2014. Vol. 2.

ЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КЛАССА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ AM

В.Г. Найденко

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vladimir.naidenko@gmail.com

Введение. С 1974 года активно развивается теория дескриптивной сложности, в которой вычислительная сложность характеризуется в терминах логических языков. Фейгин [1] первым показал, что класс сложности NP совпадает со многими проблемами, описываемыми экзистенциальной логикой второго порядка. Дальнейшие исследования выявили логические характеристики для многих классов сложности [2,3,4]. Однако существуют классы сложности, например, AM, для которых до сих пор не было найдено логической характеристики. Целью нашего исследования является установление логической характеристики для класса сложности AM.

Основные результаты. Для удобства и без потери общности мы рассматриваем языки в алфавите $\{0, 1\}$. Напомним, что класс AM может быть определен как множество языков таких, что $L \in \text{AM}$, если существует детерминированная машина Тьюринга M , работающая за полиномиальное время, и полиномы p, q такие, что для каждой входной строки x длины $n = |x|$ выполняются два условия:

1) если x принадлежит L , то доля $y \in \{0, 1\}^{q(n)}$, для которых выполняется $\exists z \in \{0, 1\}^{p(n)} : M(x, y, z) = 1$, не меньше $2/3$,

2) если x не принадлежит L , то доля $y \in \{0, 1\}^{q(n)}$, для которых выполняется $\exists z \in \{0, 1\}^{p(n)} : M(x, y, z) = 1$, не превышает $1/3$.

Для построения логической характеристики класса AM мы будем использовать метод характеристических множеств [3], который впервые был использован для получения логических характеристик полных проблем в классах сложности NL, P, coNP, NP и PSPACE, а также логики для $\text{NP} \cap \text{coNP}$.

Пусть L_1, L_2, \dots перечисление всех языков в классе PH. Пусть M_1, M_2, \dots перечисление всех полиномиальных машин Тьюринга. Пусть p_1, p_2, \dots перечисление всех полиномов. Тогда каждая четвёрка (L_i, M_j, p_k, p_l) может быть ассоциирована с характеристическим множеством $\chi(L_i, M_j, p_k, p_l)$ следующим образом. Для данного входа $x \in \{0, 1\}^*$ длины n , слово x принадлежит $\chi(L_i, M_j, p_k, p_l)$ тогда и только тогда, когда для всех входов $y \in \{0, 1\}^*$ длины не более $\log_2 \log_2 n$, выполняется одно из следующих условий:

1) Если y принадлежит L_i , то доля $v \in \{0, 1\}^{p_k(|y|)}$, для которых выполняется $\exists z \in \{0, 1\}^{p_l(|y|)} : M_j(y, v, z) = 1$, не меньше $2/3$.

2) Если y не принадлежит L_i , то доля $v \in \{0, 1\}^{p_k(|y|)}$, для которых выполняется $\exists z \in \{0, 1\}^{p_l(|y|)} : M_j(y, v, z) = 1$, не превышает $1/3$.

Нетрудно видеть, что множество $\{\chi(L_i, M_j, p_k, p_l) \cap L_i | i, j, k, l = 1, 2, \dots\}$ является перечислением всех языков в классе АМ. Заметим, что для каждого языка $\chi(L_i, M_j, p_k, p_l)$ можно найти полиномиальный алгоритм для его распознавания. Следовательно, для $\chi(L_i, M_j, p_k, p_l)$ может быть построена формула логики второго порядка. Пусть $\Phi(L)$ обозначает формулу логики SO, описывающую язык L . Тогда множество формул $\{\Phi(\chi(L_i, M_j, p_k, p_l)) \wedge \Phi(L_i) | i, j, k, l = 1, 2, \dots\}$ является фрагментом логики SO, охватывающим все языки в АМ.

Работа выполнена при поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы научных исследований "Конвергенция 2025".

Литература

1. Fagin R. *Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets* // Complexity of Computation, R. Karp ed. SIAM-AMS Proceedings 7. 1974. P. 27–41.
2. Immerman N. *Descriptive Complexity*. Springer, 1998.
3. Naidenko V. *Logics for complexity classes* // Logic Journal of the IGPL. 2014. Vol. 22, No 6. P. 1075–1093.
4. Найденко В. Г. *Логическая характеристика класса сложности задач, разрешимых вероятностными алгоритмами за полиномиальное время* // Информатика. 2018. Т. 15, № 4. С. 99–101.

КОНЦЕПЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ОТНОШЕНИЙ (ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ)

В.М. Романчук

Белорусский национальный технический университет,
Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь, Romanchuk@bntu.by

В соответствии с классической концепцией измерения (теорией шкал измерений), под измерением понимают определение отношения измеряемой величины к другой однородной величине, которая служит единицей измерения. Результат измерения выражается в виде числа, которое показывает, сколько раз единица измерения содержится в измеряемой величине. Таким образом, измерение сводится к сравнению измеряемой величины с единицей измерения и нахождению их количественного отношения.

Гельдер определил условия, при которых линейно упорядоченная коммутативная группа изоморфна системе положительных действительных чисел. Его достижение сделало явной связь между понятиями количественной структуры и отношением величин. Теорема Гельдера имеет широкое применение в различных областях, таких как теория вероятностей, математическая статистика и теория меры. Она играет ключевую роль в развитии классической теории измерений и является одним из фундаментальных результатов в этой области. Это позволяет количественно охарактеризовать измеряемую величину. Классическая концепция измерений лежит в основе большинства методов измерений, применяемых в физике и технике. Тем не менее, в настоящее время доминирует репрезентативная теория измерений (РТИ), предложенная математиками XIX века. Они стремились создать теорию измерений, не рассматривая конкретные измерения [1].

В РТИ измерение понимается как присвоение чисел объектам в соответствии с определенными правилами. Важно подчеркнуть, что концепция РТИ отличается от традиционной концепции измерения, принятой в физике. В РТИ не указано, как конкретно строить измерительные шкалы и проводить измерения в реальных условиях. Это вынуждает специалистов разрабатывать свое собственное понимание теории шкал и адаптировать теорию шкал до прикладного уровня [2]. Поэтому неслучайно существует мнение, что РТИ является несостоятельной теорией [1]. Таким образом, теория шкал, несмотря на свою кажущуюся завершенность, всё ещё требует дальнейшего развития.

О необходимости новой концепции измерения величин говорят уже давно. Несмотря на то, что метрологи накопили много сведений о различных измеряемых величинах, «эти сведения не систематизированы и не составляют того, что можно было бы назвать теорией величин». Более того,

давно начались и до сих пор не утихают споры о том, что следует считать величиной [2]. Важно подчеркнуть, что величина является одним из важнейших исходных понятий теории измерений, да и всей современной науки. Известные специалисты по теории шкал, выражают обеспокоенность что несмотря на очевидную важность конструктивной теории измерений, до сих пор не нашлось желающих построить такую теорию или хотя бы наметить ее структуру [2].

Концепция измерения отношений предлагает вернуться к классической теории измерений, которую следует дополнить следующими принципами:

1. Все однородные величины равноправны: каждая величина может быть единицей измерения.
2. Отношения величин не зависят от выбора шкалы измерений.

Такой подход является конструктивным и включает обоснованную классификацию шкал измерений [3].

Литература

1. Michell J. *Quantitative science and the definition of measurement in psychology* // British journal of Psychology. 1997. Vol. 88, No 3. P. 353–383.
2. Кнорринг В. Г. *Философия и измерительная наука* // Труды. СПбГТУ. 2008. № 8. С. 87–92.
3. Романчук В. М., *Субъективные измерения (теория рейтингов)* // Журнал Белорусского государственного университета. Философия. Психология. 2020. № 3. С. 87–98.

О СИСТЕМАХ НЕСКОЛЬКИХ УРАВНЕНИЙ ПО МОДУЛЮ ТРИ

А.В. Селиверстов, О.А. Зверков

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
Большой Каретный переулок 19, с. 1, 127051 Москва, Россия, {slvstv,zverkov}@iitp.ru

Обозначим через $GF(3)$ поле вычетов по модулю три. Мы называем $(0, 1)$ -решением такое решение системы уравнений, в котором каждая переменная принимает значения из множества $\{0, 1\}$. Получены достаточные условия существования $(0, 1)$ -решения у системы линейных уравнений над полем $GF(3)$, в которой число уравнений мало по сравнению с числом переменных. Новые результаты дополняют ранее полученные [1, 2].

Рассмотрим систему линейных уравнений, нетривиально зависящую от переменной x_k . Новая система линейных уравнений получена из исходной системы исключением переменной x_k , если новая система не зависит от переменной x_k , а исходная система эквивалентна объединению новой системы и ровно одного уравнения, равного линейной комбинации уравнений исходной системы. В геометрии исключение переменной соответствует проекции на координатное подпространство.

Лемма 1. *Даны натуральные числа n и m , удовлетворяющие неравенствам $n \geq 5$, $m \geq 2$ и $m \leq \log_3(2n - 1)$, и система из m линейных уравнений от n переменных над полем $GF(3)$. Пусть для каждого индекса $1 \leq k \leq n$ существует уравнение, нетривиально зависящее от переменной x_k . Если у этой системы нет $(0, 1)$ -решения, то существует такой индекс $k \leq n$, что исключение переменной x_k приводит к новой системе, у которой нет $(0, 1)$ -решения. Более того, эта новая система может быть найдена за полиномиальное время $O(mn \log_2(n + 1))$.*

Набросок доказательства. Для системы $Ax = b$ исключаются переменные, соответствующие пропорциональным друг другу столбцам в матрице A . Это возможно над полем $GF(3)$.

Замечание. Лемма 1 позволяет перейти от исходной системы, содержащей достаточно мало уравнений, к новой системе от меньшего числа переменных и с меньшим числом уравнений. Далее неравенство из условия леммы 1 может быть нарушено, что помешает сделать следующий шаг. Поэтому в условии указанной ниже теоремы предполагается выполнение более сильного ограничения. С другой стороны, вычислительные эксперименты со случайными матрицами позволяют надеяться, что такой рекурсивный спуск возможен для почти всех исходных систем при условии типа $m = O(\log_3 n)$, близком к неравенству из леммы 1.

Лемма 2. Дана система линейных уравнений от n переменных над полем $GF(3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и целое число $1 \leq s \leq n$. Эта система имеет $(0, 1)$ -решение тогда и только тогда, когда $(0, 1)$ -решение имеет новая система, в которой для каждого $1 \leq j \leq m$ в j -ом уравнении коэффициент a_{js} при переменной x_s заменяется линейной комбинацией коэффициентов

$$c_j = 2b_j - \sum_{k=1}^n a_{jk}.$$

Теорема. Существует алгоритм полиномиального времени, который получает на вход систему из m линейных уравнений от n переменных над полем $GF(3)$ и при выполнении условия $m \leq \log_3 \log_3(2n - 1)$ принимает вход тогда и только тогда, когда система имеет $(0, 1)$ -решение.

Обсуждаемый алгоритм реализован на языке Python. Листинг программы и примеры доступны по адресу <http://lab6.iitp.ru/~havoc>. Входом служит $m \times (n + 1)$ матрица M . Обозначим через \mathbf{b} последний столбец этой матрицы, а через A подматрицу, расположенную в первых n столбцах, кроме последнего. Столбец \mathbf{b} содержит свободные члены уравнений, а матрица A состоит из коэффициентов линейных членов. Соответствующая система уравнений имеет вид $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Если матрица A пустая, то линейные части всех уравнений равны нулю, а сами уравнения превращаются в тождества $0 = 0$ или ложные равенства $0 = 1$ или $0 = 2$. Матрица M изменяется так, что новая система линейных уравнений имеет $(0, 1)$ -решение тогда и только тогда, когда исходная система уравнений имеет $(0, 1)$ -решение. При этом числа строк и столбцов никогда не возрастают. В цикле выполняются шаги, соответствующие леммам 1 и 2, пока матрица M не стабилизируется или не будет выполнено дополнительное условие остановки. При этом для полученной системы уравнений существование или отсутствие $(0, 1)$ -решения легко проверяется при выполнении условий теоремы.

Пример. Системе уравнений от двух переменных x_1 и x_2 над полем $GF(3)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

соответствует расширенная матрица

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Среди первых двух столбцов нет линейно зависимых, но можно применить лемму 2. Столбец

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

пропорционален первому столбцу в матрице M . Заменяя второй столбец, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первые два столбца пропорциональны друг другу, возможно исключение переменных, которое приводит к ложному равенству $0 = 2$. Следовательно, $(0, 1)$ -решений нет.

Экспериментально показано, что алгоритм намного эффективнее для разреженных систем уравнений. Более того, метод двоичного поиска позволяет найти некоторое $(0, 1)$ -решение системы, когда оно существует, хотя перечисление всех $(0, 1)$ -решений может быть слишком трудным. Это открывает возможность практического использования для решения тех прикладных задач, которые легко свести к поиску $(0, 1)$ -решения системы линейных алгебраических уравнений, в частности, для решения задач математической биологии.

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-44-00099, <https://rscf.ru/project/24-44-00099/>.

Литература

1. Бойков А. А., Селиверстов А. В. *О кубе и проекциях подпространства* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, № 3. С. 402–415. DOI: 10.35634/vm230302
2. Zverkov O. A., Seliverstov A. V. *Effective lower bounds on the matrix rank and their applications* // Programming and Computer Software. 2023. Vol. 49, No. 5. P. 441–447. DOI: 10.1134/S0361768823020160

СИНТЕЗ ГИПЕРКОНТАКТНЫХ И КОНТАКТНО-ТРАНСФОРМАТОРНЫХ СХЕМ

Ю.Г. Таразевич

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, tarazevichyug@mail.ru

В классах $\text{PM}_F^{(n)}$ расширенных матриц над кольцами полиномов с идемпотентными переменными [1] определяются подклассы (гиперконтактных схем): $\text{ГС}_F^{(n)}$ (над произвольным полем F) и $\text{ГС}_Z^{(n)}$ (над кольцом Z целых чисел), — алгебраически расширяющие класс матриц инцидентий контактных схем [2] ($\text{КС}^{(n)}$) и реализующие произвольные булевы функции (БФ), зависящие от n переменных, со сложностью менее $3\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}$ контактов. Для матриц класса $\text{ГС}_Z^{(n)}$ предлагается физическая интерпретация в виде матриц инцидентий-зацеплений контактно-трансформаторных схем ($\text{ТКС}^{(n)}$) [3].

1. Гиперконтактные схемы. Обозначим: F — произвольное поле; $F[X^{(n)}]$ — кольцо полиномов с идемпотентными переменными [1], $X^{(n)} = \{x_1, \dots, x_n\}$; \ominus и $*$ — вычитание и умножение в $F[X^{(n)}]$.

Из элементов поля F построим произвольную $k \times (l+1)$ -матрицу

$$\boxed{A_1 \ A_2 \ \dots \ A_l \ B} \quad (1)$$

с выделенным столбцом B (k и $l+1$ — произвольные натуральные числа). При $l > 0$ каждый столбец A_j умножим на какой-нибудь полином $p_j \in \{x_1, 1 \ominus x_1, x_2, 1 \ominus x_2, \dots, x_n, 1 \ominus x_n, 1\} \subset F[X^{(n)}]$. В результате получим $\text{PM}_F^{(n)}$ -матрицу [1] следующего специального вида:

$$\boxed{p_1 * A_1 \ | \ p_2 * A_2 \ | \ \dots \ | \ p_l * A_l \ | \ B} \stackrel{f}{=} \boxed{A_1 \ | \ A_2 \ | \ \dots \ | \ A_l \ | \ B}, \quad (2)$$

реализующую (в соответствии с [1]) на выделенном столбце B некоторую булеву функцию (БФ) $f(x_1, \dots, x_n)$. Справа в (2) матрица представлена в «удобном» для нее окаймленном виде [3], т.е. с метками-множителями p_j над константными столбцами A_j и «нейтральной» (т.е. не являющейся множителем) меткой f выделенного столбца.

Определение. Любую $\text{PM}_F^{(n)}$ -матрицу вида (2) будем называть $\text{ГС}_F^{(n)}$ -матрицей или, иначе, гиперконтактной схемой над полем F , ее выделенный столбец B — источником, столбцы $1 * A_j$ — проводниками, столбцы $x_i * A_j$ или $(1 \ominus x_i) * A_j$ — контактами, константную матрицу (1) — топологической матрицей гиперконтактной схемы (2) [3].

Замечание. Для любого поля F через $\text{КС}_F^{(n)}$ обозначим множество всех $\text{ГС}_F^{(n)}$ -матриц, в каждом ненулевом столбце топологической матрицы которых ровно два ненулевых элемента — единица и минус единица поля F . Любая $\text{КС}_F^{(n)}$ -матрица M , записанная в окаймленном виде (см. (2)), естественным образом, независимо от поля F , рассматривается как матрица инцидентий [4] двухполюсной контактной схемы [2] S_M , дополненной источником ребром [1], соединяющим полюсы, и содержащей обычные (свободно ориентируемые [3]) замыкающие (x_i) и размыкающие ($\bar{x}_i = 1 \ominus x_i$) контакты, проводники (с меткой 1) и «свободные» петли (инцидентные произвольным вершинам), соответствующие нулевым (или пустым) столбцам $\text{КС}_F^{(n)}$ -матрицы M .

Утверждение. Для любого поля F любая $KC_F^{(n)}$ -матрица M реализует ту же булеву функцию, что и соответствующая контактная схема S_M (см. Замечание).

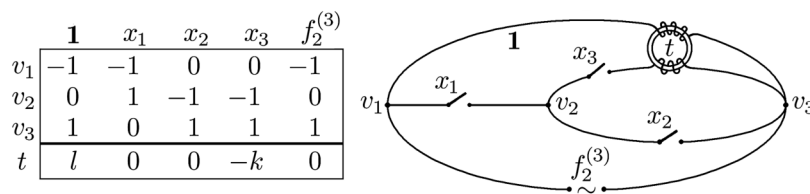
Таким образом, класс $KC^{(n)} = KC_F^{(n)}$ «инвариантен» относительно произвольного выбора поля F ($\forall F: KC^{(n)} \subset GC_F^{(n)} \subseteq PM_F^{(n)}$).

2. Контактнo-трансформаторные схемы. Обозначим: \mathcal{Q} — поле рациональных чисел, $GC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ — множество всех $GC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ -матриц с целочисленными топологическими матрицами. Существует физическая интерпретация произвольных $GC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ -матриц, при которой множество строк исходной $GC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ -матрицы разбивается на две подматрицы: «верхнюю» V и «нижнюю» T (одна из подматриц может оказаться пустой). При этом «верхняя» подматрица V является $KC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ -матрицей и рассматривается как матрица инцидентий контактной схемы S_V (см. Замечание), а «нижняя» (в общем случае произвольная) подматрица T рассматривается как матрица целочисленных коэффициентов зацеплений (определяемых соответствующими индексами пересечений [4]) между электропроводящими одномерными элементами (контактами, проводниками и источником) «верхней» схемы S_V и магнито-проводящими окружностями-сердечниками, соответствующими строкам «нижней» подматрицы. В результате получается матрица инцидентий-зацеплений некоторой (в общем случае произвольной) контактнo-трансформаторной схемы (ТКС⁽ⁿ⁾-схемы) [3], построенной из идеальных элементов: контактов, проводников, кольцевых многообмоточных трансформаторов [5] и источника переменного (или импульсного) тока, — физическое функционирование которой (холостой ход или нагрузка) соответствует алгебраическому функционированию (ноль или единица) исходной $GC_{\mathcal{Q}}^{(n)}$ -матрицы.

3. Сложность гиперконтактных схем. Обозначим: K — произвольное поле или кольцо Z целых чисел; K_{∞} — произвольное бесконечное поле или кольцо Z ; F_q — произвольное конечное (q -элементное) поле; $L^K(f)$ — минимальное число контактов $GC_K^{(n)}$ -матрицы, реализующей БФ f ; $L^K(n) = \max\{L^K(f)\}$, где максимум берется по всем БФ f , зависящим от n переменных; $f_r^{(n)}$ — монотонная симметрическая БФ с произвольным порогом r , существенно зависящая от n переменных [6]; \oplus — знак сложения по модулю два; $l^{(n)} = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ — линейная БФ [2]; \gtrsim — знак асимптотического неравенства [2].

Теорема. $L^K(n) \leq 3\sqrt{2} \cdot 2^{n/2} - 4$; $L_q^F(n) \gtrsim \frac{2^{n/2} + 1}{\sqrt{\log_2 q}}$;
 $L^{K_{\infty}}(f_r^{(n)}) = n$; $L_q^F(f_r^{(n)}) \leq n \lceil \log_q(n+1) \rceil$; $L^K(l^{(n)}) = 2n$.

Из предыдущего, в частности, следует, что любая монотонная симметрическая БФ $f_r^{(n)}$ физически реализуется (безрелейной, одноконтной) n -контактной ТКС⁽ⁿ⁾-схемой. Ниже приводится (в окаймленном виде) матрица инцидентий-зацеплений ТКС⁽³⁾-схемы, реализующей БФ $f_2^{(3)}$ ($\mathbf{1}, x_1, x_2, x_3$ — метки-множители проводника и контактов; $f_2^{(3)}, v_1, v_2, v_3$ и t — «нейтральные» метки источника, узлов и сердечника; k и l — произвольные натуральные числа).



Литература

1. Таразевич Ю. Г. *Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация контактных схем* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 85–93.
2. Лупанов О. Б. *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. М.: Изд.-во МГУ, 1984.
3. Таразевич Ю. Г. *О сложности реализации булевых функций в некоторых классах гиперконтактных схем* // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 3. С. 90–113; Discrete Math. Appl. 2024. Vol. 34, No 1. P. 33–50.
4. Зейферт Г., Трельфалль В. *Топология*. Изд. 2-е. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
5. Касаткин А. С., Немцов М. В. *Электротехника*. Учебник для вузов, изд. 7-е, стер. М.: Высшая школа, 2002.
6. Коршунов А. Д. *Монотонные булевы функции* // Успехи матем. наук. 2003. Т. 58, № 5. С. 5–108.

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ РАБОТЫ
ПРЕДПРИЯТИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ АНАЛИЗА ПРИ ЗАКУПКЕ ОБОРУДОВАНИЯ
(НА ПРИМЕРЕ ОАО «МОГОТЕКС»)**

Я.М. Шафранский¹, В.И. Романов¹

¹Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь,
shafr-04@yandex.by

Введение. Алгоритмическое и программное обеспечение, о котором идет речь в докладе, разработано в рамках серии хозяйственных договоров между Объединенным институтом проблем информатики НАН Беларуси и ОАО «Моготекс», г. Могилев. Программный комплекс предназначен для построения расписания работы отделочной фабрики на стандартный период планирования – один месяц

ОАО «Моготекс» - это одно из крупнейших текстильных предприятий Республики Беларусь. В месяц отделочная фабрика ОАО «Моготекс» обычно выпускает от 300 до 400 различных видов тканей. Весь объем выпуска каждого вида ткани делится на партии средней длиной около 700 метров. Число партий одного вида ткани может колебаться от одной-двух до 400 и более партий. Общее число видов оборудования (машин) на отделочной фабрике – около 50, причем каждый из видов представлен, вообще говоря, несколькими экземплярами (от одного до восьми штук). В целом, при выполнении месячного плана задействовано от 70 до 80 машин, а общий объем выпуска готовой ткани обычно составляет от двух до двух с половиной миллионов метров ткани (соответственно, число партий может колебаться от 2800 до 3500).

Особенности построения расписания. Каждый вид ткани имеет свой технологический маршрут обработки, включающий от двух-трех до двадцати и более стадий. Каждой стадии сопоставлена некоторая технологическая операция, выполняемая одной машин, имеющихся на фабрике. Стадии обработки сопоставлена одна или несколько машин, каждая из которых может выполнять соответствующую этой стадии операцию. При этом длительность выполнения одной и той же операции зависит от того, какая конкретная машина из набора возможных альтернатив будет выбрана для выполнения операции. Каждая машина может, как правило, выполнять несколько различных операций. Поэтому возможно появления одной и той же машины на разных стадиях обработки одного и того же вида ткани. Построить расписание работы отделочной фабрики означает указать для каждой партии ткани и для каждой стадии ее обработки тот интервал времени, в котором будет выполняться соответствующая операция, а также ту конкретную машину из набора возможных альтернатив, которая будет выполнять рассматриваемую операцию. Цель – построить расписание, минимизирующее момент завершения выпуска всей запланированной на данный месяц продукции.

Практически очевидно, что описанная оптимизационная задача является NP-трудной в сильном смысле. Этот факт и большая размерность задачи исключает возможность использования точных методов ее решения.

Характеристики разработанного программного обеспечения. Программный комплекс имеет ряд управляемых параметров, меняя значения которых можно получать различные расписания. Если пользователь зафиксировал значения всех управляемых параметров, то построение месячного расписания работы отделочной фабрики выполняется в пределах 30 секунд. Подбор наилучших значений управляемых параметров осуществляется в полуавтоматическом режиме и может занять от 15 до 40 минут – в зависимости от вычислительных ресурсов, которыми располагает пользователь. При этом для проведения расчетов используется обычная персональная ЭВМ. Минимальные требования к ПЭВМ: процессор с частотой не менее 2,5 GHz, оперативная память объемом не менее 8 Gb, операционная система – Windows-7 или Windows-10. Ограничения на размерность исходных данных: число партий ткани – до 7500, общее число типов операций – до 140, число стадий обработки в одном технологическом маршруте – до 30, общее число обрабатываемых машин – до 100 единиц.

Использование программного комплекса в качестве инструмента для оценки целесообразности закупки нового оборудования. В текущем году руководство ОАО «Моготекс» начало рассматривать вопрос о закупке новой ротационной печатной машины ERA-12, полагая, что блок

операций, выполняемый такой машиной, представляет собой узкое место с точки зрения времени выполнения месячного плана отделочной фабрики. По предложению управления информационных технологий ОАО «Моготекс» был проведен эксперимент, цель которого - проверка влияния подключения нового оборудования на время выполнения плана. Нам были предоставлены данные за последние 12 месяцев работы отделочной фабрики. Данные были преобразованы таким образом, чтобы учесть включение в производственный процесс дополнительной печатной машины. Фактически, была построена имитационная модель модифицированной отделочной фабрики. Используя эту модель, мы провели расчеты и сравнили результаты работы отделочной фабрики до и после выполнения модификации. Результаты расчетов приведены в таблице (таблица сокращена ввиду ограниченности объема тезисов).

	Момент завершения работы в мин.
Дата	Октябрь 2023
Исходный набор машин	46881
Модифицированный набор машин	46699
Выигрыш в мин. (в часах)	182 (3,0)
Дата	Ноябрь 2023
Исходный набор машин	42126
Модифицированный набор машин	41488
Выигрыш в мин. (в часах)	638 (10,6)
Дата	Декабрь 2023
Исходный набор машин	39879
Модифицированный набор машин	39591
Выигрыш в мин. (в часах)	288 (4,8)
Дата	Январь 2024
Исходный набор машин	47776
Модифицированный набор машин	47585
Выигрыш в мин. (в часах)	191 (3,2)
Дата	Февраль 2024
Исходный набор машин	61236
Модифицированный набор машин	61134
Выигрыш в мин. (в часах)	102 (1,7)
Дата	Март 2024
Исходный набор машин	52182
Модифицированный набор машин	51535
Выигрыш в мин. (в часах)	647 (10,8)
Дата	Апрель 2024
Исходный набор машин	71913
Модифицированный набор машин	71690
Выигрыш в мин. (в часах)	223 (3,7)
Дата	Май 2024
Исходный набор машин	71966
Модифицированный набор машин	71646
Выигрыш в мин. (в часах)	320 (5,3)

Как видно из результатов расчетов (максимальный выигрыш составил менее 11 часов), включение в производственный процесс новой печатной машины дает настолько незначительное сокращение времени выполнения месячного плана, что сроки окупаемости нового оборудования составят не один десяток лет. В результате, вопрос о покупке был закрыт.

**AN IMPLEMENTATION OF THE FINE AND CATALAN NUMBERS
IN CHESS COMPOSITION**

V.A. Liskovets¹

¹The Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, 11 Surganov str., Minsk, 220072,
liskov@im.bas-net.by

Introduction. The current work belongs to the interdisciplinary studies that connect enumerative combinatorial mathematics and chess composition. This field of research was originated in the 1980s by several Finnish chess composers who discovered and studied so-called queue problems [1]. Later on, this direction was advanced significantly by prominent mathematicians R. Stanley (MIT) [2] and N. Elkies (Harvard Univ.) [3]. In short, chess problems of a special genre with intended multiple solutions are considered. Such a problem is of *queue type* if all its solutions contain the same set of moves and only differ by their order. Feasible sequences of moves in the solutions of a queue problem are described mathematically as linear extensions of a certain partial order; in particular, as sets of standard or generalized Young tableaux in sophisticated cases (typically due to moves made by doubled or tripled, etc. pawns). The numbers of such tableaux are often represented by closed formulae, sometimes in the form of the product of elementary and classical combinatorial functions. In particular, several splendid queue problems were composed the numbers of solutions of which are equal to or expressed in terms of the famous Catalan numbers with various arguments. Further, in a similar but more complicated manner certain Fibonacci numbers and values of some other combinatorial functions were represented.

Here we report briefly about our recent contribution to this topic, both in the combinatorial and chess-compositional aspects (being a player in the two areas I'm happy to slightly broaden such a special bridge between them). First of all, I found another type of chess problems suitable for sophisticated enumerations in the same queue spirit (slightly generalized). Namely, instead of the fairy *serial* genre (that is, one with a one-sided play) and multi-solvable problems utilized by the above-mentioned authors we deal with the conventional chess rules and the well-known selfmate genre (orthodox in the contemporary understanding), the sound problems of which possess a unique solution. Accordingly, we are interested in the exact number of variations in the solution of such a problem. Now, I've composed several selfmate problems whose numbers of variations are represented in terms of the familiar Fine numbers (for the first time) as well as, anew, of the Catalan numbers. Naturally, we make use of the Young tableaux technique, as well, however, with a certain additional parity constraint on their entries (initially I revealed this key idea in [4], together with the appearance of the Fine numbers afterwards). Let me clarify that in the full generality we do not restrict ourselves to a usual 8×8 chessboard and also consider positions on larger boards in order to implement the same, and new, combinatorial functions with greater arguments.

Construction and enumeration: an example. Few notions of chess composition can be explained here. From the vast literature let me only refer to the comprehensive encyclopedia [5]. A chess problem belongs to the *selfmate* genre if in its position White are invited to start and (as opposed to the ordinary direct mate task) force Black to checkmate white King in the prescribed number of moves n (unless earlier); such problems are stipulated " $s\#n$ ". The unique solution of a sound (dual-free) selfmate problem may contain many variations (lines) ended by mates to White. For our aim we stipulate problems additionally by the question "How many full-length variations?" (shorter variations are ignored since they feature a weaker Black's resistance). All our problems are of so-called *pendulum* type: namely, here in order to succeed, White just oscillate by a piece between two available safe squares all the time until Black exhaust all their neutral non-mating moves. It is this point that allows to bring parity constraints.

We restrict ourselves to showing one chess problem represented in Diagram A. Here is a typical variation of its unique solution after the start 1.Qc1! (wrong 1.Qa1? would result in a 1-move longer play): 1...c5 2.Qa1 c4 3.Qc1 c6 4.Qa1 c3 5.Qc1 c5 6.Qa1 c4 7.Qc1 c2 8.Qa1 c1=Q/R/B/N 9.Qxc1 c3 10.Qa1 c2 11.Qc1! (Zugzwang) Nf8#/Nxf6#/Nxc5#. Ten pawn's move can follow in an order that is consistent with the partial order represented in the right upper table. This is the 2×5 Young diagram, and any full-length variation is a linear extension of it, that is, is representable as a standard Young tableau (SYT) [6]. In particular, the bottom table is the SYT (in the English notation) corresponding to the indicated

variation (the cells contain the move numbers). However, not every SYT of this diagram corresponds to a full-length variation because Queen standing on c1 prevents secondary c2–c1 (on the even moves).

Proposition 1. *Full-length variations of the solution of problem A that include the move c7–c6 are in 12-to-1 correspondence with 2×5 SYT that contain an even entry in the cell (1,5).*

A VL

Pc6-	c5	c4	c3	c2	c1
Pc7-	c6	c5	c4	c3	c2

Partial order of pawn's moves

Pc6	1	2	4	7	8
Pc7	3	5	6	9	10

Exemplifying SYT: even-valued in the upper rightmost cell

s#11 How many full-length variations?

The factor 12 reflects the 4-fold promotion options of Pc6 and the triple mates by Knight's moves.

Proposition 2. *The number of standard Young tableaux of shape $2 \times n$ with an even entry in the cell (1, n) is equal to the n-th Fine number $F(n)$.*

The Fine numbers are defined recursively by $2F(n) + F(n - 1) = C(n)$, $n \geq 2$, $F(1) = 0$, where $C(n)$ denotes the n-th Catalan number, $C(n) = \binom{2n}{n} / (n + 1)$. See [7] for properties and diverse interpretations of $F(n)$. The first six Fine numbers are 0, 1, 2, 6, 18, 57 (sequence A000957 in the OEIS [8]).

Accordingly, we calculate $12 \cdot 18 = 216$ full-length variations in the solution of A.

We obtained a simple combinatorial proof of Proposition 2. Later I found that A. Regev [9] had proved it analytically in an equivalent form and in quite a distinct context.

Similar considerations hold for the variations that include the double move c7–c5 (e.g., 1.Qc1 c5 2.Qa1 c4 3.Qc1 c5 . . . 10.Qa1 c1=Q/R/B/N 11.Qxc1 N~#). The initial Young diagram for them is not rectangular but easily reduces to the 2×4 shape with an odd value in the cell (1,4). Therefore the number of suitable SYT here is equal to $C(4) - F(4)$, since $C(n)$ counts (in particular) $2 \times n$ SYT without restrictions. The sequence of Catalan numbers starts with 1, 2, 5, 14, 42, 132 (A000108 in [8]).

Now, Pc7 promotes in this case too, what adds the multiplier 4, and we get $48(14 - 6) = 384$ variations.

Corollary. *Chess problem A has a unique solution that contains totally*

$$12F(5) + 48(C(4) - F(4)) = 216 + 384 = 600 \text{ full-length variations.}$$

This calculation has been confirmed by the chess problem solving and testing software Popeye.

Further research. Problem A admits various fruitful modifications which result in different counting formulae in terms of $F(n)$ and $C(n)$ (for small n) as well or of values of new combinatorial functions. Moreover, I consider one more related chess matrix with black Ba8 instead of Rh8 that gives a diagonal mate to white Kh1. In particular it turns out easy to compose sound problems that represent $F(n)$ and $C(n)$ individually (up to trivial factors). Most challenging is counting in the case of tripled or multiple black pawns: no closed formulae are known for the corresponding Young tableaux, which have 3 or more rows, are not always rectangular (sometimes truncated) and are subject to similar local parity constraints.

Now, in order to cover arguments $n > 5$, our problem A extends easily to a rectangular board of size $N \times 8$ ($= 8 \times N$ in the chess notation) with $N = n + 3$ by inserting $n - 5$ empty rows ("ranks") above the fifth one and adding 3 technical pawns (besides, this is implementable in a way on a square $N \times N$ board). Changing the stipulation to "s# $2n + 1$ " we get an extended version with the enumerative answer $12F(n) + 48(C(n - 1) - F(n - 1))$. Similar continuations hold for my other problems here.

References

1. Puusa A. *Queue Problems*. Finnish Chess Problem Society. 1992. 23 p.
2. Stanley R. P. *Queue problems revisited* // Proc. Finnish Chess Problem Soc. 2005. Vol. 59(4). P. 193–203. Available at <https://www-math.mit.edu/~rstan/chess/queue.pdf>.
3. Elkies N. D. *New directions in enumerative chess problems* // Electron. J. Comb. 2005. Vol. 11(2). A4.
4. Liskovets V. *The parity effect outside of retros* // Problemas (Spain). 2017. No 18. P. 479–481. *Author's afterword* // No 19. P. 505. Available at <http://sepa64.blogspot.com.es/p/revista-problemas-nueva-epoca.html>.
5. Velimirović M., Valtonen K. *Encyclopedia of Chess Problems: Themes and Terms*. Chess Informant, 2012. 520 p.
6. Adin R., Roichman Y. *Standard Young tableaux* // Handbook of Enumerative Combinatorics (M. Bóna, editor), CRC Press, Boca Raton. 2015. P. 895–974.
7. Deutsch E., Shapiro L. *A survey of the Fine numbers* // Discrete Math. 2001. Vol. 241. P. 241–265.
8. OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Published electronically at <https://oeis.org>.

TOWARDS METHODS OF ESTIMATION OF HOMOGENEOUS FLOW IN A BIDIRECTIONAL NETWORK: SUBOPTIMAL SOLUTIONS

L.A. Pilipchuk¹, Y.V. Ramanouski²

¹Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030,
pilipchuk@bsu.by

²Progress Technologies LLC, 27 Engels Ave., Saint Petersburg, Russia, 194156,
yuriy_v_romanovskiy@mail.ru

Introduction. We consider a real-world problem of constructing such a *suboptimal solution* of the problem of estimating homogeneous flow in a bidirectional network and guaranteeing that the network is fully monitored. Unlike the problem of finding the optimal solution [1, 2], which is *NP-complete* [3] and has huge computational costs, the search for a *suboptimal solution does not require to minimize the set M of monitored network nodes*. Our approach can be used for examining intelligent transportation systems and creating algorithms for solving *sensor location problem* for a bidirectional graph (the sensors are placed in the graph nodes in order to estimate the homogeneous flow in the unmonitored part of the graph).

Suboptimal solution. Let us consider a finite connected bidirectional oriented graph (network) $G = (I, U)$. Denote by x_{ij} the unknown flow on the arc $(i, j) \in U$ and by x_i the unknown external flow into the node $i \in I^* \subseteq I$. The bidirectional graph G has the following property: if there exists an arc $(i, j) \in U$ with the flow x_{ij} then there exists an arc $(j, i) \in U$ with the flow x_{ji} . We represent the traffic flow as follows:

$$\sum_{j \in I^+_i(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(U)} x_{ji} = \begin{cases} 0, & i \in I \setminus I^*, \\ x_i, & i \in I^*, \end{cases} \quad (1)$$

where $I^+_i(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$, $I^-_i(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$. For the external flow the following condition holds: $\sum_{i \in I^*} x_i = 0$. Suppose that for each arc $(i, j) \in U$ one knows the *fraction* $p_{ij} \in (0, 1]$ of the total flow $\sum_{j \in I^+_i(U)} x_{ij}$ going out of the node $i \in I$.

Theorem. Let $G = (I, U)$ be such a connected bidirectional network with a flow function of kind (1) that there are exactly $k = |I^*|$, $k \neq 0$ nodes with nonzero external flow $x_i \neq 0, i \in I^* \subset I$. Also, let the *fraction* $p_{ij} \in (0, 1]$ of the total flow $\sum_{j \in I^+_i(U)} x_{ij}$ going out of the node $i \in I$ be known for each arc $(i, j) \in U$. Then one can determine the arc flows of the whole graph G by placing $k = |I^*|$ sensors in the nodes I^* with nonzero external flow.

In order to collect the information about the flow function of kind (1) for the bidirectional network G we install sensors in the *monitored nodes* $M \subseteq I$, while *the set M of monitored nodes coincides with the set I^* of nodes with nonzero external flow*: $M = I^*$. As a result, the following information is received from the installed sensors:

$$\begin{aligned} x_{ij} = f_{ij}, j \in I^+_i(U); & \quad x_{ji} = f_{ji}, j \in I^-_i(U); \\ x_i = f_i, i \in M = I^*. & \end{aligned} \quad (2)$$

In Sensor Location Problem (SLP) the flows $x_{ij} = f_{ij}, (i, j) \in H_1$ on every incoming and outgoing arc for the set of monitored nodes $M = I^*$ are known as well as the external flows $x_i = f_i, i \in M$ (2), where $M = I^*$. We substitute the known values of the variables (2) into the system of equations (1) and remove the arcs of the set H_1 and the monitored nodes $M = I^*$ from the graph G . The graph $G' = (I', U')$ is obtained after removing nodes and arcs with known values (2) from graph G .

Let $CS(M)$ be the cut-set of the cut of the graph (network) G from the source set $M = I^*$ to the sink set $I \setminus M$. Let $I(CS(M))$ be the set of nodes incident to the edges of $CS(M)$. We form the sets: $M^+ = I(CS(M)) \setminus M$, $M^* = M \cup M^+$ and $I \setminus M^*$.

We consider the nodes of the set $i \in M^+ = I(CS(M)) \setminus M$. If the conditions $|I^+_i(U)| > 1$ are met and there is an arc (i, v_i) with the known flow $f_{i,v_i} \in U$ going out of the node $i \in M^+$ of the graph G then the unmonitored outgoing flow $x_{ij}, (i, j) \in U'$ for graph G' can be expressed for the node $i \in M^+$ as follows:

$$x_{ij} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}} f_{i,v_i}, \quad i \in M^+, \quad j \in I_i^+(U'), \quad v_i \in I, \quad |I_i^+(U)| > 1. \quad (3)$$

Let us substitute (3) into the system of equations for the graph G' . Let's continue removing the arcs with known flows (3) from the graph $G' = (I', U')$. We have the resulting graph $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ (the unmonitored part of the graph G). The flows $x_{ij}, (i, j) \in \bar{U}$ on the arcs coming from the nodes $I \setminus M^*$ are unknown. So we form the additional equations of type (3) if the conditions $i \in I \setminus M^*, j \in I_i^+(\bar{U}), v_i \in \bar{I}, |I_i^+(\bar{U})| > 1$ are met.

Then the system of equations to get the unknown flows $x_{ij}, (i, j) \in \bar{U}$ has the form

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = a_i, \quad i \in \bar{I}, \quad (4)$$

$$x_{ij} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}} x_{i,v_i}, \quad i \in I \setminus M^*, \quad j \in I_i^+(\bar{U}), \quad v_i \in \bar{I}, \quad |I_i^+(\bar{U})| > 1, \quad (5)$$

where $a_i, i \in \bar{I}$ are constants obtained from the system (1) using the a priori information (2)–(3).

In the case of *additional* equations (5) we apply the constructive theory of decomposition [4–6] to solve the system (4)–(5). We can not form *additional* equations (5) if the following conditions are not met: $i \in I \setminus M^*, j \in I_i^+(\bar{U}), v_i \in \bar{I}, |I_i^+(\bar{U})| > 1$. In the absence of *additional* equations (5) we use the effective algorithms for solving a sparse system (4) with a *graph incidence matrix* [6].

Sparse matrix technology [7] is an important area of research in applied mathematics. This line of research is not only used as a computational tool in many applications, but is also a separate area of theoretical research in the field of sparse matrix analysis [6, 8, 9]. Along with theoretical research in the field of sparse matrix analysis, research is also being conducted in the field of advanced information technologies for constructing numerical solutions to sparse systems of linear algebraic equations and inequalities and their applications. The approach of applying general optimization principles to the sparse structure of the constraints of the problem is promising in the analysis of sparse matrices. It is important to study the combinatorial properties of embedded network structures of constraints and to develop and use modern advances in the technology of constructing their numerical solutions. It is necessary to emphasize the importance of combinatorial properties of support for various types of sparse matrices in systems of linear algebraic equations, as well as recent advances in technologies for constructing their systems. numerical solutions.

References

1. Pilipchuk L. A., Ramanouski Y. V. *Sensor location problem for the bidirectional graph: optimal solutions*. Web Programming and Internet Technologies (WebConf2024): materials of the 6th International. scientific-practical conf., Minsk, May 15–16, 2024 / Belarus. State University; Editorial Board: I.M. Galkin (chief editor) [and others]. Minsk: BSU, 2024. P. 213–218.
2. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Polyachok E. H., Farazey A. I. *Identification of sensory configuration and flow control* (in Russian) // Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science. 2018. No 2. P. 67–76.
3. Bianco L., Confessore G., Reverberi P. *A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates* // Transportation Science. 2001. Vol. 35, No 1. P. 50–60.
4. Pilipchuk L. A. *On decomposition methods of sparse underdetermined systems with matrices of full and incomplete rank* (in Russian) // Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University. 2016. No 6 (99). P. 87–90.
5. Pilipchuk L. A., Malakhouskaya Y. V., Kincaid D. R., Lai M. *Algorithms of Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure* // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4. No 2. P. 191–201.
6. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: BSU, 2013. 235 p.
7. Pissanetzky S. *Sparse Matrix Technology*. London: Academic Press, 1984. 321 p.
8. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. *Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2009. Vol. 54. No 2. P. 193–205.
9. Pilipchuk L. A. *Linear nonhomogeneous problems in network flow programming*. Minsk: BSU, 2009. 222 p. (in Russian).

SPECTRAL GAPS OF CAYLEY GRAPHS OF COMPLEX REFLECTION GROUPS

H.A. Zadarazhniuk¹

¹Belarussian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030,
a_zadorozhnyuk@mail.ru

Spectral gap of a graph is the smallest non-zero eigenvalue of its Laplacian matrix, and it is strongly related to graph's properties concerning connectivity. Exact values of spectral gaps are known for Cayley graphs of Coxeter groups – that is, groups generated by real reflections. In this work we estimate them for Cayley graphs of $G(m, 1, n)$ – a family of irreducible complex reflection groups, with a generating set similar to Coxeter generators.

The group $G(m, 1, n)$ is a semidirect product of an abelian group of order m^n and symmetric group S_n . The group's elements can be represented by monomial matrices, like in case of symmetric group. Denote by ξ the m -th primitive root of 1 and let $\xi^{(a_1, \dots, a_n)} \times \tau$ denote the $n \times n$ monomial matrix which has ξ^{a_i} at position $(i, \tau(i))$. Define the generating set $T_{m,n}$, consisting of the following reflections:

1. $s_i = (i, i+1)(0, \dots, 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ – reflections of order 2;
2. $r = \text{id}(1, 0, \dots, 0)$ – reflection of order m ;
3. $r^{-1} = \text{id}(-1, 0, \dots, 0)$ – reflection of order m .

In [1] Akhiezer estimates spectral gaps of Cayley graphs of Coxeter groups showing that the spectra of certain $n \times n$ matrices are contained in the spectra of Laplacian matrices of these graph. Similar approach can be used for any generating set and reflections of order other than 2, although the resulting matrix and its eigenvalues may be more difficult to compute depending on the chosen generators. For our case, we have the following matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix}.$$

Statement. *The spectrum of Cayley graph of $G(m, 1, n)$ with generating set $T_{m,n}$ contains the spectrum of matrix A , and thus its spectral gap $\lambda_{m,n}$ does not exceed the smallest eigenvalue of A .*

We hypothesise that the smallest eigenvalue of matrix A is, in fact, equal to the $\lambda_{m,n}$, as is evidenced by computations done for several first values of n and m .

To try to find the exact eigenvalues of A , one can use its similarity to Toeplitz matrix. Assuming that the eigenvectors v are of the form $v_j = a \cos j\theta + b \sin j\theta$ if $j = \overline{1, n-1}$, $v_n = 1$ and solving $Av = \lambda v$, we come to the conclusion that

$$\lambda = 2 - 2 \cos \theta,$$

$$a = -1,$$

$$b = \left(\frac{2 - 2 \cos \theta}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{m}} + \cos \theta - 1 \right) \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}.$$

Then, if from the expression for b we can find n values of θ such that $\cos \theta$ are all different, we've found all eigenvalues of A .

This assumption is confirmed by direct computations, but has only been proven for $m = 4$ and $m = 6$, thus allowing to give an explicit estimate.

Theorem. *The following inequalities hold:*

$$\lambda_{4,n} \leq 2 - 2 \cos \frac{\pi}{2n};$$
$$\lambda_{6,n} \leq 2 - 2 \cos \frac{\pi}{2n+1}.$$

References

1. Akhiezer D. N. *On the eigenvalues of the Coxeter Laplacian* // Journal of Algebra. 2007. Vol. 313. P. 4–7.

Научное издание

**XIV БЕЛОРУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,
ПОСВЯЩЕННАЯ 65-ЛЕТИЮ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ**

Материалы Международной научной конференции

В трех частях

Часть 3

С о с т а в и т е л ь:

Бусел Татьяна Сергеевна

Материалы публикуются в авторской редакции

Компьютерная верстка *И. В. Близнец*

Подписано в печать 23.10.2024. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 19,07. Уч.-изд. л. 16,9. Тираж 98 экз. Заказ 220.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013, № 2/196 от 05.04.2017.
Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск.