НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт математики

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

XIV БЕЛОРУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,

посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси

Материалы Международной научной конференции

В трех частях

Часть 2

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Уравнения с частными производными и математическое моделирование

Теория вероятностей и математическая статистика

Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 года

Минск
«Беларуская навука»
2024

УДК 51
ББК 22.1
Ч-54

Составитель

кандидат физико-математических наук Т. С. Бусел

Ч-54 **XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси :** материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г. В трех частях. Часть 2. – Минск : Беларуская навука, 2024. – 162 с.

ISBN 978-985-08-3223-8.

Вторая часть сборника материалов Международной научной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» включает доклады по следующим направлениям: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и математическое моделирование, теория вероятностей и математическая статистика.

Для научных работников, преподавателей и студентов, а также всех, кто интересуется математикой.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-985-08-3223-8 (ч. 2)
ISBN 978-985-08-3221-4

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

СЕКЦИЯ «УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

СЕКЦИЯ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

КОМПАКТНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДАРБУ

Амелькин В.В.[1], **Тыщенко В.Ю.**[2]

[1]Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь vamlkn@mail.ru
[2]Гродненский госуниверситет, факультет математики и информатики
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь valentinet@mail.ru

В 1878 г. Гастон Дарбу опубликовал работу [1], в которой рассматривались свойства дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=\frac{L(x,y)+yN(x,y)}{M(x,y)+xN(x,y)}, \tag{1}$$

где $L(x,y),M(x,y),N(x,y)$ – многочлены. В дальнейшем в статьях [2, 3] и монографиях [4, 5] рассматривались качественные характеристики частных случаев уравнения (1). В работе [6] рассматривался n–мерный аналог уравнения (1)

$$\frac{dw_i}{dz}=L_i(z,w)+w_iM(z,w), i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $n>1, w=(w_1,\dots,w_n), L_i(z,w)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(z)w_k, a_{ik}(z)$ – голоморфные функции, $k=\overline{1,n}, i==\overline{1,n}, M(z,w)$ – однородная функция относительно w порядка ρ с голоморфными коэффициентами. У системы (2) в комплексном случае изучались решения и интегралы, а в автономном вещественном – предельные циклы. В этой же работе система (2) была названа **системой Дарбу**.

Будем рассматривать компактные интегральные гиперповерхности вещественной дифференциальной системы

$$dx_i=\sum_{j=1}^{m}\Big(L_{ij}(x)+x_iP_j(x)\Big)dt_j, i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

обыкновенной при $m=1$ и вполне разрешимой [7, с. 21] при $m>1$, где $n>1, m<n, L_{ij}(x)==\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ijk}x_k, a_{ijk}\in\mathbb{R}, k=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}, i=\overline{1,n}, P_j(x)$ – дважды гладкие однородные функции порядка $\rho\geqslant 1$, причем ранг матрицы, соответствующей правой части системы (3), равен m почти везде на $\mathbb{R}^n$. Ее будем называть **однородной системой Дарбу**

Получены следующие утверждения.

Теорема 1. *При нечетном n обыкновенная система* (3) *не имеет изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

Теорема 2. *Обыкновенная система* (3) *не может иметь более одной изолированной компактной регулярной интегральной гиперповерхности.*

Теорема 3. *Вполне разрешимая система* (3) *не может иметь более одной изолированной компактной регулярной интегральной гиперповерхности.*

Литература

1. Darboux G. *Mèmoire sur les èquations diffèrentielles algèbriques du premier ordre et du premier degrè* // Bull. des sci. 1878. Vol. 2. P. 60–96.

2. Лукашевич Н. А. *Интегральные кривые уравнения Дарбу* // Дифференц. уравнения. 1966. Т.2, № 5. С. 628–633.

3. Маханек М. М. *Предельные циклы системы Дарбу* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.–мат. навук. 1983. №1. С. 6–11.

4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск: Изд–во БГУ, 1982.

5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. *Уравнение Дарбу и его аналоги.* Гродно: Гроднен. гос. ун–т., 1985.

6. Горбузов В. Н., Павлючик П. Б. *Решения, интегралы и предельные циклы системы Дарбу n–го порядка* // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.spb.ru/diffjournal). 2002. №2. С. 26–46.

7. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: УРСС, 2004.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Т.К. Андреева[1], **И.П. Мартынов**[1], **В.А. Пронько**[1]

[1]Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Ожешко 22, 230021 Гродно, Беларусь,
tatsyana.andreeava@gmail.com, i.martynov@grsu.by, v.a.pronko@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{(\nu)} = \frac{P_1(y,z)}{Q_1(y,z)}, \quad y^{(\nu)} = \frac{P_2(x,z)}{Q_2(x,z)}, \tag{1}$$

где $x^{(\nu)} = \frac{d^\nu x}{dz^\nu}$, $y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dz^\nu}$, x, y – комплекснозначные функции от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{N}$, $P_i(u,z)$, $Q_i(u,z)$, $i = 1,2$ – полиномы переменной u с аналитическими по z коэффициентами в некоторой области $D \subset C$, причем $\frac{P_i(u,z)}{Q_i(u,z)}$, $i = 1,2$ – несократимые рациональные дроби.

Ставится задача: найти необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у системы (1).

В [1] получены необходимые и достаточные условия наличия требуемого свойства у системы (1) при $\nu = 1$, в [2] и [3] – при $\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$.

Предположим, что $\frac{\partial Q_1}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial Q_2}{\partial x} \neq 0$, $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$ и представим Q_1, Q_2 в виде $Q_1(y,z) = \prod_{k=1}^{s}(y-\alpha_k(z))^{\gamma_k}$, $\sum_{k=1}^{s}\gamma_k = M \geqslant 1$, $\prod_{k=1}^{s}\gamma_k \neq 0$, $Q_2(y,z) = \prod_{k=1}^{r}(x-\beta_k(z))^{\delta_k}$, $\sum_{k=1}^{r}\delta_k = m \geqslant 1$, $\prod_{k=1}^{r}\delta_k \neq 0$, $P_1(y,z) = \sum_{k=0}^{N} p_k(z)y^k$, $P_2(y,z) = \sum_{k=0}^{n} q_k(z)y^k$.

Приняв за неизвестные функции соответственно $x - \beta_1(z)$ и $y - \alpha_1(z)$ и, не меняя обозначений, систему (1) запишем в виде

$$x^{(\nu)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} p_k(z)y^k}{y^{\gamma_1}\prod_{j=2}^{s}(y-\alpha_j(z))^{\gamma_j}}, \quad y^{(\nu)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} q_k(z)x^k}{x^{\delta_1}\prod_{j=2}^{r}(y-\beta_j(z))^{\delta_j}}. \tag{2}$$

Пусть $\gamma_1\delta_1 > 1$. Введя в систему (2) параметр λ по формулам

$$x = \lambda^{\nu(\gamma_1-1)}X, \quad y = \lambda^{\nu(\delta_1-1)}Y, \quad z = z_0 + \lambda^{\gamma_1\delta_1-1}t,$$

при $\lambda = 0$ получим упрощенную систему

$$\frac{d^\nu X}{dt^\nu} = \frac{a_0}{Y^{\gamma_1}}, \quad \frac{d^\nu Y}{dt^\nu} = \frac{b_0}{X^{\delta_1}}, \tag{3}$$

где a_0, b_0– определенные числа, $a_0 b_0 \neq 0$. Решение системы (3) будем искать в виде

$$X = \alpha(t-t_0)^l, \quad Y = \beta(t-t_0)^m,$$

где $\alpha\beta \neq 0$. При $\gamma_1 > 1$, $\delta_1 > 1$ получим

$$l = \frac{\nu(1-\gamma_1)}{1-\gamma_1\delta_1}, \quad m = \frac{\nu(1-\delta_1)}{1-\gamma_1\delta_1} \tag{4}$$

и уравнения для определения α и β

$$\alpha l(l-1)\ldots(l-\nu+1) = a_0\beta^{-\gamma_1}, \quad \beta m(m-1)\ldots(m-\nu+1) = b_0\alpha^{-\delta_1}.$$

Следовательно, имеет место

Лемма 1. *Для отсутствия подвижных критических особых точек у системы* (3) *при* $\gamma_1 > 1$, $\delta_1 > 1$ *необходимо чтобы числа* l, m*, определяемые соотношениями* (4)*, были целыми.*

Рассмотрим случай $\nu = 2$. Соотношения (4) примут вид $l = \frac{2(1-\gamma_1)}{1-\gamma_1\delta_1}$, $m = \frac{2(1-\delta_1)}{1-\gamma_1\delta_1}$. Очевидно, что $0 < l < 1$, $0 < m < 1$ при $\gamma_1 > 1$, $\delta_1 > 1$, $\alpha\beta \neq 0$. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Система* (2) *при* $\nu = 2$, $\gamma_1 > 1$, $\delta_1 > 1$ *содержит подвижные критические особые точки.*

Положим теперь $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 > 1$. В систему (3) введем параметр λ по формулам

$$X = \lambda U, \quad Y = \lambda W, \quad t = t_0 + \lambda^{\frac{\delta_1+1}{2}}\tau.$$

Решение полученной системы будем искать в виде рядов $U = U_0 + \lambda^{\delta_1-1}(U_1 + \lambda U_2 + \ldots)$, $W = W_0 + + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{gathered}\left(\ddot{U}_0 + \lambda^{\delta_1-1}\ddot{U}_1 + \lambda^{\delta_1}\ddot{U}_2 + \ldots\right)\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right) = \lambda^{\delta_1-1}a_0,\\ \left(\ddot{W}_0 + \lambda\ddot{W}_1 + \ldots\right)\left(U_0 + \lambda^{\delta_1-1}U_1 + \ldots\right)^{\delta_1} = b_0.\end{gathered} \tag{5}$$

Из системы (5) для определения U_0, W_0 получим уравнения $\ddot{U}_0 = 0$, $\ddot{W}_0 = \frac{b_0}{U_0^{\delta_1}}$. Тогда можем положить $U_0 = C_1$, $W_0 = \frac{b_0}{2C_1^{\delta_1}}(\tau - \tau_0)^2$, где C_1, τ_0 – произвольные постоянные. Далее, из системы (5) для U_1 получим уравнение $\ddot{U}_1 = \frac{2a_0C_1^{\delta_1}}{b_0(\tau-\tau_0)^2}$. Его частное решение запишем в виде $U_1 = -\frac{2a_0C_1^{\delta_1}}{b_0}\ln(\tau - \tau_0)$, где C_1, τ_0 – произвольные постоянные. Поэтому, система (2) при $\nu = 2$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 > 1$ содержит подвижные критические особые точки. Значит, справедлива

Теорема 1. *Для отсутствия подвижных критических особых точек у системы* (2) *при* $\nu = 2$*, необходимо, чтобы* $\gamma_k = 1$, $k = \overline{1,s}$, $\delta_p = 1$, $p = \overline{1,r}$.

При выполнении условий теоремы 1 в систему (2) введем параметр λ по формулам

$$x = \lambda X, \quad y = \lambda Y, \quad z = z_0 + \lambda t,$$

при $\lambda = 0$ получим упрощенную систему

$$\ddot{X} = \frac{a_0}{Y}, \quad \ddot{Y} = \frac{b_0}{X}, \tag{6}$$

где $a_0 b_0 \neq 0$. Из системы (6) построим уравнение

$$\ddddot{Y} = 2\frac{\dddot{Y}^2}{\ddot{Y}} - \frac{a_0}{b_0}\frac{\ddot{Y}^2}{Y}. \tag{7}$$

Если в (7) положим $\dot{Y} = wY$, то уравнение для w примет вид

$$\dddot{w} = 2\frac{(\ddot{w} + 2w\dot{w})^2}{\dot{w} + w^2} - \left(\frac{a_0}{b_0} + 3\right)\dot{w}^2 + \left(4 - 2\frac{a_0}{b_0}\right)w^2\dot{w} + \left(1 - \frac{a_0}{b_0}\right)w^4. \tag{8}$$

В уравнение (8) введем параметр λ по формуле $t = t_0 + \lambda\tau$. При $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение $\frac{d^3w}{d\tau^3}\frac{dw}{d\tau} = 2\left(\frac{d^2w}{d\tau^2}\right)^2$, решение которого $w = C_1\ln(\tau - \tau_0) + C_2$, где C_1, C_2, τ_0 – произвольные постоянные, содержит подвижные критические особые точки. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Для отсутствия подвижных критических особых точек у системы* (1) *при* $\nu = 2$ *необходимо, чтобы* $\frac{\partial Q_1}{\partial y}\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$.

В [3] получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у системы (1) при $\nu = 2$, $\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$. В докладе также рассматриваются условия наличия требуемого свойства у системы (1) при $\nu \geqslant 3$.

Литература

1. Яблонский А. И. *Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны* // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 468–478.

2. Яблонский А. И. *Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек* // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 6. С. 752–762.

3. Мартынов И. П., Андреева Т. К., Пронько В. А. *Об одном классе систем двух дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве* // Веснiк Гродзенскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта iмя Янкi Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiчальная тэхнiка i кiраванне 2024. Т. 14, № 1. С. 29–36.

СТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ЗНАЧЕНИЙ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ

Е.А. Барабанов[1], **Е.Б. Бекряева**[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
bar@im.bas-net.by
[2]Военная академия Республики Беларусь, пр-т Независимости 220, 220057 Минск, Беларусь,
evgenia.bekriaeva@gmail.com

Линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, а матричнозначная функция $A(\cdot)\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ограничена и непрерывна, называется системой с *экспоненциальным расщеплением порядка* m [1, с. 249; 2, с. 146], если существует разложение линейного пространства $\mathcal{X}_A$ её решений в прямую сумму $\mathcal{X}_A = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \ldots \oplus \mathcal{L}_m$ подпространств такое, что интервалы генеральных показателей подпространств $\mathcal{L}_i$, т.е. отрезки $\bigl[\omega_0(\mathcal{L}_i), \Omega^0(\mathcal{L}_i)\bigr]$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются. Здесь

$$\omega_0(\mathcal{L}_i) = \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{L}_i\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \quad \text{и} \quad \Omega^0(\mathcal{L}_i) = \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{L}_i\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}$$

– соответственно нижний и верхний генеральные показатели подпространства $\mathcal{L}_i$ решений системы (1) (см. [1, с. 172]). Класс n-мерных систем (1) с экспоненциальным расщеплением порядка m обозначим через ES_n^m. Отождествляя систему (1) и её матрицу коэффициентов, будем писать, например, $A \in ES_n^m$.

Набор $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, …, $\mathcal{L}_m$ подпространств из определения системы с экспоненциальным расщеплением порядка m назовём *основным* набором и далее считаем, что подпространства $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1,m}$, упорядочены в порядке возрастания их генеральных показателей (чего всегда можно добиться перенумеровыванием подпространств $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1,m}$); при выполнении этого соглашения отрезок $\bigl[\omega_0(\mathcal{L}_i), \Omega^0(\mathcal{L}_i)\bigr]$ называем *i-м интервалом* генеральных показателей. Для системы $A \in ES_n^m$ обозначим $\widehat{\mathcal{L}}_k = \operatorname{span}\bigl\{\bigcup_{i=1}^k \mathcal{L}_i\bigr\}$, $k = \overline{1,m}$; назовём получившуюся пирамиду

$$\{\mathbf{0}\} \equiv \widehat{\mathcal{L}}_0 \subset \widehat{\mathcal{L}}_1 \subset \ldots \subset \widehat{\mathcal{L}}_m \equiv \mathcal{X}_A \tag{2}$$

основной пирамидой системы $A \in ES_n^m$.

Напомним, что *нижним* $\underline{\beta}[x]$ и *верхним* $\overline{\beta}[x]$ *показателями Боля* ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются [1, гл. III, § 4.2; 3] величины:

$$\underline{\beta}[x] = \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \quad \text{и} \quad \overline{\beta}[x] = \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}.$$

Через $\underline{\mathcal{B}}_A$ и $\overline{\mathcal{B}}_A$ обозначим соответственно множества нижних и верхних показателей Боля ненулевых решений системы A, а через $\mathcal{B}_A$ – множество пар $\bigl\{(\underline{\beta}[x], \overline{\beta}[x]) : x(\cdot) \in \mathcal{X}_A \setminus \{\mathbf{0}\}\bigr\}$. Множество $M \subset \subset \mathbb{R}^2$ называется *разделённым* [4], если найдётся число p такое, что для любой пары $(\xi_1, \xi_2) \in M$ справедливы неравенства $\xi_1 \leqslant p \leqslant \xi_2$, а совокупность всех таких p, которая, очевидно, представляет собой отрезок или точку, – *отрезком разделённости*. Определение использующего ниже понятия *суслинского* множества можно найти, например, в [5, § 39]. Далее считаем, что $n \geqslant 2$.

Основной вопрос, который рассматривается в докладе, состоит в выяснении того, как устроены множества $\underline{\mathcal{B}}_A$, $\overline{\mathcal{B}}_A$ и $\mathcal{B}_A$ систем из класса ES_n^m. Для множеств $\mathcal{B}_A$ полный ответ на него дают следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для системы $A \in ES^n_m$ её множество $\mathcal{B}_A$ представляет собой дизъюнктное объединение m множеств $\mathcal{B}^i_A$, $i = \overline{1,m}$, таких, что проекции $\mathrm{pr}_1\mathcal{B}^i_A$ и $\mathrm{pr}_2\mathcal{B}^i_A$ на соответственно первый и второй сомножители в $\mathbb{R}^2$ множества $\mathcal{B}^i_A$ являются суслинскими множествами и лежат в i-м интервале $\big[\omega_0(\mathcal{L}_i),\Omega^0(\mathcal{L}_i)\big]$ генеральных показателей системы A, $i = \overline{1,m}$. При этом для каждого $i \in \{1,\dots,m\}$ множество $\mathcal{B}^i_A$ представимо в виде объединения некоторого числа q_i, где $q_i \leqslant \dim\mathcal{L}_i$, разделённых множеств, отрезки разделённости которых попарно не пересекаются, причём, если $2q_i > \dim\mathcal{L}_i$, то указанное представление множества $\mathcal{B}^i_A$ в виде объединения q_i множеств может быть выбрано таким, чтобы среди этих q_i множеств было не менее $2q_i - \dim\mathcal{L}_i$ одноэлементных.*

Для системы $A \in ES^m_n$ далее через $\mathcal{B}^i_A$ обозначаем множество $\mathcal{B}_A \bigcap \big[\omega_0(\mathcal{L}_i),\Omega^0(\mathcal{L}_i)\big]^2$, $i = \overline{1,m}$; согласно теореме 1, в частности, $\mathcal{B}_A = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{B}^i_A$.

Расширенное обращение теоремы 1 содержит

Теорема 2. *Для любых натуральных $m \leqslant n$, произвольных m попарно непересекающихся отрезков $[\omega_i,\Omega_i]$, $i = \overline{1,m}$, таких, что $\Omega_j < \omega_{j+1}$, $j = \overline{1,m-1}$, множества $B \subset \mathbb{R}^2$, представимого в виде дизъюнктного объединения m подмножеств $B^1, B^2,\dots, B^m$, удовлетворяющих двум условиям: 1) проекции pr_1B^i и pr_2B^i на соответственно первый и второй сомножители в $\mathbb{R}^2$ множества B^i являются суслинскими множествами и лежат на отрезке $\big[\omega_i,\Omega_i\big]$, $i = \overline{1,m}$, и 2) для каждого $i \in \{1,\dots,m\}$ множество B^i представимо в виде объединения некоторого числа q_i разделённых множеств, отрезки разделённости которых попарно не пересекаются, при этом $q_1 + \ldots + q_m \leqslant n$, и, если $2(q_1 + \ldots + q_m) > n$, то указанные представления множеств B^i могут быть выбраны такими, чтобы среди них было не менее $2(q_1 + \ldots + q_m) - n$ одноэлементных, – найдётся система $A \in ES^n_m$ такая, что её i-й интервал генеральных показателей совпадает с отрезком $[\omega_i,\Omega_i]$, множество $\mathcal{B}_A$ – с множеством B, множество $\mathcal{B}^i_A$ – с множеством B^i, $i = \overline{1,m}$, а размерности подпространств $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1,m}$, её основного набора удовлетворяют неравенствам $\dim\mathcal{L}_i \geqslant q_i$.*

Из теорем 1 и 2 вытекает полное описание строения множеств $\underline{\mathcal{B}}_A$ и $\overline{\mathcal{B}}_A$ систем $A \in ES^m_n$.

Следствие 1. *Множество вещественной прямой тогда и только тогда является множеством $\underline{\mathcal{B}}_A$ (множеством $\overline{\mathcal{B}}_A$) значений нижних (верхних) показателей Боля ненулевых решений некоторой системы $A \in ES^m_n$, когда оно представимо в виде объединения m суслинских множеств B_i, $i = \overline{1,m}$, таких, что $\sup B_j < \inf B_{j+1}$, $j = \overline{1,m-1}$.*

Распределение значений показателей Боля по решениям экспоненциально расщеплённой системы с точностью до распределения их на подпространствах $\mathcal{L}_i$ описывает

Теорема 3. *У экспоненциально расщеплённой системы порядка m для любого её решения $x(\cdot\,\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}_k \setminus \widehat{\mathcal{L}}_{k-1}$, $k \in \{1,\dots,m\}$, справедливы равенства $\underline{\beta}[x] = \underline{\beta}[y_x]$ и $\overline{\beta}[x] = \overline{\beta}[y_x]$, где y_x – произвольное решение из одномерного линейного с выколотым нулём подпространства $\big(\widehat{\mathcal{L}}_k \setminus \widehat{\mathcal{L}}_{k-1}\big) \bigcap \mathrm{span}\big\{x(\cdot\,\cdot), \widehat{\mathcal{L}}_{k-1}\big\}$. В частности, $\{(\underline{\beta}[x],\overline{\beta}[x]) : x(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}_i \setminus \widehat{\mathcal{L}}_{i-1}\} = \mathcal{B}^i_A$, $i = \overline{1,m}$.*

Из теоремы 3 вытекает полное описание основных наборов подпространств системы $A \in ES^m_n$ и единственность её основной пирамиды.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$ – основной набор подпространств для системы $A \in\,\in ES^m_n$. Набор $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \dots, \mathcal{L}'_m$ представляет собой также основной набор подпространств этой системы, если и только если $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1$ и для любого $k = \overline{2,m}$ подпространство $\mathcal{L}'_k$ дополняет подпространство $\widehat{\mathcal{L}}_{k-1}$ до подпространства $\widehat{\mathcal{L}}_k$, т.е. $\widehat{\mathcal{L}}_k = \widehat{\mathcal{L}}_{k-1} \oplus \mathcal{L}'_k$.*

У экспоненциально расщеплённой системы основная пирамида единственна.

Из работы [4] следует, что основная пирамида (2) допускает расширение, если хотя бы одно из q_i (см. формулировку теоремы 1) больше единицы. Именно, если $q_i \geqslant 2$, то включение $\widehat{\mathcal{L}}_i \subset \widehat{\mathcal{L}}_{i+1}$ можно разложить в пирамиду $\widehat{\mathcal{L}}_i \equiv \widehat{\mathcal{L}}^0_i \subset \widehat{\mathcal{L}}^1_i \subset \ldots \subset \widehat{\mathcal{L}}^{q_i-1}_i \subset \widehat{\mathcal{L}}^{q_i}_i \equiv \widehat{\mathcal{L}}_{i+1}$ такую, что для её ступеней $\widehat{\mathcal{L}}^k_i \setminus \widehat{\mathcal{L}}^{k-1}_i$, $k = \overline{1,q_i}$, выполняется условие: каждое множество $\{(\underline{\beta}[x],\overline{\beta}[x]) : x(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}^k_i \setminus \widehat{\mathcal{L}}^{k-1}_i\}$, $k = \overline{1,q_i}$, разделено, и отрезки разделённости этих множеств попарно не пересекаются. Заменяя в пирамиде (2) при тех i, для которых $q_i \geqslant 2$, включение $\widehat{\mathcal{L}}_i \subset \widehat{\mathcal{L}}_{i+1}$ приведённой выше пирамидой, приходим к указанному выше расширению основной пирамиды экспоненциально расщеплённой системы.

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1970.

2. Розенвассер Е. Н. *Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления*. М.: Наука, 1977.

3. Vinograd R. È. *Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems* // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88, No 4. P. 595–601.

4. Барабанов Е. А. *Строение множеств значений нижнего и верхнего показателей Боля линейной дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 291 – 300.

5. Куратовский К. *Топология*. В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1966.

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.В. Башуров[1]

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова 119234, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1,
woonniethepih@yahoo.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа с постоянными запаздываниями $0 < p < 1$, $\tau > 0$, $\sigma > 0$, определенное для всех $t \in [t_0, +\infty)$,

$$(y(t) - py(t-\tau))'' + q(t)f(y(t-\sigma)) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{1}$$

где $0 < p < 1$, $\tau, \sigma > 0$, $q \in C[t_0, +\infty)$, $q \geqslant 0$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) будем называть удовлетворяющую ему функцию $y \in C[t_0 - \rho, +\infty)$, $\rho \equiv \max\{\tau, \sigma\}$, при условии $y(\cdot) - py(\cdot - \tau) \in C^2[t_0, +\infty)$.

Определение 2. *Решение* y уравнения (1) называется *колеблющимся*, если для любого $t_1 \geqslant t_0$ существует такое $t_2 > t_1$, что $y(t_2) = 0$..

Определение 3. Скажем, что функция f, для которой $f'(y) \geqslant 0$, $y \in \mathbb{R}$, и $yf(y) > 0$, $y \neq 0$, удовлетворяет условию:

— *суперлинейности*, если при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$0 < \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} < +\infty;$$

— *сублинейности*, если при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$0 < \int_{0}^{\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < -\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{dy}{f(y)} < +\infty.$$

В случае, когда $p = \tau = \sigma = 0$ и фукнция $f(y) = |y|^{\gamma}\operatorname{sgn} y$, уравнение (1) является уравнением типа Эмдена-Фаулера

$$y'' + q(t)|y|^{\gamma}\operatorname{sgn} y = 0. \tag{4}$$

Известны следующие критерии колеблемости всех его решений.

Теорема Аткинсона. [1] *Если* $q \in C[0, +\infty)$, $q \geqslant 0$ *и* $\gamma = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, *то все решения уравнения* (2) *являются колеблющимися тогда и только тогда, когда* $\int_0^{+\infty} tq(t)\,dt = +\infty$.

Теорема Белогорца. [2] *Если* $q_j \in C[0, +\infty)$, $q_j \geqslant 0$ *и* $\gamma_j = p_j/r_j \in (0,1)$, *где* p_j, r_j — *натуральны, нечётны и* $j \in \mathbb{N}$, *то все решения уравнения* $y'' + \sum_{j=1}^{n} q_j(t) y^{\gamma_j} = 0$ *являются колеблющимися тогда и только тогда, когда* $\int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} t^{\gamma_j} q_j(t)\,dt = +\infty$.

В [3] доказаны критерии колеблемости всех решений уравнения (1) в случаях суперлинейности и сублинейности функции f. Ниже представлены результаты, дополняющие и уточняющие эти критерии.

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *суперлинейна. Тогда:*

1) если $\int_0^{+\infty} tq(t)\,dt = +\infty$, то любое решение уравнения (1) *либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;*

2) если все решения уравнения (1) *– колеблющиеся, то* $\int_0^{+\infty} tq(t)\,dt = +\infty$.

Замечание. Расходимость интеграла $\int_0^{+\infty} tq(t)\,dt$ не гарантирует (вопреки утверждению из [3]) колеблемости всех решений уравнения (1). Например, функция $y(t) = e^{-t}$ является частным решением уравнения

$$(y(t) - y(t-1)/2)'' + (e/2-1)e^{2t-3}y^3(t-1) = 0,$$

причем $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ и $\int_0^{+\infty} tq(t)\,dt = +\infty$, где $q(t) \equiv t(e/2-1)e^{2t-3}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C^1(\mathbb{R})$ сублинейна и $f(uv) \geqslant f(u)f(v)$ при $uv \geqslant 0$. Тогда:*

1) если $\int_0^{+\infty} f(t)q(t)\,dt = +\infty$, то любое решение уравнения (1) *либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;*

2) если все решения уравнения (1) *– колеблющиеся, то* $\int_0^{+\infty} f(t)q(t)\,dt = +\infty$.

Теорема 3. *Если функция $f \in C(\mathbb{R})$ сублинейна, $\sigma > \tau$ и $\int_0^{+\infty} q(t)\,dt = +\infty$, то все решения уравнения (1) являются колеблющимися.*

Литература.

1. Atkinson F. V. *On second order nonlinear oscillation*// Pacific J. Math.1955. Vol. 5, No 5, P. 643–647.

2. Belohorec S. *Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order*// Mat. Fyz. Casopis Sloven Akad. Vied. 1961. Vol. 11. P. 250-255.

3. Wong J. S. W. *Necessary and sufficient conditions for oscillation of second-order neutral differential equations*// J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 252, P. 342–352.

ПРИЗНАК ОТСУТСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ У КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский[1]

[1] Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,
drakonsm@ya.ru

Метод отражающей функции Мироненко [1] показал высокую эффективность в области качественного исследования систем дифференциальных уравнений. Были разработаны методы, позволяющие строить отражающую функцию даже для тех уравнений, интегрирование которых вызывает затруднения. К таким дифференциальным уравнениям относится и уравнение Риккати, которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах. Интерес к уравнениям Риккати вызван тем, что их решения играют важную роль в различных областях физики, например, квантовая теория поля, а также для некоторых задач оптимального управления.

Согласно [2] если уравнение Риккати имеет линейную отражающую функцию, то его старший коэффициент равен $b(t)e^{\beta(t)}$, где $b(t)$, $\beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. При этом мы полагаем, что $b(t)$ может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + B(t)x + C(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $B(t)$, $C(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Наряду с уравнением Риккати рассмотрим линейную по фазовой переменной x функцию

$$F(t,x) = f(t) + g(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(t)$, $g(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем условия на коэффициенты $B(t)$, $C(t)$, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнения Риккати (1) имело линейную отражающую функцию вида (2).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (2) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$. *Для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную по фазовой переменной отражающую функцию, определенную на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) функция $\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\left(2\dot{\beta}(t)+B(t)+B(-t)\right)$ *доопределяется до дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функции* $f(t)$, *которая обращается в нуль при* $t=0$

2) имеют место равенства

$$\left(2\dot{\beta}(t)+B(t)+B(-t)\right)\left(-\frac{2\dot{b}(t)}{b(t)}+B(-t)-B(t)\right)+2\left(2\ddot{\beta}(t)+\dot{B}(t)-\dot{B}(-t)\right)+$$
$$+4b(t)\left(e^{\beta(t)}C(t)+e^{-\beta(t)}C(-t)\right)=0, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\dot{\beta}(0)+B(0)=0.$$

При этом линейная отражающая функция (2) имеет вид

$$F(t,x)=\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\left(2\dot{\beta}(t)+B(t)+B(-t)\right)+e^{2\beta(t)}x. \tag{3}$$

Рассмотрим частные случаи линейной отражающей функции, определяемой теоремой 1. Пусть $\beta(t)\equiv 0$. Тогда отражающая функция принимает вид

$$F(t,x)=\frac{B(t)+B(-t)}{2b(t)}+x. \tag{4}$$

Если же $2\dot{\beta}(t)+B(t)+B(-t)\equiv 0$, то

$$F(t,x)=e^{2\beta(t)}x. \tag{5}$$

Утверждение. *Пусть уравнение Риккати (1) с непрерывно дифференцируемой правой частью имеет линейную отражающую функцию (4) или (5). Для того чтобы уравнение (2) имело хотя бы одно* 2ω*-периодическое решение* $x_0(t)$, *необходимо, чтобы линейная отражающая функция (4) или (5) была* 2ω*-периодической по* t.

Интерес представляет следующий результат.

Следствие. *Пусть уравнение Риккати (1) с непрерывно дифференцируемыми и квазипериодическими коэффициентами имеет линейную квазипериодическую отражающую функцию (4) или (5), частотный базис которой содержит не менее двух частот. Тогда уравнение (1) не имеет периодических решений*

Стоит отметить, что следствие остается в силе и в том случае, когда почти периодическое уравнение (1) имеет почти периодическую по t отражающую функцию (4) или (5) (отличную от периодической).

Следствие не имеет места для общего линейного случая отражающей функции вида (3). Это иллюстрирует пример. Рассмотрим квазипериодическое уравнение Риккати

$$\dot{x}=x^2e^{\sin\sqrt{2}t}\sin\sqrt{3}t+x\Big((\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-\cos t)th(\sin\sqrt{2}t-\sin t)+$$
$$+2\sin\sqrt{3}t sh(\sin\sqrt{2}t-\sin t)-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\Big)+e^{-\sin\sqrt{2}t}\left(-\sin\sqrt{3}t+\right.$$
$$+sh(\sin\sqrt{2}t-\sin t)(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-\cos t)th(\sin\sqrt{2}t-\sin t)-$$
$$\left.-(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-\cos t)ch(\sin\sqrt{2}t-\sin t)\right).$$

Это уравнение имеет квазипериодическую отражающей функцию

$$F(t,x)=2e^{\sin\sqrt{2}t}sh(\sin\sqrt{2}t-\sin t)+e^{2\sin\sqrt{2}t}x,$$

а $x(t)=e^{-\sin t}$ является его периодическим решением.

Доказательства приведенных выше результатов можно найти в [3].

Литература

1. Мироненко В. И.*Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем*: монография. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

2. Белокурский М. С. *Почти периодические решения почти периодического уравнения Абеля с линейной отражающей функцией* // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 4 (45). С. 88 – 90.

3. Белокурский М. С. *Периодические и почти периодические решения уравнений Риккати с линейной отражающей функцией* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 5. С. 479–488. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ КОНТРАСТНЫХ СОЧЕТАНИЙ РАДИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.А. Бондарев[1]

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия,

albondarev1998@yandex.ru

Введение. Настоящий доклад посвящен исследованию реализуемости сочетаний контрастирующих друг с другом ляпуновских [1] и недавно введенных перроновских [2] и верхнепредельных [3] свойств устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем.

Некоторые исследования таких сочетаний содержатся в работах [4–9], в которых, в частности, построены многомерные неавтономные системы со следующими наборами свойств:

– *ляпуновской крайней неустойчивостью* [10], но *перроновской* и *верхнепредельной глобальной устойчивостью* [11];

– и ляпуновской, и *перроновской*, и *верхнепредельной крайней неустойчивостью*, но *перроновской* и *верхнепредельной массивной частной устойчивостью* [12].

В настоящем же докладе представлены контрастные сочетания еще нескольких разновидностей свойств трех вышеперечисленных типов и притом уже для автономных систем, а именно, *радиальных* и их логически усиленных модификаций — *тотальных радиальных*.

Основные понятия. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$ и мерой Лебега mes) рассматриваем автономные системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{S}_\delta(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) с начальным значением $x(0) \in \mathring{B}_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| < \delta\}$, а через $\mathcal{S}_{\delta,x_0}(f) \subset \mathcal{S}_\delta(f)$ — его подмножество, состоящее из тех решений, которые удовлетворяют начальному условию $\mathring{B}_\delta \ni x(0) = cx_0$, $c > 0$.

Определение 1. Скажем, что у системы (1) (а точнее, у ее нулевого решения) имеется *ляпуновская, перроновская* или *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \varliminf_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{2}$$

2) *асимптотическая устойчивость*, если: в *перроновском* или *верхнепредельном* случаях существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию (2) при $\varepsilon = 0$, а в *ляпуновском* — система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

3) *полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2);

4) *почти устойчивость*, *почти асимптотическая устойчивость* или *почти полная неустойчивость*, если соответствующие условия из пп. 1–3 настоящего определения выполнены, вообще говоря, не для всех решений $x \in S_\delta(f)$, но хотя бы для тех, чьи начальные значения $x(0)$ образуют в проколотом шаре $\mathring{B}_\delta$ подмножество полной меры mes;

5) *радиальная: устойчивость, асимптотическая устойчивость* или *полная неустойчивость* в *направлении* ненулевого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если система обладает соответствующим свойством из пп. 1–3 с заменой в них всюду множества $S_\delta(f)$ множеством $S_{\delta,x_0}(f)$;

6) *тотальная радиальная: устойчивость, асимптотическая устойчивость* или *полная неустойчивость*, если система обладает этим свойством сразу во всех направлениях x_0.

Определение 2. Также будем говорить, что у системы (1) имеется *перроновская* или *верхнепредельная*:

7) *частичная крайняя неустойчивость*, если для любого $\delta > 0$ существует решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, удовлетворяющее требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty \quad \text{или соответственно} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty.$$

Полученные результаты. Справедливы следующие

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая одновременно:*

– обладает тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов;

– обладает перроновской и верхнепредельной частичной крайней неустойчивостью;

– не обладает почти устойчивостью никакого типа.

Теорема 2. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая одновременно:*

– обладает тотальной радиальной полной неустойчивостью всех трех типов;

– обладает перроновской и верхнепредельной частичной крайней неустойчивостью;

– не обладает почти полной неустойчивостью никакого типа.

Теорема 3. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), обладающая одновременно:*

– тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов;

– перроновской и верхнепредельной частичной крайней неустойчивостью;

– перроновской и верхнепредельной почти асимптотической устойчивостью.

Замечание 1. Распространить теоремы на случай размерности $n = 1$ или же добавить в формулировку третьей из них наличие у системы еще и ляпуновской почти асимптотической устойчивости не представляется возможным.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-8-10-3-1).

Литература

1. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 6. С. 855–856.

3. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и ее связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1556–1557.

4. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 2. С. 43–47.

5. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 2. С. 147–152.

6. Бондарев А. А. *О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1011–1019.

7. Bondarev A. A. *An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces* // Mem. Diff. Equations Math. Phys. 2022. Vol. 87. P. 25–36.

8. Бондарев А. А., Сергеев И. Н. *Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств* // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 506. С. 25–29.

9. Бондарев А. А. *Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью* // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 1. С. 24–42.

10. Сергеев И. Н. *Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 6. С. 858–859.

11. Сергеев И. Н. *О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем* // Тр. семинара имени И. Г. Петровского. 2023. Т. 33. С. 353–423.

12. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1576–1578.

О МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Мира 43, 212000 Могилёв, Беларусь,
alex-bondarev@tut.by

Рассматривается многоточечная краевая задача для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где A, $B \in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, M_i – вещественные постоянные матрицы. Предполагается, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например, [1–3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–5].

Качественными методами эта задача исследовалась в [2]. С периодическими краевыми условиями она рассмотрена в [6] на основе конструктивного метода регуляризации [7]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [8, 9]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21].

Обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i, \quad \gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^{k} \|M_i\|, \quad \tilde\alpha = \int_0^\omega \|A(\tau)\|d\tau, \quad \tilde\beta = \int_0^\omega \|B(\tau)\|d\tau,$$
$$\tilde h = \int_0^\omega \|F(\tau,0)\|d\tau, \quad \tilde q = \gamma m(\tilde\alpha + \tilde\beta + L), \quad p = \gamma m\tilde h,$$

где $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho\}$, $0 < \rho < \tilde\rho$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\det M \neq 0, \tag{3}$$

$$\tilde q < 1, \tag{4}$$

$$\frac{p}{1-\tilde q} \leqslant \rho. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) *однозначно разрешима в области* D_ρ, *при этом справедлива оценка*

$$\|X(t)\| \leqslant \frac{p}{1-\tilde{q}}.$$

Для доказательства, следуя [7], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau. \quad (6)$$

Однозначная разрешимость уравнения (6) в шаре $\|X\|_C \leqslant \rho$ установлена с помощью принципа Каччопполи–Банаха сжимающих отображений (см., например, [11, с. 605]) с использованием условий (4) и (5).

Теорема 2. *При выполнении условий* (3)–(5) *решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности* $\{X_s(t)\}_0^\infty$, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2).

Для построения решения применительно к уравнению (6) используется классический метод последовательных приближений

$$X_{s+1}(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_s(\tau) + X_s(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_s(\tau))]d\tau, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad (7)$$

где $X_0(t)$ – произвольная непрерывная матрица-функция, принадлежащая шару $\|X\|_C \leqslant \rho$.

На основе (7) с использованием условия (4) получена оценка

$$\|X(t) - X_s(t)\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}^{s+1}}{1-\tilde{q}}\|X_1 - X_0\|_C, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

В случае $X_0(t) \equiv 0$ оценка (8) примет вид

$$\|X(t) - X_s(t)\|_C \leqslant \frac{p\tilde{q}^{s+1}}{1-\tilde{q}}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

поскольку $\|X_1\|_C \leqslant p$.

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М.: Наука, 1975.

2. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати*. Томск: Томский госуниверситет, 1989.

4. Бойчук А. А. *Конструктивные методы анализа краевых задач*. Киев: Наукова думка, 1990.

5. Ешуков Л. Н. *Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, Вып. 3 (81). С. 191–196.

6. Лаптинский В. Н. *О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений* // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

7. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

8. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

9. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 423–427.

10. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.

11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977.

О ПРИЗНАКАХ ФОКУСА ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

В.Т. Боруxов[1], О.М. Кветко[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
val01@tut.by
[2]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, tx1@tut.by

Рассмотрим полиномиальную систему Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x), \quad \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где

$$F(x) := f_n x^n + \ldots + f_{n'} x^{n'}, G(x) := \int_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau = g_m x^m + \ldots + g_{m'} x^{m'}. \tag{2}$$

Здесь $n = \overline{deg} F$, $m = \overline{deg} G$ — верхние степени вещественных полиномов F и G соответственно, $n' = \underline{deg} F$ и $m' = \underline{deg} G$ — их нижние степени. По определению степеней коэффициенты f_n, $f_{n'}$, g_m, $g_{m'}$ не равны нулю, если $F \neq 0$, $G \neq 0$. Предполагаем также, что особая точка O(0,0) системы (1), (2) удовлетворяет условиям монодромности [1]:

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, \ldots\}, \quad n' \geqslant \frac{m'}{2}, \quad 8g_{m'} > f^2_{\frac{m'}{2}}.$$

В частности, отсюда следует неравенство $G \neq 0$. Если $F = 0$, то полагаем $n = n' = \infty$.

Согласно [1,2] существование композиции вида

$$F = B(A), \quad G = C(A), \quad \underline{deg} A \in 2\mathbb{Z}^+, \tag{3}$$

где A, B, C — вещественные полиномы, является критерием центра в особой монодромной точке O(0,0).

В работе [3] представлен алгоритм исключения полиномов

$$A(x) = a_k x^k + \ldots + a_{k'} x^{k'}, \quad B(x) = b_l x^l + \ldots + b_{l'} x^{l'}, \quad C(x) = c_s x^s + \ldots + c_{s'} x^{s'} \tag{4}$$

из уравнений (3) и дано описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномов F, G.

Сформулируем простые достаточные условия фокуса, вытекающие из [3]. Отметим, что в случае $F = 0$ монодромная особая точке O(0,0) является центром. Поэтому, без ограничения общности, будем рассматривать случай, когда $F \neq 0$. Тогда удобно [4] перейти к проективным координатам

$$\hat{f} = \left(\hat{f}_n = 1, \hat{f}_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n}, \ldots, \hat{f}_{n'} = \frac{f_{n'}}{f_n}\right), \quad \hat{g} = \left(\hat{g}_m = 1, \hat{g}_{m-1} = \frac{g_{m-1}}{g_m}, \ldots, \hat{g}_{m'} = \frac{g_{m'}}{g_m}\right)$$

для полиномов F, G.

Следуя [3], определим множество P допустимых согласно (3), (4) степеней полинома $A(x)$. А именно,

$$P = P(n, n', m, m') = \left\{(k, k') | k' \in 2\mathbb{Z}^+, k \geqslant k', k|(n, m), k'|(n', m'), \frac{n}{k} \geqslant \frac{n'}{k'}, \frac{m}{k} \geqslant \frac{m'}{k'}\right\},$$

где условие $k|(n, m)$ означает, что $k > 1$ и k делит n и m. Нам понадобятся также следующие подмножества $P_i = \{(k, k') \in P | k - k' \geqslant i\}$, $i \geqslant 1$, множества P. Наконец, рассмотрим серию a_1, a_2, a_3, a_4 ограничений на параметры системы (1):

a_1) $P = \varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество);

a_2) $P_1 \neq \varnothing$, $\hat{f}_{n-1} \neq d\hat{g}_{m-1}$ $\left(d = \dfrac{n}{m}\right)$;

a_3) $P_2 \neq \varnothing$, $\hat{f}_{n-2} \neq d\hat{g}_{m-2} + \dfrac{1}{2} d(d-1) g^2_{m-1}$;

$a_4)\quad P_3 \neq \varnothing$,

$$\hat{f}_{n-3} \neq d\hat{g}_{m-3} + d(d-1)\hat{g}_{m-1}\hat{g}_{m-2} - \left((l^2 - ls)\frac{s-1}{2s} - \frac{l^3 - 3l^2 - ls^2 + 3ls}{3!s^3}\hat{g}^3_{m-1} \right)$$

$\left(l = \dfrac{n}{k}, \quad s = \dfrac{m}{k}\right) \forall k \in \hat{P}_3 = \{k|(k,k') \in P_3\}$.

Теорема 1. *Если при последовательной проверке ограничений a_1, a_2, a_3, a_4 выполняется, по крайней мере, одно из них, то особая точке O(0,0) является фокусом для системы Льенара (1).*

Достаточные условия фокуса a_2, a_3, a_4 определены для коэффициентов полиномов F, G в окрестности их верхних степеней n, m. Можно указать также простые достаточные условия фокуса, определенные в окрестности нижних степеней n', m' полиномов F, G.

Теорема 2. *1) Если хотя бы одно из чисел n', m' — нечетное, то особая точке O(0,0) является фокусом.*

2) Если n', m' — четные, но выполнено неравенство

$$m'g_{m'}f_{n'+1} \neq n'g_{m'+1}f_{n'}$$

то особая точке O(0,0) является фокусом.

Литература

1. Christopher C. *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems.* // Jornal of Mathematical Analysis and Applications. 1999. Vol. 229. P. 319–329.

2.Черкас Л. А. *Степень негрубости фокуса в уравнении Льенара* // Доклады Академии наук БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 681–683.

3. Борухов В. Т. *Алгебраический критерий существования центра в монодромной особой точке полиномиальной системы Льенара* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1020–1031.

4. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномиальной системы Льенара*// Тезисы докладов Международной математической конференции «Еругинские чтения – XXI». Могилёв, 23-27 мая 2023. С. 69–71.

УСЛОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Быков[1]

[1]Московский государственный университет, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Россия, vvbykov@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными оператор-функциями A (которые отождествляем с задаваемыми ими системами), а через $\mathcal{M}^n$ – его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ оператор-функциями. Множества $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ наделим *компактно-открытой* топологией.

Приводимая ниже конструкция обобщает построение [1] и позволяет рассматривать некоторые известные характеристики асимптотического поведения решений линейных систем с единой точки зрения.

Скажем, что системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *слабо ляпуновски эквивалентны*, если существуют такие фундаментальные матрицы $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем, что для матричнозначной функции $L(t) \equiv \equiv X(t)Y^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, выполнено условие [2, глава IV, §2.1]

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (|L(t)| + |L^{-1}(t)|) < \infty.$$

Легко видеть, что введённое отношение слабой ляпуновской эквивалентности является отношением эквивалентности. Отметим, что в отличие от классической ляпуновской эквивалентности [3, §18.2] здесь не требуется ограниченности на полуоси производной функции $L(\cdot)$; тем не менее, на множестве $\mathcal{M}^n$ эти отношения совпадают.

Функционал, принимающий одинаковые значения на любых слабо ляпуновски эквивалентных системах, будем называть *слабо ляпуновским инвариантом*.

Определение 1. *Сужением* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ на подпространство $\{0\} \neq L \subset \mathbb{R}^n$ будем называть всякую систему $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$, обладающую свойством: существует такой линейный изоморфизм $V\colon L \to \mathbb{R}^{\dim L}$, что для любых $\xi \in L$ и $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$|X_A(t,0)\xi| = |X_{\widehat{A}}(t,0)V\xi|,$$

где $X_B(\cdot,\cdot)$ – оператор Коши системы B.

Подчеркнём, что мы не требуем инвариантности подпространства L относительно всех операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы Перрона о триангулируемости [3, гл. VII, § 20.1], показывает, что сужение системы на заданное подпространство всегда существует и определено с точностью до ортогонального преобразования.

Теорема 1. *Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ существует её сужение $\widehat{A}$ на подпространство L, причём если $A \in \mathcal{M}^n$, то можно выбрать $\widehat{A} \in \mathcal{M}^{\dim L}$; система $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$ является сужением системы A на L тогда и только тогда, когда существует такая ортогональная при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оператор-функция $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{\dim L}$, что*

$$X_{\widetilde{A}}(t,0) = U(t)X_{\widehat{A}}(t,0)U^{-1}(0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определение 2. Пусть $k \in \{1,\ldots,n\}$ и функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^k \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty,+\infty\}$ ($\varphi\colon \mathcal{M}^k \to \overline{\mathbb{R}}$) является слабым ляпуновским инвариантом. Тогда будем называть *k-м условным φ-показателем* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ ($A \in \mathcal{M}^n$) величину $\varphi_{(n,k)}(A) = \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \varphi(A|_L)$, где $G_k(\mathbb{R}^n)$ – множество k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(A|_L)$ – значение функционала φ на каком-либо сужении системы A на подпространство L. Если функционал φ определён только на множестве $\mathcal{M}^k$, то потребуем дополнительно, чтобы указанное сужение имело ограниченные коэффициенты.

Набор $(\varphi_{(n,1)}(A),\ldots,\varphi_{(n,n)}(A))$ условимся называть *спектром функционала* φ системы A.

Обозначим через $\Lambda(A)$ старший показатель Ляпунова системы (1), а через $\Omega^0(A)$ – её верхний генеральный показатель [2, гл. III, § 4.2]. Тогда k-й условный Λ-показатель системы (1) есть её k-й (в порядке нестрогого возрастания) показатель Ляпунова, а k-й условный Ω^0-показатель есть k-й условный показатель Боля [4].

Определение 3. [5] Будем называть функцию $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, заданную на метрическом пространстве M, *верхнепредельной*, если существует такая последовательность непрерывных функций $f_k\colon M \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$f(\mu) = \varlimsup_{k\to\infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Теорема 2. *Для любых числа $k \in \{1,\ldots,n\}$ и верхнепредельного слабо ляпуновского инварианта $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\varphi\colon \mathcal{M}^k \to \overline{\mathbb{R}}$) k-й условный φ-показатель $\varphi_{(n,k)}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\varphi_{(n,k)}\colon \mathcal{M}^n \to \overline{\mathbb{R}}$) также является верхнепредельным слабо ляпуновским инвариантом.*

Отметим, что из теоремы 2 вытекают результат доклада [4] и [6, Теорема 1].

Определение 4. Для каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ назовём *k-м условным коэффициентом неправильности Ляпунова* системы $A \in \mathcal{M}^n$ величину

$$\sigma_{\text{Л}}^k(A) \equiv \inf_{(x_1,\ldots,x_k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda[x_i] - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \Gamma_{1\ldots k}(t) \right),$$

где $\Gamma_{1\ldots k}(t)$ – грамов объём векторов $x_1(t),\ldots,x_k(t)$, а $\lambda[f] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln|f(t)|$ – характеристический показатель функции f; точная нижняя грань берётся по всевозможным линейно независимым наборам $x_1,\ldots,x_k$ решений системы A.

Следствие. *Для каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функционал $\sigma_{Л}^k : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ является верхнепредельным.*

Литература

1. Миллионщиков В. М. *Классификация по Бэру относительных мажорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1088–1089.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1970.

3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*. М.: Наука, 1966.

4. Миллионщиков В. М. *Показатель Боля линейной системы, коэффициенты которой могут быть неограниченными* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1461–1462.

5. Быков В. В. *Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами* // Дифференц. уравнения 2014. Т. 50, № 10. С. 1291–1301.

6. Миллионщиков В. М. *Показатели Ляпунова как функции параметра* // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 3. С. 364–380.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМОГО ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ С ИНДЕКСАМИ ХЕРСТА $H > 1/4$

М. М. Васьковский[1], П. П. Стрюк[2]

[1]Кафедра высшей математики Белорусского государственного университета, пр. Независимости 4, Минск, 220030,
[2]ООО ХайКво Солюшенс, ул.Тимирязева 67, Минск, 220035
email: [1]vaskovskii@bsu.by, [2]pavel.stryouk@gmail.com

Введение.

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + h(X_t)dW_t + \sigma(X_t)dB_t^H,\ t \in [0,1], \tag{1}$$

где $b:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\sigma:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ – детерминированные функции; W_t и B_t^H – независимые n-мерное стандартное броуновское движение и n-мерное дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (\frac{1}{4},1)$.

Уравнение (1) типа Стратоновича исследовалось в статье [1], в настоящей работе рассматривается уравнение (1) смешанного типа, т.е. в соответствующем интегральном уравнении

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(X_s)ds + \int\limits_0^t h(X_s)dW_s + \int\limits_0^t \sigma(X_s)dB_s^H,$$

интеграл по W_t – интеграл Ито, а интеграл по B_t^H – некоторый потраекторный интеграл.

Определение слабо управляемых грубых траекторий.

Пусть $X \in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0,T],W)$ слабо управляется грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V,W),\ldots,$ $Y^{(n-1)}:[0,T]\to\mathcal{L}(V^{\otimes(n-1)},W)$ такие, что

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n},$$

$$Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1},$$

$$\ldots$$

$$Y_{s,t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2},$$

$$Y_{s,t}^{(n-1)} = R_{s,t}^{Y,1};$$

а каждый из остаточных членов $R^{Y,i}$ имеет конечную гельдеровскую полунорму $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i=1,\dots,n$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть производной Губинелли порядка i от Y.

Определение интеграла по грубым траекториям.

Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\dots,\mathbf{X}^n)\in \in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y\in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$, $(Y,Y^{(1)},\dots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}^\alpha_{\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Возьмем некоторые $s,t\in[0,T]$, $s<t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$ точками.

Потраекторным интегралом $\int\limits_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$ точками):

$$\int\limits_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}\sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)}\mathbf{X}^{i+1}_{u,v}.$$

Основные результаты.

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t}=B_{t^m_{l-1}}+(t-t^m_{l-1})B_{t^m_{l-1},t^m_l};t\in[t^m_{l-1},t^m_l);l=1,\dots,2^m;t^m_l=l/2^m.$$

Для каждого $i=1,2,3$ определим так называемый процесс порядка i над $B_{m,t}$ следующим образом:

$$\mathbf{B}^i_{m;s,t}=\int\limits_{s<t_1<\ldots<t_i<t} dB_{m,t_1}\otimes\ldots\otimes dB_{m,t_i},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,$$

пусть $\mathbf{B}_{m;s,t}=(1,\mathbf{B}^1_{m;s,t},\mathbf{B}^2_{m;s,t},\mathbf{B}^3_{m;s,t})$.

Определим процесс $\widetilde{\mathbf{B}}_{s,t}=(1,\widetilde{\mathbf{B}}^1_{s,t},\widetilde{\mathbf{B}}^2_{s,t},\widetilde{\mathbf{B}}^3_{s,t})$ следующим образом:

$$\widetilde{\mathbf{B}}^1_{s,t}=\mathbf{B}^1_{s,t},$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^2_{s,t}=\mathbf{B}^2_{s,t}+A_{s,t},$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^3_{s,t}=\mathbf{B}^3_{s,t}+\int\limits_s^t A_{s,r}\otimes dB_r+\int\limits_s^t B_{s,r}\otimes dA_r,$$

где A_t – диагональная $(d\times d)$-матрица с ненулевыми элементами $A^{(i,i)}_t=-\frac{1}{2}t$, $i=2,\dots,n+1$.

Рассмотрим следующие уравнения в грубых траекториях

$$dX_t=f(X_t)d\widetilde{\mathbf{B}}_t,\ t\in[0,1]. \tag{2}$$

Определение 1. Решением уравнения (2) будем называть случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, такой, что п.н. выполняются условия: 1) $X\in C^\alpha([0,1],\mathbb{R}^n)$; 2) процессы X_t, $\widetilde{f}(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\mathbf{B}$; 3) для любого $t\in[0,1]$ имеет место равенство

$$X_t=X_0+\int\limits_0^t\widetilde{f}(X_s)d\mathbf{B}_s,$$

где интеграл в правой части – потраекторный интеграл, при этом $X'_t=\widetilde{f}(X_t)$, $X''_t=(\widetilde{f}(X_t))'= =D\widetilde{f}(X_t)X'_t$, $(\widetilde{f}(X_t))''=D\widetilde{f}(X_t)X''_t+D^2\widetilde{f}(X_t)(X'_t)^{\otimes 2}$. Пусть $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (2) с начальным условием $X_0=\xi$ называется **единственным**, если для любого решения Y_t уравнения (2) с начальным условием $Y_0=\xi$ выполняется равенство $P(X_t=Y_t\ \forall t\in[0,1])=1$. Решение X_t уравнения (2) с начальным условием $X_0=\xi$ будем называть **сильным**, если процесс X_t согласован с потоком σ-алгебр, порожденным случайной величиной ξ и процессом B_t.

Определение 2. Сильным решением уравнения (1) будем называть случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и согласованный с потоком σ-алгебр, порожденным начальным условием X_0 и процессом B_t, такой, что п.н. выполняются условия: 1)

$X \in C^{\alpha}([0,1],\mathbb{R}^n)$; 2) процессы X_t, $f(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\widetilde{\mathbf{B}}$; 3) для любого $t \in [0,1]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)d\widetilde{\mathbf{B}}_s.$$

Теорема 1. *Пусть* $b \in C_b^4(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $h \in C_b^5(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times n})$, $\sigma \in C_b^4(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times n})$. *Тогда для любой случайной величины* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *уравнение (1) с начальным условием* $X_0 = \xi$ *имеет единственное сильное решение.*

Литература

1. Coutin L., Qian Z. *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions* // Probability Theory Related Fields. 2002. Vol. 122, No 1. P. 108–140.

К ЗАДАЧЕ МИЛЛИОНЩИКОВА О МИНОРАНТАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

А.Н. Ветохин

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, anveto27@yandex.ru

Напомним, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, и системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами и показателями Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, максимальная полунепрерывная снизу миноранта k–го показателя Ляпунова определяется формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\{B:\, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \|B(t)\|<\varepsilon\}} \lambda_k(A+B).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A : \mathcal{M}\times[0;+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n \qquad (1)$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot)). \qquad (2)$$

В докладе [1] был поставлен вопрос о точном бэровском классе функции (2). Сам В. М. Миллионщиков установил, что при любом $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1$ миноранта младшего показателя Ляпунова совпадает с нижним центральным показателем Винограда [2], а поэтому функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу. Далее в работе [3] было доказано, что при $n = 3$ функции $\underline{\lambda}_2(\cdot)$ и $\underline{\lambda}_3(\cdot)$ принадлежат третьему бэровскому классу. Оказалось, что аналогичный результат справедлив для произвольных $n \geqslant 3$ и $k \in \{2,\ldots,n\}$ [4].

В статье [5] в случае, когда $\mathcal{M}$ является множеством $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с метрикой индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, установлено, что существует отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит третьему классу Бэра. Оказывается справедлив более общий результат.

Теорема 1. *Если пространство* $\mathcal{M}$ *содержит множество типа* $F_{\sigma\delta}$, *не являющееся множеством типа* $G_{\delta\sigma}$, *то для любых* $n \geqslant 2$ *и* $k \in \{1,\ldots,n\}$, *найдется отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве* $\mathcal{M}$.

Р. Бэр установил [6], что множество иррациональных чисел, у которых неполные частные при разложении в цепную дробь стремятся к бесконечности, является множество типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}$. Используя этот результат и теорему 1, получим

Теорема 2. *Если* $\mathcal{M} = [0;\,1]$, $n \geqslant 2$ *и* $k \in \{1,\ldots,n\}$, *то найдется отображение (1) такое, что функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве* $\mathcal{M}$.

Литература

1. Миллонщиков В. М. *Задачи о минорантах показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.
2. Миллонщиков В. М. *Доказательство достижимости центральных показателей* // Сибирск. матем. журнал. 1969. Т. 10, № 1. С. 99–104.
3. Сергеев И. Н. *К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1600–1601.
4. Быков В. В., Салов Е. Е. *О классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2003. № 1. С. 33–40.
5. Ветохин А. Н. *Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.
6. Baire R. *Sur la representation des functions discontinues* // Acta. Math. 1906. Vol. 30. P. 1–48.

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ВЫПУКЛЫМИ МНОГОУГОЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

А.С. Войделевич

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
aliaksei.vaidzelevich@gmail.com

В докладе рассматривается частный случай линейных рекуррентных уравнений в пространстве выпуклых компактов [1], решения которых представляют собой последовательности выпуклых многоугольников. Прежде чем сформулировать полученный результат, введём необходимые обозначения и приведём определения.

Суммой Минковского $Z = X + Y$ двух непустых множеств X, $Y \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости называется множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x+y\colon x \in X,\, y \in Y\}$. Для действительной 2×2-матрицы A и множества $X \subset \mathbb{R}^2$ через AX обозначим множество $\{Ax\colon x \in X\}$. В том частном случае, когда $A = \operatorname{diag}[\alpha, \alpha]$, вместо AX пишем αX. Непосредственно из определения следует, что для произвольных множеств X, $Y \subset \mathbb{R}^2$ и 2×2-матриц A верно равенство $A(X+Y) = AX + AY$. Отметим, что для произвольных действительных 2×2-матриц A, B и множества $X \subset \mathbb{R}^2$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX + BX$. В тоже время, если числа α и β одного знака, то для любого выпуклого множества X выполнено равенство $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X$.

Через $\mathcal{P}_2$ обозначим множество всех выпуклых многоугольников на плоскости, где под выпуклым многоугольникам будем понимать выпуклую оболочку конечного множества точек. Будем говорить, что два многоугольника P и Q различные, если они отличаются как множества точек на плоскости, а не в том смысле, что не существует движения плоскости, переводящее многоугольник P в многоугольник Q. Нетрудно видеть, что семейство $\mathcal{P}_2$ замкнуто относительно операции сложения по Минковскому и умножения на матрицу, а значит, мы можем рассмотреть линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = X(t) + AX(t), \quad X(t) \in \mathcal{P}_2, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

где A – действительная 2×2-матрица коэффициентов.

Уравнение (1) является дискретным аналогом однородного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = ax, \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}$. Хорошо известно, что графики любых двух различных решений уравнения (2) не пересекаются. Возникает естественный вопрос о том, обладает ли уравнение (1) аналогичным свойством. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, если $A = -E$, где E – единичная матрица, то для любого выпуклого многоугольника $M \in \mathcal{P}_2$ решения $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ такие, что $X_1(0) = M$ и $X_2(0) = -M$, принимают одно и тоже значение $M + (-M)$ при $t = 1$. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Любые два решения уравнения (1) либо совпадают, либо принимают различные значения при всех $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если и только если среди собственных значений матрицы A нет корней натуральной степени из* -1.

Литература

1. Войделевич А. С. *Линейные рекуррентные уравнения в пространстве выпуклых компактов и диаметры их решений* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1084 – 1088.

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИЙ

Д.А. Габидуллин[1]

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова 119234, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1,

david0166@yandex.ru

Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)a - dS - \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} + \delta V, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} - (d+\varepsilon+\eta)E, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (d+\tau)I, \\ \frac{dV}{dt} = pa + \tau I + \eta E - (d+\delta)V, \end{cases} \tag{1}$$

возникающая в эпидемиологической математической модели с учётом инкубационного периода и временного иммунитета. В этой модели всё население N делится на 4 категории: восприимчивые S, инфицированные E, зараженные I и вакцинированные/выздоровевшие V. Все параметры системы (1) неотрицательны, а их биологическое значение интерпретируется следующим образом: люди рождаются со скоростью a и вступают в класс S, а доля новорожденных эффективно вакцинируется со скоростью p, восприимчивые люди заражаются со скоростью β, временный иммунитет (вызванный идеальной вакциной, болезнью и бессимптомными инфекциями) ослабевает со скоростью δ, все люди в каждом классе имеют одинаковую естественную смертность d, люди в классе E могут переходить в класс I со скоростью ε, а также в класс V со скоростью η (из-за приобретения естественного иммунитета), инфицированные люди эффективно выздоравливают со скоростью τ, а параметры σ и k будут описаны ниже.

Модели $SEIVS$, $SIRS$ с различными показателями инцидентности изучались в работах [1– 8]: в [1–4] к моделям $SEIVS$ применялся геометрический подход для установления асимпто- тической устойчивости и глобальной асимптотичности положений равновесия в зависимости от контрольного числа репродукции R_c, в [5] обобщён геометрический критерий глобальной асимптотичности, в [6, 7] учтены диффузионные эффекты распространения эпидемий в популяции для моделей $SIRS$, в [8] рассматривалась модель SIR с инфекционной силой специального вида.

Ниже рассматривается новая инфекционная сила

$$\varphi(I) := \frac{\beta I}{1+\sigma I^k},$$

где параметры σ и k оценивают ингибирующие или психологические эффекты, обусловленные информационными кампаниями, проводимыми в популяции.

Система (1) при любых значениях параметров имеет положение равновесия

$$Q_0 = (S_0, 0, 0, V_0),\ S_0 = \frac{a[(1-p)d+\delta]}{d(d+\delta)}, V_0 = \frac{pa}{d+\delta},$$

которое соответствует отсутствию заболевших в популяции.

Система (1) допускает биологически возможную область

$$D = \{(S,E,I,V) \in \mathbb{R}^4_+ : S \leqslant S_0, V \leqslant V_0, E+I \leqslant S_0+V_0, S+E+I+V \leqslant \frac{a}{d}\}.$$

являющуюся положительно инвариантной. Введем контрольное репродуктивное число, зависящее от параметров модели:

$$R_c := \frac{\varepsilon S_0 \varphi'(0)}{(d+\tau)(d+\varepsilon+\eta)}.$$

Определение. Положение равновесия x^* называется:

—*локально асимптотически устойчивым*, если все начинающиеся достаточно близко к нему решения, не только всё время остаются вблизи x^*, но и стремятся к нему при неограниченном росте времени;

— *глобально асимптотически устойчивым*, если каждое решение, независимо от начального условия, стремится к x^*, при неограниченном росте времени.

Теорема 1. *Положение равновесия Q_0 системы (1) является глобально асимптотически устойчивым при $R_c \leqslant 1$ и неустойчиво при $R_c > 1$.*

Доказательство теоремы 1 базируется на построении функции Ляпунова системы и применении принципа инвариантности, описанном в [9].

Теорема 2. *Если $R_c > 1$, то система (1) имеет еще одно в D отличное от Q_0 положение равновесия Q^*, которое локально асимптотически устойчиво.*

Доказательство этой теоремы основывается на линеаризации в окрестности особой точки системы (1) и исследовании корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов соответствующей линейной системы.

Положение равновесия Q^* называется эндемическим: болезнь в нём полностью не исчезает, поскольку в популяции ещё остаются зараженные и инфицированные — болезнь в этом случае называется эндемией (например, ВИЧ, гепатит-В, малярия, болезнь Лайма).

Литература

1. Cai L. M., Li X. Z. *Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate*// Appl. Math. Model. 2009. Vol. 33, No 7. P. 2919–2926.
2. Sahu G. P., Dhar J. *Analysis of an SEIVS epidemic model with partial temporary immunity and saturation incidence rate*// 2012. Appl. Math. Model. Vol. 36, No 3. P. 908–923.
3. Li M. Y., Muldowney J. S. *A geometric approach to the global-stability problems*// SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, No 4. P. 1070–1083.
4. Liu J. L., Zhang T. L. *Global stability for a tuberculosis model*// Math. Comput. Model. 2011. Vol. 54. P. 836–845.
5. Lu G. C., Lu Z. Y. *Geometric approach to global asymptotic stability for the SEIRS models in epidemiology* // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2017. Vol. 36. P. 20–43.
6. Astashova I., Chebotaeva V., Cherepanov A. *Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application phapl* // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. 2018. Vol. 15, No 12. P. 112–118.
7. Chebotaeva V., Vasquez P. A. *Erlang-Distributed SEIR Epidemic Models with Cross-Diffusion*// Mathematics. 2023. Vol. 11, No 9. 2167.
8. Xiao D., S. Ruan S. *Global analysis of an epidemic model with a nonlinear incidence rate*, to appear in Math. Biosci. 2011.
9. LaSalle J. P. *The stability of dynamical systems* in: regional conference series in Applied Mathematics. Philadephia: SIAM, 1976.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ

А.А. Гринь, А.В. Кузьмич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь,
{grin,kuzmich_av }@grsu.by

Британский физик и лауреат Нобелевской премии Дж. В. Струтт, более известный как лорд Рэлей в своей монографии "Теория звука"[1] использовал линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для описания звуковых колебаний кларнета. Нелинейная модификация этого уравнения может быть записана в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = -y \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y - \lambda\frac{y^3}{3} \equiv Q(x,y) \tag{1}$$

с действительным параметром λ, известной под названием система Рэлея [2]. Качественные свойства этой системы с помощью различных методов изучались во многих работах [2,3,4], где в частности, доказано существование и единственность предельного цикла. Однако границы областей локализации цикла на фазовой плоскости в таких работах указываются приближенно или только для значений параметра, близких к бифуркационному. Поэтому задача установления наиболее узкой двусвязной области локализации предельного цикла с точными границами является по-прежнему актуальной для системы Рэлея (1).

Доказать существование предельных циклов и определить границы областей их локализации можно с помощью метода Дюлака или Дюлака Черкаса, а также теоремы Пуанкаре – Бендиксона [2]. Общий подход к доказательству существования хотя бы одного предельного цикла системы (1) с помощью теоремы Пуанкаре – Бендиксона состоит в построении на фазовой плоскости кольца Пуанкаре – Бендиксона (кольцеобразной области) A, не содержащего состояний равновесия и границы которого представляют собой простые замкнутые кривые (овалы) такие, что в любой их точке касательный к ним вектор и вектор поля X системы не коллинеарны. Такие кривые принято называть трансверсальными или кривыми без контакта (прикосновения) [2]. Ключевая проблема в этом подходе заключалась в отсутствии общей процедуры построения трансверсальных овалов даже для такой сравнительно простой системы как (1). Ранее кольца Пуанкаре – Бендиксона были найдены специально для систем типа Льенара, границы которых состоят из кусочно-гладких кривых, построенных сложным образом или с помощью различных аппроксимаций.

Недавно в работах Гриня А. и Шнайдера К. [5, 6] для системы ван дер Поля был разработан чисто аналитический подход к построению трансверсальных овалов, зависящих от параметра системы и образующих глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре – Бендиксона A, который не требует аппроксимации какой-либо траектории. Особенности этого подхода заключаются в следующем: Внутренняя и внешняя границы кольца Пуанкаре – Бендиксона состоят из алгебраических замкнутых кривых на фазовой плоскости, обладающих тем свойством, что любая траектория системы ван дер Поля сразу после попадания в некоторый момент времени на границу кольца A входит в него либо при увеличении, либо при уменьшении времени t. В этом случае они представляют собой трансверсальные кривые в более общем смысле чем было сказано ранее. Таким свойством трансверсальности обладают кривые из множества нулевого уровня функции Дюлака – Черкаса [7].

Затем в работе Гриня А.А. и Шнайдера К. [8] подход из статей [5, 6] частично был применен к системе Рэлея (1) и позволил найти глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре – Бендиксона $A(\lambda)$ для ее предельного цикла. Далее в нашей работе [9], развивая результаты статей [5, 6, 8], предложены новые способы построения трансверсальных кривых, ограничивающих кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея. Цель настоящего доклада заключается в представлении основных результатов нашей статьи [9].

Нами разработаны новые способы построения двух функций Дюлака–Черкаса для системы (1), множества нулевого уровня которых задаются формулами

$$W_\lambda := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \frac{8}{3} + \lambda x\Big(y - \frac{y^3}{3}\Big) = 0\Big\}, \tag{2}$$

$$\tilde{W}_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x + \lambda \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \right)^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}. \qquad (3)$$

Множество (2) состоит в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$ из трех различных компонент: овал I_λ, окружающий начало координат и расположенный в полосе $S_{2\sqrt{3}}$, неограниченная ветвь W_λ^1, расположенная в первом квадранте в области $y > \sqrt{3}$, и симметричная ей ветвь W_λ^3 в третьем квадранте в области $y < -\sqrt{3}$.

Множество (3) состоит из единственной компоненты в виде овала, окружающего начало координат и расположенного в полосе между прямыми $y = \pm 1$.

Также нами предложен способ построения внешней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона, которая была найдена в виде

$$O_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x + \lambda \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \right)^2 - \lambda \left(2y - \frac{y^3}{3} \right) \left(x + \lambda \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \right) + \right.$$
$$\left. + y^2(1+\lambda^2) - \frac{7}{12}\lambda^2 y^4 + \frac{1}{18}\lambda^2 y^6 - 8 - 3\lambda - 18\lambda^2 = 0 \right\}.$$

Анализ расположения кривых $W_\lambda, \tilde{W}_\lambda$ и O_λ позволил уточнить глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом для системы Рэлея (1), построенное в работе [8]. Таким образом, нами получен следующий основной результат:

Теорема *Единственный предельный цикл системы Рэлея (1) на фазовой плоскости расположен в кольце Пуанкаре – Бендиксона* $A(\lambda)$*, внутренней и внешней границами которого соответственно являются:*

1. овалы I_λ *и* O_λ *при* $0 < \lambda < \lambda_1 \approx 0,6012$*,*

2. овал I_λ *и кусочно-гладкий контур, полученный пересечением ветвей* W_λ^1, W_λ^3 *с овалом* O_λ *при* $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \approx 3,925$*,*

3. кусочно-гладкий контур, полученный пересечением овалов I_λ *и* $\tilde{W}_\lambda$ *и кусочно-гладкий контур, полученный пересечением ветвей* W_λ^1, W_λ^3 *с овалом* O_λ *при* $\lambda > \lambda_2$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф23У-008).

Литература

1. Rayleigh J. *The Theory of Sound*. New York, 1945.

2. Баутин Н. П., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* М, 1990.

3. Perko L. *Differential equations and dynamical systems* // Texts Appl. Math. Springer. 2001.

4. Рейссиг Г., Сансоне Г., Конти Р. *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1974.

5. Grin A. A., Schneider K. R. *Global algebraic Poincaré - Bendixson annulus for the Van der Pol equation* // Diff. Equs. 2022. Vol. 58. P. 285–295.

6. Grin A. A., Schneider K. R. *Location of the limit cycle for a class of Lienard systems by means of Dulac–Cherkas functions* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2023. Vol. 90. P. 1–11.

7. Cherkas L. A. *Dulac function for polynomial autonomous systems on a plane* // Diff. Equs. 1997. Vol. 33. P. 692–701.

8. Grin A. A., Schneider K. R. *Global algebraic Poincaré - Bendixson annulus for the Rayleigh equation* // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2023. Vol. 35. P. 1–12.

9. Ли Ю., Гринь А. А., Кузьмич А. В. *Уточненное глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом системы Рэлея* // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 736–749.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА СТАЦИОНАРНОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.И. Громак[1]

[1]Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,

vgromak@gmail.com

В теории нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных (ОДУ), так и в частных производных (НЧП), мощным инструментом является метод преобразований Беклунда, позволяющий, в частности, по известным решениям строить новые решения. К ОДУ такого типа относятся уравнения Пенлеве, иерархии уравнений Пенлеве [1], а среди уравнений НЧП - солитонные уравнения Кортевега – де Фриза, sin-Гордона и др. [2].

Рассмотрим обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве в виде [3]

$$P_2^{[2n]}:\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\mathcal{L}_n[w'-w^2]-(k_nz+p_n)w-\alpha_n=0,\quad n\in N, \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{n+1}[u]=[(\frac{d^3}{dz^3}+(4u+\beta_n)\frac{d}{dz}+2u_z)\mathcal{L}_n[u],\quad \mathcal{L}_1[u]=u,\ u=u(z),\ \ n\in N,$$

k_n,p_n,β,α_n – параметры, причем здесь и далее $\beta=(\beta_1,...,\beta_{n-1})$.

Уравнение (1) имеет порядок $2n$ и первые три уравнения иерархии (1) имеют вид

$$w''=2w^3+(k_1z+p_1)w+\alpha_1, \tag{2}$$

$$w^{(4)}=10w^2w''+10w(w')^2-6w^5-\beta_1(w''-2w^3)+(k_2z+p_2)w+\alpha_2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} w^{(6)}=10(w')^2(s_1w-14w^3+7w'')+w''(10s_1w^2-s_2-70w^4+42ww'')+\\ +56ww'w^{(3)}-(s_1-14w^2)w^{(4)}+2s_2w^3-6s_1w^5+20w^7+(k_3z+p_3)w+\alpha_3, \end{aligned} \tag{4}$$

где $s_1=\beta_1+\beta_2,\ s_2=\beta_1\beta_2$.

Уравнение (1) при $k_n=1,\ p_n=0$ определяет обобщенную нестационарную иерархию второго уравнения Пенлеве $P_2^{[2n]}$, так как первое уравнение иерархии (2) в этом случае есть второе уравнение Пенлеве $P_2^{[2]}$ в канонической форме. Свойству решений уравнений иерархии $P_2^{[2n]}$ посвящено много работ. В частности, для этой иерархии известно преобразование Беклунда, позволившее построить алгебру симметрий Вейля типа $A_1^{(1)}$ и различные классы решений (см., например, [1]).

В настоящей работе рассмотрим иерархию уравнений (1) при $k_n=0$, которую при этом условии будем называть стационарной обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве и обозначать ее через $(1')$, а уравнения $(2)--(4)$ при этом условии будем обозначаем соответственно через $(2')-(4')$. Относительно преобразования Беклунда справедлива

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) $k_n=0,\ \alpha_n\neq 0$ *и* $w=w(z,\alpha_n,\beta,p_n)$ *– решение при фиксированных значениях параметров. Тогда преобразование*

$$T:w\to\widetilde{w}=w-\frac{2\alpha_n}{2\mathcal{L}_n[w'-w^2]-p_n} \tag{5}$$

определяет решение $\widetilde{w}$ *уравнения* $(1')$ *при* $\widetilde{\alpha}_n=-\alpha_n,\ \widetilde{\beta}=\beta,\ \widetilde{p}_n=p_n$.

Также установлено, что в случае $n=1$, т.е. уравнения $(2')$, преобразование Беклунда (5) эквивалентно формуле теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса с инвариантами, определяемыми параметрами уравнения $(2')$.

Уравнения иерархии (1), также как и уравнения иерархии $(1')$, обладают дискретной симметрией

$$S:w(z,\alpha_n,\beta,p_n)\to -w(z,-\alpha_n,\beta,p_n),$$

которая вместе с преобразованием (5) позволяет построить алгебру симметрий Вейля типа $A_1^{(1)}$ с фундаментальными некоммутирующими авто-преобразованиями ST и TS.

Установлено, что уравнение $(1')$ допускает $(2n-1)$ – параметрическое семейство решений, порождаемое системой уравнений

$$\mathcal{L}_n[q] - p_n/2 = 0,\ q(z) = w' - w^2. \tag{6}$$

Это свойство аналогично соотношению между нестационарными иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве [4], так как первое уравнение из (6) определяет обобщенную стационарную иерархию первого уравнения Пенлеве $P_1^{[2n-2]}$.

Введем функцию $\Psi(q(z)) = \mathcal{L}_n[q(z)] - p_n/2$. Тогда уравнение

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\alpha_n^2}{2\Psi} = 0,\ \Psi(q(z)) \neq 0. \tag{7}$$

определяет стационарную иерархию уравнения P_{34} из списка Пенлеве. Для уравнения (7) авто-преобразование Беклунда имеет вид

$$T : q(z, \alpha_n, \beta, p_n) \to \tilde{q}(z, \alpha_n, \beta, p_n) = -q - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_n - (\mathcal{L}_n[q])'}{\mathcal{L}_n[q] - p_n/2}\right)^2.$$

Для приведенных стационарных иерархий установлено свойство вложимости решений [5]. Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений уравнений стационарных иерархий соответственно $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при фиксированном значении параметров α_n, β_n, p_n. Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, \quad q(z) = w' - w^2, \quad \alpha_n = 0, n \in N,$$

которое определяет соотношение между стационарными иерархими первого и второго уравнений Пенлеве. При некоторых соотношениях между параметрами, которые мы здесь не приводим в силу громоздкости, также справедливы включения

$$G_0 \subset G_2 \subset G_4 \subset G_6, \quad H_2 \subset H_4 \subset H_6 \subset H_8.$$

Литература

1. Gromak V. I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve equations* // CRM Proceedining and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, 2001. Vol. 29. P. 3–28.

2. Rogers C., Schief W. K. *Backlund and Darboux Transformations. Geometry and modern applications in soliton theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщённой иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 8. С. 1017–1033.

4. Кудряшов Н. А. *Методы нелинейной математической физики.* М.: МИФИ, 2008.

5. Громак В. И. *О преобразованиях Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве* // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2024. Т. 60, № 3. С. 195–202.

ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛЕВЫМ ВЕРХНИМ ПОСТОЯННЫМ БЛОКОМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
demenchuk@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$– непрерывная ω-периодическая $n\times n$-матрица, B– постоянная $n\times r$-матрица $r\leqslant n$, u– управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах [1 - 2] и др., при этом в периодическом случае множества частот решения и самой системы совпадали. Такой подход был обусловлен тем, что до середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы. Поэтому другие возможные соотношения частот не изучались.

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данную проблему, был Х.Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [3]. Этот результат послужил началом нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейводы , Н.П. Еругина, В.Х. Харасахала, И.В. Гайшуна, Э.И. Грудо, В.Т. Борухова и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр - асинхронным, а описываемые ими колебания - асинхронными. Они реализованы в ряде технических устройств [4].

Задача синтеза дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, сформулирована как задача управления асинхронным спектром. В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффицентов. Тогда применительно к линейной системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u=U(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x}=A(t)x+Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством). Если же требовать наличие у системы (3) сильно нерегулярного периодического решения без предварительного задания целевого множества, то такую, несколько менее жесткую задачу, будем назавать задачей синтеза асихронного режима (возбуждения асинхронных колебаний).

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) на основе вида среднего значения матрицы коэффициентов исследовались в работах [5], [6] и др. Случай максимального ранга матрицы при управлении изучен в работе [7].

В настоящем докладе, укажем признак разрешимости задачи управления асинхронным спектром системы (1) с целевым множеством $L=\{0,\nu_1,\ldots,\nu_k\}$ на основе строения её матрицы коэффициентов.

Из постановки задачи вытекает, что элементы целевого множества должны быть попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi/\omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное ν, которому будут кратны числа $\nu_1,\ldots,\nu_k$, т.е. $\nu_j=k_j\nu \quad (k_j\in N;\ j=\overline{1,k})$. Обозначим $\Omega=2\pi/\nu$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы при управлении не является максимальным

$$\operatorname{rank}B=r_1<r, \tag{4}$$

при этом, без потери общности рассуждений, полагаем равенство нулю первых ее $n-r_1$ строк.

Предположим, что матрица коэффициентов имеет следующее строение

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix},\quad \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}A(t)dt=\begin{pmatrix} A_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где постоянный блок A_{11} размерности $(n-r_1)\times(n-r_1)$ имеет собственные числа с нулевой действительной частью

$$0,\pm i\nu_1,\ldots,\pm i\nu_k,\quad i^2=-1,\quad k\geqslant 1, \tag{6}$$

которые порождают семейство Ω-периодических решений $z(t)$ линейной стационарной системы

$$\dot{z} = A_{11}z, \quad z(t) = \alpha + \sum_{j=1}^{k}(\beta_j \cos\frac{2\pi}{\nu_j}t + \sin\frac{2\pi}{\nu_j}t)$$

с постоянными векторами $\alpha, \beta_j, \gamma_1$, удовлетворяющее тождеству

$$A_{21}(t)z(t) \equiv 0. \tag{7}$$

Справедлива

Теорема. *Пусть выполняются условия (4) – (7). Тогда для системы (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима.*

Исследование выполнено в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М.: Наука,1975.

2. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем*. Минск: Бел. навука, 2012.

3. Massera J. L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, No 1. P. 37– 45.

4. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И., Галкин Ю. В., Вермель А. С. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109, вып. 2. С. 402–406.

5. Деменчук А. К. *Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов* // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 31– 34.

6. Деменчук А. К. *Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов* // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1-2. С. 22 – 29.

7. Деменчук А. К. *Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга* // Труды Института математики. 2019. Т. 27, № 1-2. С. 23 –28.

ТРИВИАЛИЗУЕМЫЕ ОДУ 4-ГО ПОРЯДКА

Б.М. Дубров[1]

[1]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, doubrov@bsu.by

Введение. Рассматривается вопрос тривиализуемости обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, разрешенных относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}) \tag{1}$$

при помощи произвольных замен переменных $(x,y) \mapsto (\bar{x}(x,y),\bar{y}(x,y))$. Под тривиализуемостью мы понимаем приведение данного ОДУ к простейшему виду $y^{(n)} = 0$.

Решение данной задачи известно для случаев $n \leqslant 3$. В случае ОДУ 1-го порядка решение тривиально: любое ОДУ 1-го порядка $y' = F(x,y)$ локально эквивалентно тривиальному уравнению $y' = 0$. Для ОДУ 2-го пореда ответ дан в работе Трессе [1]: уравнение $y'' = F(x,y,y')$ тривиализуемо тогда и только тогда, когда правая часть уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&F_{1111} = 0,\\
&\frac{1}{6}F_{11xx} - \frac{1}{6}F_1F_{11x} - \frac{2}{3}F_{01x} + \frac{2}{3}F_1F_{01} + F_{00} - \frac{1}{2}F_0F_{11} = 0,
\end{aligned}$$

где через f_i мы в общем случае уравнения n-го порядка (1) обозначаем выражение $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$, а через f_x — полную производную

$$D_xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n-1} y^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y^{(i-1)}} + F\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}.$$

Для ОДУ 3-го порядка ответ на вопрос тривиализуемости был получен в работе Эли Картана [2]. А именно, уравнение 3-го порядка эквивалентно тривиальному тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&F_{222} = 0,\\
&W_3 = F_0 + \tfrac{1}{3}F_1F_2 + \tfrac{2}{27}F_2^3 - \tfrac{1}{2}F_{1x} - \tfrac{1}{3}F_2F_{2x} + \tfrac{1}{6}F_{2xx} = 0,\\
&F_{122} + \tfrac{1}{6}F_{22}^2 = 0,\\
&F_{02} - F_{12x} + F_{22xx} = 0.
\end{aligned}$$

Выражение W_3 известно как частный случай обобщенного инварианта Вильчинского для нелинейных ОДУ [3] и было впервые получено в работе Черна [4].

Случай ОДУ 4-го порядка. Основным результатом данной работы является характеризация тривиализуемых ОДУ 4-го порядка.

Теорема. *Обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка тривиализуемо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$\begin{aligned}
&F_{33} = 0,\\
&W_3 = F_1 + \tfrac{1}{2}F_2F_3 + \tfrac{1}{8}F_3^3 - F_{2x} - \tfrac{3}{4}F_3F_{3x} + \tfrac{1}{2}F_{3xx} = 0,\\
&W_4 = F_0 + \tfrac{1}{4}F_1F_3 + \tfrac{13}{100}F_2F_3^2 + \tfrac{9}{100}F_2^2 + \tfrac{39}{1600}F_3^4\\
&\qquad - \tfrac{1}{2}F_{1x} - \tfrac{1}{4}F_3F_{2x} - \tfrac{39}{200}F_3^2F_{3x} - \tfrac{27}{100}F_2F_{3x} + \tfrac{33}{200}F_{3x}^2 + \tfrac{1}{5}F_{2xx} + \tfrac{3}{20}F_3F_{3xx} - \tfrac{1}{20}F_{3xxx} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь выражения W_3 и W_4 также являются обобщенными инвариантами Вильчинского третьего и четвертого порядка [3].

Нетрудно показать, что дифференциальными следствиями этих условий являются также условия $F_{223} = F_{2222} = 0$. Таким образом, правая часть тривиализуемого уравнения 4-го порядка имеет вид:

$$A_0 + A_1y'' + A_2(y'')^2 + A_3(y'')^3 + (B_0 + B_1y'')y''',$$

где A_i, $i = 0,\ldots,3$, и B_j, $j = 0,1$, являются функциями переменных (x,y,y'), дополнительно удовлетворяющими следствиям условий $W_3 = W_4 = 0$.

Для доказательства используется техника построения нормальных связностей Картана, естественным образом ассоциированных с уравнением (1) и явное вычисление тензора кривизны этой связности. Аналогичный подход был использован в работе [5] для получения условий тривиализуемости уравнения (1) при помощи контактных преобразований плоскости.

Данная работа исправляет неточности, допущенные при исследовании геометрии ОДУ 4-го порядка в [6].

Литература

1. Tresse A. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x,y,y')$ // Leipzig. 1896. 87 S. gr. 8.

2. Cartan E. *La geometria de las ecuaciones diferenciales de tercer orden* // Oeuvres Complètes, Part III vol. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1955 (original 1941).

3. Doubrov B. *Generalized Wilczynski invariants for nonlinear ordinary differential equations* // Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. 2008. Vol. 144. P. 25-40.

4. Chern S. S. *The geometry of the differential equation* $y''' = F(x,y,y',y'')$ // Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. 1940. Vol. 4. P. 97–111.

5. Doubrov B. *Contact trivialization of ordinary differential equations* // Differential geometry and its applications. Proceedings of the 8th international conference, Math. Publ. (Opava). 2001. Vol. 3. P. 73–84.

6. Haghighatdoost G., Bazghandi M. *Cartan's Equivalence Method and Geometry of Fourth Order ODEs* // 49th Annual Iranian Mathematics, August 2018.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОТЕНЦИАЛ

С.С. Ежак[1], **М.Ю. Тельнова**[1]

[1]Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова, Стремянный пер., 36, 115054 Москва, Россия,
{Ezhak.SS,Telnova.MY}@rea.ru

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} Q^{\gamma}(x)\, dx = 1, \ \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \ \ \gamma \neq 0, \tag{3}$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)\, dx < +\infty. \tag{4}$$

Изучаются оценки величин

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

Данная работа является продолжением изучения оценок первого собственного значения задач Штурма – Лиувилля с интегральными условиями на потенциал, начало которого было положено Ю.В. Егоровым и В.А. Кондратьевым в [1].

Доказано [2], что если условие (4) не выполняется, то ни для какого действительного λ, ни для какого действительного $0 \leqslant p \leqslant +\infty$ не существует нетривиального решения y уравнения (1), удовлетворяющего условиям $y(0) = 0, y'(0) = p$. Из результатов [3] следует, что множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, для других значенний α,β,γ, $\gamma \neq 0$, множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ непусто. Таким образом, при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\beta \leqslant 2\gamma - 1$ не существует функций Q, удовлетворяющих условиям (3) и (4) одновременно, и при данных значениях параметров задача (1)–(4) не рассматривается.

Доказано [2], [4], что для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q,y], \quad \text{где} \quad R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Теорема 1. *Если $\gamma > 1$, $\alpha,\beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ на $(0,1)$, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m = R[Q_*,u]$. Кроме того, u удовлетворяет следующим уравнению и интегральному условию*

$$u'' + mu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1. \tag{5}$$

Теорема 2. *1. Если $\gamma > 1$, $-\infty < \alpha,\beta < \infty$ или $0 < \gamma \leqslant 1$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < \infty$ ($\beta \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < \infty$), то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.*

2. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma \leqslant 1$, $\alpha,\beta > 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$. Если $\gamma < -1$, $\alpha,\beta > 2\gamma - 1$, то существуют такие $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ на $(0,1)$, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*,u]$. Кроме того, u удовлетворяет (5).

Теорема 3.

1. При $\gamma = 1$, *если* $\alpha, \beta \leqslant 0$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant \frac{3}{4}\pi^2$*;*

если $\beta < 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *(*$\alpha < 0 \leqslant \beta \leqslant 1$*) или если* $\alpha = \beta = 1$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant 0$*;*

если $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ *и при этом* $\alpha \neq 1$ *или* $\beta \neq 1$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant \left(1 - \frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}(1-\beta)^{1-\beta}}{(2-\alpha-\beta)^{2-\alpha-\beta}}\right) \cdot \pi^2 > 0.$

2. При $\gamma > 1$, *если* $\alpha, \beta \leqslant \gamma$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$*;*

если $\alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ *и при этом* $\alpha > \gamma$ *или* $\beta > \gamma$, *то существует такая константа* C*, что* $C < m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 0$.

3. Если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$*;* $0 < \gamma < 1$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ *или* $\gamma \geqslant 1$, $\alpha > 2\gamma - 1$ *или* $\beta > 2\gamma - 1$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = -\infty$.

Теорема 4. *Если* $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ *и при этом* $\alpha \neq 1$ *или* $\beta \neq 1$, *то существуют такая последовательность потенциалов* $Q_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, x_0 - \frac{1}{2n}\right) \\ n \cdot x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}, & x \in \left[x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}\right], \\ 0, & x \in \left(x_0 + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$ *где* x_0 *– некоторая точка из интервала* $(0,1)$, $Q_n(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, *и такая последовательность соответствующих функциям* Q_n *собственных функций* y_n*, принадлежащих* $H_0^1(0,1)$*, что*

$$m_{\alpha,\beta,1} = \lim_{n \to \infty} R[Q_n, y_n].$$

Литература

1. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. *Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля* // Успехи математических наук. 1996. Т. 51, № 3. С. 73–144.

2. Ezhak S., Telnova M. *On conditions on the potential in a Sturm–Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 333. P. 481–496.

3. Куралбаева К. З. *Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля* // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 852–853.

4. Ежак С. С., Тельнова М. Ю. *Об оценках снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал* // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 2023. Вып. 33. С. 144–160.

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КВАЗИЛИНЕЙНОМУ СВЯЗАННОМУ УРАВНЕНИЮ ВАН ДЕР ПОЛЯ-ДУФФИНГА

К.К. Елгондиев

Каракалпакский государственный университет им.ю Бердаха, Ч.Абдирова 1, 230101 Нукус, Узбекистан elgondiev.61@gmail.com

Одним из направлений в теории дифференциальных уравнений является теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, которые используются при математическом описании эволюции различных явлений и процессов с кратковременными возмущениями, длительностью действия которых удобно пренебречь при составлении соответствующей математической модели. При этом можно считать, что эти возмущения носят “мгновенный” характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследования динамических систем с разрывными траекториями или, как их принято называть, – дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]. Как следует из [2], в случае достаточно простых дифференциальных уравнений наличие импульсных воздействий может существенно усложнить поведение траекторий. Из-за наличия импульсных воздействий даже в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами поведение решения может иметь характер, присущий лишь сугубо нелинейным системам: при отсутствии (в системе без импульсного воздействия) периодических решений в системе с импульсным воздействием могут появиться (благодаря импульсному воздействию) периодические решения и наоборот – периодические решения (при отсутствии импульсных воздействий) могут стать непериодическими в силу условий импульсных воздействий.

В данной работе рассмотрена задача построения асимптотического решения при помощи метода усреднения в смысле Ван дер Поля квазилинейного связанного уравнения Ван дер Поля-Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=\lambda x^3,\ \ t\neq\tau_k \tag{2}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta\frac{dx}{dt}|_{t=t_k}=\frac{dx(t_k+0)}{dt}-\frac{dx(t_k-0)}{dt}=I_k,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{3}$$

где моменты импульсного воздействия t_k и величины импульсного воздействия I_k, $k=1,2,\cdots$ выбраны из условия [2] .

1) $\tau_{m+p}=\tau_p+T$, $I_{m+p}=I_p$ для некоторого действительного числа $T>0$, некоторого натурального m и всех целых p.

2) имеют место равенства $\sum_{p=1}^{m} I_p\cos\omega t_p=\sum_{p=1}^{m} I_p\cos\omega t_p=0$.

В виде $\tau_1=\pi/4$,$\tau_2=3\pi/4$,$\tau_3=3\pi/4$, $\tau_{p+3}=\tau_p+T$, $I_1=I_2=I$, $I_3=I\sqrt{2}$,$I_{p+3}=I_p$ $p\in Z$,$I\in RT>$ $>3\pi/2|I|<2\sqrt{\pi/(2\pi-1)}$.

При таком выборе t_k и I_k, $k=1,2,\cdots$, $T-$периодическое решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $z(t_0)=\frac{dz(t_0)}{dt}=0$, $0\leqslant t_0<\frac{\pi}{4}$, порождающего уравнения соответствующего (2), (3) при $\varepsilon=0$, имеет вид

$$z(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{\pi}{4}),\\ I\sin(t-\frac{\pi}{4}), & t\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}),\\ -I\sqrt{2}\cos t, & t\in[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}),\\ 0, & t\in[\frac{3\pi}{2},T),\end{cases} \tag{4}$$

Замена вида $x=u(t)+z(t)$приведет систему (2), (3) к уравнению, $\frac{d^2u}{dt^2}+u=\varepsilon[(\frac{dz}{dt}-a\sin(t+\varphi))(1-$ $-a^2\cos^2(t+\varphi)-2az(t)\cos(t+\varphi)-z^2(t))+(a\cos(t+\varphi)+z(t))^3]$

с нерегулярной правой частью. Откуда при $\varepsilon=0$ следует, что $u(t)=a\cos\psi$, $\frac{du}{dt}=-a\sin\psi$, где $\psi=t+\varphi$, a и φ произвольные постоянные. Приводя к стандартному виду уравнение с нерегулярной правой частью и усредняя правую часть полученной системы по ψ и по t, приходим к системе

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{dt}=\varepsilon[-\frac{a^3}{8}+\frac{a}{2}(1-\frac{I^2}{2T}(\pi+\frac{1}{2}))],\\ \frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon[-\frac{3a^3}{8}+\frac{I^2}{T}-\frac{3I^2}{2T}(\pi+\frac{1}{2})]\end{array}\right].$$

Пусть $|I|<\sqrt{\frac{2T}{2T-1}}$. Тогда из усредненной системы следует, что

$$a(t)=\frac{a_0\sqrt{\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}}\exp\left[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{4T}\varepsilon t\right]}{\sqrt{\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}-\frac{a_0^2}{4}\left(1-\exp[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}\varepsilon t]\right)}},$$

$$\varphi(t)=\varphi_0-\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\left(\exp\left[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}\varepsilon t\right]-1\right)+\frac{4T-5I^2\pi-I^2}{4T}\right|$$

где $a(0)=a_0$ б$\varphi(0)=\varphi_0$– начальное значение амплитуды и начальной фазы колебания.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда решение связанного квазилинейного уравнения Ван дер Поля – Дуффинга* (2) *с импульсным воздействием* (3) *существует и представима* *в виде $x = u(t) + z(t)$, где функция $z(t)$ определена соотношением* (4), *а функция $u(t)$ имеет вид*

$$u(t) = \frac{a_0\sqrt{\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}}\exp\left[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{4T}\varepsilon t\right]}{\sqrt{\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T} - \frac{a_0^2}{4}\left(1-\exp[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}\varepsilon t]\right)}}\times$$

$$\times\cos\left(t+\varphi_0 - \frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\left(\exp\left[\frac{2T-I^2(2\pi+1)}{2T}\varepsilon t\right]-1\right)+\frac{4T-5I^2\pi-I^2}{4T}\right|\right)$$

.

Литература

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1987.

2. Самойленко В. Г., Елгондыев К. К. *Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2.* Препринт / АН УССР: Ин-т математики, 89.59. Киев, 1989.

3. Elgondiev K. K., Naurizbaeva Sh. O. *Averaging method for the quasi-linear coupled Van der Pol-Duffing equation* // Science and Education in Karakalpakstan. 2024. № 1/1. P. 4-7.

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ СМЕНЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов, А.В. Ильин

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
izobov@im.bas-net.by
МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, МГУ, стр. 52, ВМК, ком. 733б, 119991 ГСП-1 Москва, Россия,
iline@cs.msu.su

Антиперроновский эффект [1–3] (противоположный известному перроновскому [4, 5]) предполагает смену всех положительных характеристических показателей $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на отрицательные у (некоторых) нетривиальных решений дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемой вектор-функцией из известных классов малых возмущений. Этот эффект представляет бóльший интерес своими приложениями по сравнению с перроновским (ему посвящена серия работ авторов). В настоящем сообщении будут изложены полученные авторами результаты по реализации антиперроновского эффекта.

1°. В классе линейных экспоненциально убывающих возмущений справедлива

Теорема 1 [1]. *Для любых параметров $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$, $0 < \sigma < \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2$ существуют: 1) система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$; 2) линейное возмущение $f(t,y) \equiv Q(t)y$ с показателем $\lambda[Q] \leqslant -\sigma < 0$, такие что система (2) имеет ровно $n-1$-линейно независимых решений $Y_1(t),\ldots,Y_{n-1}(t)$ с показателями Ляпунова $\lambda[Y_i] = [\theta(\sigma-\lambda_1)-\lambda_{i+1}](\theta-1)^{-1}$, $i = \overline{1,n-1}$.*

З а м е ч а н и е 1. Остаётся открытым вариант $\lambda_1(A) > 0$, $\lambda_n(A+Q) < 0$, $\lambda[Q] < 0$.

2°. В случае линейных возмущений с $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ справедлива

Теорема 2 [2]. *Для любых параметров $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n < 0$ существуют: 1) система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$; 2) возмущение $Q(t) \to 0$, $t \to +\infty$, такие что $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.*

3°. В случае нелинейных m-возмущений

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f\|y\|^m, \quad m > 1, \quad y \in R^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

справедлива

Теорема 3 [3]. *Для любых параметров* $m > 1$, $\theta > 1$ *и* $\lambda > 0$ *существуют: 1) двумерная система (1) с показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$; *2) бесконечно дифференцируемое возмещение (3), такие что нелинейная система (2) имеет решение* $Y(t)$ *с показателем* $\lambda[Y] = -\lambda(\theta+1)/(m\theta-1)$.

Антиперроновский эффект в рассматриваемом случае реализуется на большем числе решений возмущённой системы. Эти решения принадлежат пространственно-временным октантам

$$R_1^2 = \{y \in R^2 : y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0\} \times T_0, \quad R_2^2 = \{y \in R^2 : y_1 \leqslant 0,\ y_2 \geqslant 0\} \times T_0,$$
$$R_3^2 = \{y \in R^2 : y_1 \leqslant 0,\ y_2 \leqslant 0\} \times T_0, \quad R_4^2 = \{y \in R^2 : y_1 \geqslant 0,\ y_2 \leqslant 0\} \times T_0,$$

в которых $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $T_0 = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geqslant 0$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Для любых параметров* $\lambda > 0$, $m_4 \geqslant m_3 \geqslant m_2 \geqslant m_1 > 1$, $\theta > 1$ *существуют: 1) двумерная линейная система (1) с характеристическими показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda >$ > 0; *2) бесконечно дифференцируемое* m_1*-возмещение* $f(t,y) : [t_0, +\infty) \times R^2 \to R^2$, *одновременно являющееся* m_i*-возмущением в октанте* R_i^2 *при всяком* $i = \overline{1,4}$, *такие что возмущённая система (2) имеет решения* $Y_i \subset R_i^2$, $i = \overline{1,4}$, *с показателями* $\lambda[Y_i] = -\lambda\dfrac{\theta+1}{m_i\theta-1} < 0$.

З а м е ч а н и е 2. Справедливо и аналогичное теореме 3 утверждение о существовании двумерных систем (1) со всеми положительными показателями и (2) с возмущением (3), имеющей 4 нетривиальных решения с отрицательными различными показателями Ляпунова.

Литература

1. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1450–1457.
2. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 11. С. 1443–1452.
3. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1599–1605.
4. Perron O. *Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen* // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32, H. 5. S. 702–728.
5. Леонов Г. А.*Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения*. М.: Ижевск, 2006.

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Белорусско-Российский университет,
пр. Мира 43, 212000 Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut

Исследуется задача типа [1-–3]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) +$$
$$+\mathbf{K}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{K}_2(t) + \mathbf{L}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{L}_2(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{L}_i \in C(I,\ \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mathbf{F} \in C(D,\ \mathbb{R}^{n\times n})$, $D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\}$, $(\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt),\ i = 1,2;$ $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что нелинейная функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); $0 < \tilde{\rho}_i \le \infty,\ I = [0,\ \omega]$.

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{X}(t)\|$ ($\|\cdot\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры) с помощью конструктивного метода [4] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах. Разработан итерационный алгоритм типа [1–3] построения решения. Под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближённых решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач [5].

Рассматривается эквивалентная (1), (2) задача

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y},$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{Y}\mathbf{K}_2(t) + \mathbf{L}_1(t)\mathbf{Y}\mathbf{L}_2(t) + \mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \quad (3)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}. \quad (4)$$

Вводятся следующие обозначения:

$h_1 = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0})\|$, $h_2 = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0})\|$, $h = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{F}(t,0,0)\|$,

$c_i = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{C}_i(t)\|$, $d_i = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{D}_i(t)\|$, $k_i = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{K}_i(t)\|$, $l_i = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{L}_i(t)\|$, $\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|$,

$G = \{(t,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}) : t \in [0,\omega], \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\}$, $\tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t),\ \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leqslant \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leqslant \rho_2\}$,

$\lambda_U = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega} \left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|$, $\lambda_V = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega} \left\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|$, $p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(c_1c_2 + d_1d_2 + L_1)$,

$p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(c_1c_2 + d_1d_2 + L_1), q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(k_1k_2 + l_1l_2 + L_2), q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(k_1k_2 + l_1l_2 + L_2)$,

$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)$, $\quad \mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau) = \mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)$,

где $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$; $\quad i = 1,2$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — интегральные матрицы уравнений

$d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ $(\mathbf{U}(0) = \mathbf{E})$, $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ $(\mathbf{V}(0) = \mathbf{E})$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица;

$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)$;

Φ — линейный оператор, $\Phi\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)$;

$L_i = L_i(\rho_1,\rho_2)$, $(i = 1,2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ в области G;

$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\Phi^{-1}\Big(\int_0^\omega \Big(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_2(s) + \mathbf{D}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_2(s) +$$
$$+ \mathbf{K}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{K}_2(s) + \mathbf{L}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{L}_2(s) + \mathbf{F}(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)))\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds)d\tau)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\Big(\int_0^\omega \Big(\int_\tau^t \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_2(s) + \mathbf{D}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_2(s) +$$
$$+ \mathbf{K}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{K}_2(s) + \mathbf{L}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{L}_2(s) + \mathbf{F}(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)))\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds)d\tau)\mathbf{V}(t).$$

Теорема. *Пусть оператор Φ однозначно обратим и выполнены условия $p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \leqslant \rho_1$, $p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \leqslant \rho_2$, $p_1 + q_2 < 1$. Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области G, при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z} \leqslant (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Для построения решения задачи (3), (4) используется классический метод последовательных приближений (см., например, [6, с. 606])

$$\mathbf{X}_m(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}),\ \mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}),\ m = 1,2,..., \quad (5)$$

где в качестве начального приближения $(\mathbf{X}_0(t), \mathbf{Y}_0(t))$ принимаются произвольные матрицы-функции класса $C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$, все приближения удовлетворяют условиям (2).

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\{\mathbf{X}_m(t), \mathbf{Y}_m(t)\}_0^\infty$, построенной по алгоритму (5), при этом получены оценки $\tilde{\mathbf{Z}}_m \leqslant (\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^m\mathbf{Z}_0$, $\mathbf{Z} \leqslant \tilde{\mathbf{Z}}_0 + (\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{Z}_0$, где $\tilde{\mathbf{Z}}_0 = colon\,(\|\mathbf{X}_0\|,\ \|\mathbf{Y}_0\|)$,$\tilde{\mathbf{Z}}_m = colon\,(\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C,\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C)$.

Литература

1. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 570–583.

2. Кашпар А. И. *Регуляризация задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всероссийской конф. с междунар. участием, посв. памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. С. 64–67.

3. Кашпар А. И. *К разрешимости и построению решения задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2023): тез. докл. Междунар. науч. конф., Могилев, 23 – 27 мая 2023 г. Ч. 1. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. С. 76–78.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

5. Самойленко А. М., Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*. Киев: Наукова думка, 1992.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЦЫ КОШИ ДВУМЕРНОЙ РАВНОМЕРНО ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С КУСОЧНО РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Козлов

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,
Блохина, 30, 211440 Новополоцк, Витебская область, Беларусь, a.kozlov@psu.by

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно непрерывными и ограниченными матрицами коэффициентов A и B, причем матрица B обладает свойством кусочной равномерной непрерывности.

Определение 1 [1, с. 264 – 265]. Матричная функция $B : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ называется кусочно равномерно непрерывной, если она кусочно-непрерывна на $[0, +\infty)$, существует такое число $\Delta_0 > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I функции B не меньше Δ_0, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, что для всех $t, s \in I$, удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leqslant \Delta$, выполнено соотношение $\|B(t) - B(s)\| \leqslant \varepsilon$.

Замыкая систему (1) векторным управлением u, заданным в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — кусочно-непрерывная и ограниченная $(m \times n)$-матрица, получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Определение 2 [2, 3]. Система (1) называется σ-равномерно вполне управляемой (по Калману), если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ для матрицы управляемости (матрицы Калмана) системы (1) выполняется неравенство

$$\xi^T \int_{t_0}^{t_0\sigma} X(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)X^T(t_0,\tau)\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2$$

(здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, $X(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, – матрица Коши системы (1) с $u \equiv 0$).

Пусть $J(\varphi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — матрица поворота на угол φ. Тогда обозначим $J_k := J(k\pi/2)$, $k = \overline{1,4}$.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$. Если управляемая система (1) с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной и ограниченной матрицей B обладает свойством σ-равномерной полной управляемости (по Калману), то для любого числа $t_0 \geqslant 0$ найдутся такие величина $d > 0$ и кусочно-непрерывное и ограниченное управление $U(t) \in \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $\|U(t)\| \leqslant d$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = \widetilde{J}$, в котором матрица $\widetilde{J}$ является одной из матриц множества $\{J_1, \ldots, J_4\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.*

Теорема 1 является следствием теоремы 27.3 работы [1, с. 289] и следующих утверждений:

Теорема 2. *Если управляемая система (1) с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной и ограниченной матрицей B обладает свойством σ-равномерной полной управляемости (по Калману), тогда для всякого $t_0 \geqslant 0$ найдутся такие ортогональные $(n \times n)$-матрицы Q_1 и Q_2, при которых для любых $r > 0$ и $\rho \in (0,1)$ существует независящая от $t_0 \geqslant 0$ величина $\beta = \beta(r,\rho) > 0$ такая, что для всякой матрицы $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, найдется кусочно-непрерывное и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ с оценкой $\|U(t)\| \leqslant \beta \|H - E\|$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, что для матрицы Коши $X_U(t_0 + \sigma, t_0)$ системы (2) с этим управлением на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ обеспечивается равенство $X_U(t_0 + \sigma, t_0) = Q_1 H Q_2$.*

Теорема 3. *Для любых ортогональных матриц Q_1 и Q_2 второго порядка найдется такая матрица $M \in \{J_1, \ldots, J_4\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, что (2×2)-матрица $Q_1 M Q_2$ имеет все отделенные от нуля (фиксированным положительным числом) положительные главные угловые миноры.*

Замечание. Доказательство теоремы, аналогичной теореме 3, установлено автором для случая квадратных матриц третьего порядка, т.е. доказана следующая

Теорема 4. *Для любых ортогональных (3×3)-матриц Q_1 и Q_2 найдутся такие матрица перестановок $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и "почти" единичная матрица $\widetilde{E} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (полученная из единичной заменой некоторых 1 на -1), что (3×3)-матрица $Q_1(P\widetilde{E})Q_2$ имеет все отделенные от нуля (некоторым фиксированным положительным числом) положительные главные угловые миноры.*

На сегодняшний день для матриц произвольного порядка n вопрос остается открытым.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрогр. № 1, зад. № 1.2.01).

Литература

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем*. Минск: Беларус. навука, 2012.

2. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. Vol. 5, No 1. P. 102–119.

3. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравн. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.

ВЕРХНИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

А.В. Конюх[1], Е.И. Фоминых[2]

[1]Белорусский государственный экономический университет, пр-т Партизанский 26, 220070 Минск, Беларусь, al3128@gmail.com
[2]Гомельский торгово-экономический колледж, ул. Привокзальная 4, 246017 Гомель, Беларусь, fletl@list.ru

Для заданного натурального $n \geqslant 2$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)\colon [0,+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначаем показатели Ляпунова системы (1).

Пусть $\sigma_1(t) \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n(t)$ – сингулярные числа какой-либо фундаментальной матрицы $X(t)$, $t \geqslant 0$, системы (1). Величина

$$\overline{\sigma}_k(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad k \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

называется *k-м верхним сингулярным показателем* системы (1), его называют также её $(n-k+1)$*-й ляпуновской экспонентой* [1, с. 43] (при $k=1$ и $k=n$ эти показатели называют соответственно *младшим* и *старшим* сингулярными показателями). Несложно видеть, что сингулярные показатели (2) не зависят от выбора фундаментальной матрицы $X(\cdot)$ системы (1) и являются инвариантами преобразования Ляпунова. Сингулярные показатели представляют собой удобный инструмент для оценки хаусдорфовой и фрактальной размерностей аттракторов (см., например, [1, гл. 9]), чем, в частности, и обусловлен интерес к их изучению.

С геометрической точки зрения число $\overline{\sigma}_k(A)$ – это точная верхняя граница изменения в логарифмической шкале при $t \to +\infty$ показателей $(n-k+1)$-х главных полуосей семейства $(n-1)$-мерных эллипсоидов $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|X^{-1}(t)\xi\| = 1\}$, являющихся образами единичной евклидовой сферы семейства линейных отображений $X(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, порождаемых решениями системы (1).

С общей точки зрения отличие верхних сингулярных показателей от показателей Ляпунова состоит в том, что первые являются асимптотическими характеристиками семейства линейных отображений $X(t)$, $t \geqslant 0$, в то время как вторые – это асимптотические характеристики её индивидуальных решений. Из теоремы Ляпунова и обобщённой теоремы Куранта–Фишера вытекает, что вычисление показателей Ляпунова и верхних сингулярных показателей отличаются друг от друга только порядком выполнения предельных переходов. Полное описание взаимного расположения сингулярных показателей и показателей Ляпунова системы (1) получено в работе [2]: $\overline{\sigma}_k(A) \leqslant \lambda_k(A)$, если $k < n$, и $\overline{\sigma}_n(A) = \lambda_n(A)$, и указанными соотношениями исчерпываются все соотношения между этими показателями систем из $\mathcal{M}_n$. Полное описание совместного расположения верхних сингулярных показателей, показателей Ляпунова и показателей Боля одного класса типичных по Бэру систем в пространстве $\mathcal{M}_n$ с топологией равномерной сходимости на полуоси матриц коэффициентов получено в работе [3].

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определённая на временно́й полуоси матричнозначная функция $\mathcal{A}(\cdot,\mu)\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна, ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной) и, если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность функций $\mathcal{A}(\cdot,\mu_k)$ при $k \to +\infty$ сходится к функции $\mathcal{A}(\cdot,\mu_0)$ равномерно на всей полуоси $t \geqslant 0$ (такое семейство далее называем *равномерным семейством* $\mathcal{A}$). При каждом фиксированном в семействе $\mathcal{A}$ значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, верхние сингулярные показатели которой обозначим через $\overline{\sigma}_1(\mu;\mathcal{A}) \leqslant \ldots \leqslant \overline{\sigma}_n(\mu;\mathcal{A})$, а значит, для каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ определена функция $\overline{\sigma}_k(\cdot;\mathcal{A})\colon M \to \mathbb{R}$, которую назовём *$k$-ым верхним сингулярным показателем семейства* $\mathcal{A}$. Естественно, возникает вопрос, что́ представляет собой каждая из функций $\overline{\sigma}_k(\cdot;\mathcal{A})$, $k = \overline{1,n}$, для равномерного семейства $\mathcal{A}$.

В докладе [4] установлено, что для произвольных натурального $n \geqslant 2$ и метрического пространства M каждая из функций $\overline{\sigma}_k(\cdot;\mathcal{A})$, $k = \overline{1,n}$, удовлетворяет следующим двум условиям: 1) является функцией класса $({}^*,G_\delta)$, т.е. для любого $r \in \mathbb{R}$ её прообраз отрезка $[r,+\infty)$ является G_δ-множеством; 2) имеет непрерывные миноранту и мажоранту, т.е. существуют такие функции $a_k(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ и $b_k(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$, что $a_k(\nu) \leqslant \overline{\sigma}_k(\mu;\mathcal{A}) \leqslant b_k(\mu)$ для всех $\mu \in M$.

Так как $\lambda_n(A) = \overline{\sigma}_n(A)$, то, как следует из работ [6] или [7], эти свойства полностью характеризуют функцию $\overline{\sigma}_n(\cdot;\mathcal{A})$, т.е. для любых натурального $n \geqslant 2$, метрического пространства M

и функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям 1) и 2), найдётся равномерное семейство (3), для которого $\overline{\sigma}_n(\mu,;\mathcal{A}) = f(\mu)$ при всех $\mu \in M$. Для остальных верхних сингулярных показателей вопрос о том, дают ли условия 1) и 2) полное описание этих показателей для равномерных семейств, оставался открытым. Было только установлено [5], что если функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху и удовлетворяет условию 2), то для каждого $k \leqslant n$ найдётся равномерное семейство (3), для которого $\overline{\sigma}_k(\mu,;\mathcal{A}) = f(\mu)$ при всех $\mu \in M$.

В настоящем докладе, основываясь на конструкции работы [7], показывается, что условия 1) и 2) дают полную характеризацию сингулярных показателей равномерных семейств, если $k \neq = 1$, т.е., другими словами, получено полное описание каждого, кроме младшего, из сингулярных показателей равномерных семейств.

Теорема. *Для каждых натуральных $n \geqslant 2$ и фиксированного $k \in \{2,\dots,n\}$ метрического пространства M и функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, принадлежащей классу $({}^*,G_\delta)$ и имеющей непрерывные миноранту и мажоранту, существует такое равномерное семейство $\mathcal{A}$, для которого $\overline{\sigma}_k(\mu;\mathcal{A}) = = f(\mu)$ при всех $\mu \in M$.*

Литература

1. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости*. М.–Иж.: РХД, 2006.
2. Барабанов Е. А., Фоминых Е. И. *Описание взаимного расположения сингулярных показателей линейной дифференциальной системы и показателей её решений* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1587–1603.
3. Конюх А. В. *Верхние сингулярные показатели, показатели Ляпунова и Боля типичных линейных дифференциальных систем* // Доклады НАН Беларуси. 2007. Т. 51, № 5. С. 28–32.
4. Касабуцкий А. Ф., Фоминых Е. И. *Верхние сингулярные показатели парамтрических семейств линейных дифференциальных систем как функции параметра* // Матер. XXI Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения – 2023», Могилёв, 23–27 мая 2023 г.; в 2-х ч. Ч. 1. С. 42–43.
5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.: ОНТИ, 1937.
6. Быков В. В. *Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1579–1592.
7. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1579–1588.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТЕПЕННОГО ВИДА ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.В.Коробко[1]

[1]Российский Экономический Университет имени Г.В.Плеханова, г. Москва
Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
Korobko.EV@rea.ru

Рассмотрим дискретный аналог дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера второго прядка вида

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \tag{1}$$

где при фиксированном k_0, $u\colon \mathbb{N}(k_0) := \{k_0, k_0+1, \ldots\} \to \mathbb{R}$, $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$ - первая разность. Пусть также $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ - некоторые фиксированные константы.

Замечание. Поскольку уравнение (1) распадается на два уравнения, при формулировки результатов мы полагаем, что фиксирован конкретный знак (либо знак $+$, либо знак $-$). В случае, когда в уравнении (1) стоит знак $+$ необходимо, что бы константа m представляла из себя сократимую дробь m_1/m_2, где разность $m_1 - m_2$ нечетна.

Также предпожим $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq -m-1$.

Уравнение (1), является естественным аналогом дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка [2]

$$y''(x) \pm x^{\alpha} y(x)^m = 0, \tag{2}$$

где вторая производная заменена на вторую разность. Можно убедиться, путем прямой подстановки в уравнение (2), что выражение

$$y(x) = a_{\pm} x^{-s},$$

где

$$a_{\pm} := [\mp s(s+1)]^{1/(m-1)},\ s := (\alpha+2)(m-1)^{-1}$$

являeтся его решением. К сожалению, в случае дискретного уравнения (2), решение аналогичного вида (бытьт может с другими коэффициентами $\alpha_{\pm}$, s) отсутсвует [1]. Таким образом, возникает вопрос существования аналогичных приближенных решений уравнения (1).

Определение. [4] Функцию u_{app} назовем приближенным решением уравнения (1) порядка $g\colon \mathbb{N}(k_0) \to \mathbb{R}$, если

$$\lim_{k\to+\infty} (\Delta^2 u_{app}(k) \pm k^{\alpha} u^n_{app}(k)) g(k) = 0,$$

а если g - степенная фукниця, то скажем, что это приближенное решение степенного вида.

Теорема 1. [4] Для уравнения (1) функция

$$u_{app}(k) = a \cdot k^{-s} + b \cdot k^{s+1}, k \in \mathbb{N}(k_0),$$

где

$$s = (\alpha+2)(m-1)^{-1},\ a = (\mp s(s+1))^{1/(m-1)},\ b = as(s+1)(s+2-ms)^{-1}, \tag{3}$$

является пибли женным решением (степенного вида) порядка $g(k) = k^{s+3}$.

Для доказательства необходимых условий существования решений степенного вида уравнения(1) потребуется сделать замену переменных

$$u(k) = ak^{-s} + bk^{-(s+1)}(1+Y_0(k)),$$
$$\Delta u(k) = \Delta(ak^{-s}) + \Delta(bk^{-(s+1)})(1+Y_1(k)),$$
$$\Delta^2 u(k) = \Delta^2(ak^{-s}) + \Delta^2(bk^{-(s+1)})(1+Y_2(k)),$$

где a, b, s определены в формуле (3), $k \in \mathbb{N}(k_0)$, $Y_i(k)$,$i = 1,2,3,4$ - новые независимые переменные.

Таким образом, уравнение (1) преобразуется в систему

$$\Delta Y_0(k) = (-(s+1)k^{-1} + O(k^{-2}))(-Y_0(k) + Y_1(k)),$$
$$\Delta Y_1(k) = (-(s+2)k^{-1} + O(k^{-2}))(ms(s+2)^{-1} Y_0(k) - Y_1(k) + O(k^{-1})).$$

Одним из основных принципов, которые потребуются для доказательства необходимых условий существования решений степенного вида дискретного аналога уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка (1), описан в [3, Теорема 1].

Теорема 2. [4] Если существуют такие числа $\gamma \in (0,1)$, $s \neq 1,-2$ и $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,2,3,4$, что при

$$P := (\gamma+s+1)(s+1)^{-1},\ Q := (\gamma+s+2)(ms)^{-1}$$

выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:
1. $ms > 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 \cdot P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 \cdot P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 \cdot Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 \cdot Q$;
2. $ms < 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 \cdot P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 \cdot P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 \cdot Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 \cdot Q$;
3. $ms < 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 \cdot P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 \cdot P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 \cdot Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 \cdot Q$;
4. $ms > 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 \cdot P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 \cdot P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 \cdot Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 \cdot Q$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее для всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ оценкам

$$-\varepsilon_1 k^{-\gamma} < (u(k) - a \cdot k^{-s} - b \cdot k^{-(s+1)}) b^{-1} k^{s+1} < \varepsilon_2 k^{-\gamma},$$

$$-\varepsilon_3 k^{-\gamma} < (\Delta u(k) - a\Delta(k^{-s}) - b\Delta(k^{-(s+1)})(b\Delta(k^{-(s+1)}))^{-1} < \varepsilon_4 k^{-\gamma},$$

$$-\varepsilon_1 k^{-\gamma} + O(k^{-1}) < (\Delta^2 u(k) - a\Delta^2(k^{-s}) - b\Delta^2(k^{-(s+1)})(b\Delta^2(k^{-(s+1)}))^{-1} ms(s+2)^{-1} < \varepsilon_2 k^{-\gamma} + O(k^{-1}).$$

Пример. Рассмотрим уравнение (1), где $\alpha = -3$, $m = 1/2$

$$\Delta^2 u(k) \pm k^{-3} u^{1/2}(k) = 0.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, $\gamma = 1/2$.

Тогда $s = 2$, $a = 1/36$, $b = 2/27$. Условия (1) Теоремы 2 выполнены и можно показать, что тогда существует решение $u(k)$, $k \in \mathbb{N}(k_0)$, такое что

$$|u(k) - \frac{1}{36}k^{-2} - \frac{2}{27}k^{-3}| < \frac{71}{2}k^{-7/2},$$

$$|\Delta u(k) - \frac{1}{36}\Delta k^{-2} - \frac{2}{27}\Delta k^{-3}| < \frac{2}{27}k^{-1/2}|\Delta k^{-3}|,$$

$$|\Delta^2 u(k) - \frac{1}{36}\Delta^2 k^{-2} - \frac{2}{27}\Delta k^{-3}| < \frac{27}{2}|\Delta^2 k^{-3}|(12k^{-1/2} + |O(k^{-1}|), k \to \infty.$$

Литература

1. Astashova I. V., Diblik J., Korobko E. *Existence of a solution of discrete Emden-Fowler equation caused by continuous equation* // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S. 2021. Vol. 14, No 12. P. 4159–4178.

2. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*. М.: ИЛ, 1954.

3. Diblik J. *Discrete retract principle for systems of discrete equations*// Comput. Math. Appl. 42, 2001. Vol. 42. P. 515–528.

4. Коробко Е. В. *Дискретный аналог уравнения типа Эмдена–Фаулера и его решения, эквивалентные степенным функциям* // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 861–863.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИЗВЕСТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.А. Кумко[1], **И.П. Мартынов**[1]

[1]Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь,
{kumko_aa, i.martynov}@grsu.by

Ставится задача: выявить, для каких последовательностей общее решение дифференциального уравнения

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + 6y'^2 \tag{1}$$

является производящей функцией. Из [1] следует, что общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = \frac{4C_1 z + 2C_2 + 1}{4\,(C_1 z^2 + C_2 z + C_3)} \tag{2}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные комплексные переменные.

Последовательно вводя обозначения

$$z - z_0 = t, 2z_0 + \frac{C_2}{C_1} = \alpha, \quad z_0^2 + \frac{C_2}{C_1}z_0 + \frac{C_3}{C_1} = -\beta,$$

$$\alpha^2 + 4\beta = \mu, \quad \lambda_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\mu}}{2\beta}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\mu}}{2\beta}$$

решение (2) можем записать в виде

$$y = -\frac{t}{t^2 + \alpha t - \beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{1}{1 - \lambda_1 t} - \frac{1}{1 - \lambda_2 t}\right). \tag{3}$$

Пусть $\delta = min\{\frac{1}{|\lambda_1|}, \frac{1}{|\lambda_2|}\}$. Тогда при $|t| < \delta$ функцию (3) можем записать так:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) t^n. \tag{4}$$

Функция (4) является производящей функцией для некоторой числовой последовательности, общим членом которой является

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Лемма 1. *Коэффициенты a_n из (4) удовлетворяют соотношению*

$$a_{n+2} - \frac{\alpha}{\beta} a_{n+1} - \frac{1}{\beta} a_n = 0. \tag{5}$$

Лемма 2. *Соотношению (5) удовлетворяет коэффициенты a_n вида*

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left(\left(\left(\alpha^2 + 2\beta \right) a - \alpha\beta b \right) (\lambda_1^n - \lambda_2^n) + \sqrt{\mu} \left(\beta b - \alpha a \right) (\lambda_1^n + \lambda_2^n) \right), \tag{6}$$

где a, b – произвольные переменные.

Следствие 1. *Если в (6) положить $\alpha a = \beta b$, то*

$$a_n = \frac{\beta a}{\sqrt{\mu}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

Полагая $m = [\frac{n-1}{2}]$ (через $[x]$ обозначим целую часть числа x), получим

$$a_n = \frac{a}{(2\beta)^{n-1}} \sum_{k=0}^{m} C_m^{2k+1} \alpha^{n-2k+1} \mu^k.$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, при этом

$$2^{n-1} a_n = \sum_{k=0}^{m} C_m^{2k+1} 5^k,$$

откуда

$$\{a_n\} : a, a, 2a, 3a, 5a, \ldots.$$

Если $a = 1$, то $\{a_n\}$ – последовательность Фибоначчи.

Следствие 2. *Если в (6) положить $\left(\alpha^2 + 2\beta\right) a = \alpha\beta b$, то*

$$a_n = \frac{\beta a}{\alpha} (\lambda_1^n + \lambda_2^n)$$

Полагая $m = [\frac{n}{2}]$, получим

$$a_n = \frac{a}{(2\beta)^{n-1}} \sum_{k=0}^{m} C_m^{2k+1} \alpha^{n-2k+1} \mu^k.$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, при этом

$$2^{n-1} a_n = \sum_{k=0}^{m} C_m^{2k} 5^k,$$

откуда

$$\{a_n\} : a, 3a, 4a, 7a, 11a, \ldots.$$

Если $a = 1$, то $\{a_n\}$ – последовательность Люка́.

Лемма 3. *Уравнение (1) имеет первый интеграл вида*

$$\left(y'' - 6yy' + 4y^3\right)^2 = h\left(y' - y^2\right)^3, \tag{7}$$

Следствие 3. *Если* $\alpha = h = 0$, *то* $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. *Уравнение*

$$y'' - 6yy' + 4y^3 = 0,$$

имеет общее решение

$$y = -\frac{t}{t^2 - \beta}, \quad t = z - z_0, \quad \forall\, z_0, \beta,$$

Литература

1. Мартынов И. И. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 764–771.

К ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Лаптинский

Белорусско-Российский университет,
пр. Мира 43, 212000 Могилев, Беларусь
lavani@tut

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A \in \mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $f \in \mathrm{C}^{(0,1)}\left(I \times D, \mathbb{R}^n\right)$, $I = [0,\infty)$, $D \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$, $0 < \delta \leqslant \infty$; $f(t,0) \equiv 0$.

На основе применения подхода [1] (см. также [2]) получены конструктивные достаточные условия экспоненциальной устойчивости по Ляпунову тривиального решения $x \equiv 0$ системы (1) в случае, когда для матрицы Коши $K(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ системы первого приближения

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

справедлива оценка [3, с. 366]

$$\|K(t,\tau)\| \leqslant ce^{-a(t-\tau)} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant t), \tag{2}$$

где c, a – некоторые положительные постоянные, $\|\cdot\|$ – согласованная норма, например, любая из норм матрицы, определенных в [3, с. 21].

Изучим поведение решений системы (1) с условием

$$x(0) = \lambda \in D.$$

Пусть для матрицы $\partial f(t,x)/\partial x$ имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right\| \leqslant \gamma(t, \|x\|),$$

где $\gamma(t,s)$ – неубывающая по s функция класса $\mathrm{C}(I \times [0,\delta))$,

$$\alpha(s) \equiv \int_0^\infty \gamma\left(t, e^{-at}s\right)dt < \infty \quad \forall s \in [0,\delta), \tag{3}$$

при этом несобственный интеграл в (3) сходится равномерно по $s \in [0,\rho] \quad \forall \rho \in (0,\delta)$.

На основании (2) системе (1) сделаем замену переменных типа [3, с. 267]

$$x = e^{-at}y.$$

Тогда придем к системе

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,y), \tag{4}$$

где $B(t) = A(t) + aE$, $g(t,y) = e^{at} f(t, e^{-at}y)$, при этом $x(0) = y(0)$ и $g(t,y) \in C^{(0,1)}_{ty}(I, \|y\| < \delta e^{at})$; $E = diag(1,...,1)$.

Сначала изучим вопрос существования нетривиальных решений системы (4), определённых и ограниченных на всей полуоси $[0,\infty)$.

Примем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \|\lambda\|, \; \varphi(\rho,\varepsilon) = \int_0^{\rho} (c\alpha(s) - 1)ds + c\varepsilon, \; \|y\|_C = \sup_{t \geqslant 0} \|y(t)\|,$$

где $C = C[0,\infty)$ – банахово пространство вектор-функций, непрерывных и ограниченных на полуоси.

Лемма. *Пусть уравнение* $c\alpha(s) - 1 = 0$ *имеет на промежутке* $(0,\delta)$ *решение* ρ^* *и выполнено неравенство*

$$\varphi(\rho^*, 0) < 0.$$

Тогда для начальных значений λ*, принадлежащих области*

$$0 < \|\lambda\| < \frac{1}{c}\int_0^{\rho^*} (1 - c\alpha(s))ds \equiv \varepsilon_0,$$

система (4) имеет единственное решение, определенное и ограниченное на полуоси $[0,\infty)$*. Для этого решения справедлива оценка* $\|y\|_C \leqslant \rho$*, при этом*

$$0 < \rho_1(\varepsilon) \leqslant \rho < \rho^*,$$

где $\rho_1(\varepsilon)$ *– корень уравнения* $\varphi(\rho,\varepsilon) = 0$.

Теорема. *Пусть выполнены допущения и предположения леммы. Тогда нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову при* $t \to \infty$*, при этом справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \alpha(\rho_1(\varepsilon))} e^{-at}.$$

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 275–277.

2. Лаптинский В. Н. *К анализу нелокальных задач теории нелинейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 11. С. 1565–1569.

3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Леваков[1]

[2]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, levakov123321@gmail.com

Рассматривается стохастическая дифференциально-разностная гибридная система с управлением в форме обратной связи и с разностным уравнением с запаздыванием.

Пусть заданы непрерывные функции $f: R_+ \times R^d \times R^r \times R^{l_1} \to R^d$, $g: R_+ \times R^d \times R^r \times R^{l_2} \to R^{d\times d_1}$, $h: N_0 \times R^d \times R^r \to R^r$ и измеримые по Борелю локально ограниченные функция $q: R_+ \times R^d \to R^{l_1}$, $p: R_+ \times R^d \to R^{l_2}$, такие, что отображения $f(t,x,h(t,x),q(t,x))$, $g(t,x,h(t,x),p(t,x))$ ограничены.

Рассмотрим стохастическую дифференциально-разностную гибридную систему вида

$$dx(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(k,\omega),u(t,\omega))dt + g(t,x(t,\omega),y(k,\omega),m(t,\omega))dW(t,\omega), t \in [k,k+1), \quad (1)$$

$$y(k,\omega) = h(k,x(k,\omega),y(k-1,\omega)), k = 0,1,\ldots, \quad (2)$$

$$u(t,\omega) = q(t,x(t,\omega)), \quad m(t,\omega) = p(t,x(t,\omega)), t \in R_+. \quad (3)$$

Гибридные системы, встречающиеся в приложениях, отличаются большим разнообразием. Выбор рассматриваемой в работе системы можно пояснить на примере функционирования умного дома. Систему (1) можно рассматривать как модель, описывающую динамику изменения характеристик состояния дома, управляемого с помощью постоянно действующих регуляторов в форме обратной связи (3) и дискретного регулятороа (2), который регулирует характеристики дома через постоянные промежутки времени и его работа зависит от текущего состояния дома и от предыдущих значений регулятора.

Пусть ν — вероятностная мера на $(R^d, \beta(R^d))$, $y_0 \in R^r$,

$$Q(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0,\delta>0} \overline{\mathrm{co}}[q(t,[x]_\varepsilon)]_\delta, \quad M(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0,\delta>0} \overline{\mathrm{co}}[p(t,[x]_\varepsilon)]_\delta.$$

Определение. Если существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x: \Omega \to C([0,+\infty), R^d)$ такой, что распределение $x(0,\omega)$ совпадает с ν;

2) существует d_1-мерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

3) существует дискретный $(\mathcal{F}_k)$-согласованный процесс $y(k,\omega)$, удовлетворяющий для каждого $k \in N_0$ равенству

$$y(k,\omega) = h(k,x(k,\omega),y(k-1,\omega)), \quad y(-1,\omega) = y_0,$$

существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $u: R_+ \times \Omega \to R^{l_1}$, $m: R_+ \times \Omega \to R^{l_2}$ такие, что для $(\mu \times P)$ почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$ выполняются включения

$$u(t,\omega) \in Q(t,x(t,\omega)), \quad m(t,\omega) \in M(t,x(t,\omega)),$$

4) с вероятностью 1 для каждого $k \in N$ при всех $t \in [k-1,k)$ выполняется равенство

$$x(t,\omega) = x(k-1,\omega) + \int_{k-1}^t f(t,x(t,\omega),y(k,\omega),u(t,\omega))\,ds + \int_{k-1}^t g(t,x(t,\omega),y(k,\omega),m(t,\omega))\,dW(s,\omega),$$

то набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, x(t,\omega), W(t,\omega), y(k,\omega), u(t,\omega), m(t,\omega))$ называем слабым решением системы (1)–(3) с начальным распределением ν и начальным условием y_0.

Теорема. *Если функции $f: R_+ \times R^d \times R^r \times R^{l_1} \to R^d$, $g: R_+ \times R^d \times R^r \times R^{l_2} \to R^{d\times d_1}$, $h: N \times R^d \times$ $\times R^r \to R^r$ непрерывны, функции $q: R_+ \times R^d \to R^{l_1}$, $p: R_+ \times R^d \to R^{l_2}$ измеримы по Борелю и локально ограничены такие, что отображения $f(t,x,h(t,x),q(t,x))$, $g(t,x,h(t,x),p(t,x))$ ограничены, то для любой вероятностной меры ν на $(R^d, \beta(R^d))$ с компактным носителем и любого $y_0 \in R^r$ система (1)–(3) имеет слабое решение с начальным распределением ν и начальным условием y_0.*

Для следующей гибридной стохастической дифференциально-разностной системы

$$dx_1(t,\omega) = \mathrm{arctg}\,(x_1(t,\omega) + x_2(t,\omega))dt + m^3(t,\omega)dW(t,\omega),$$

$$dx_2(t,\omega) = u(t,\omega)\sin(y(k,\omega)x_1(t,\omega))dt + m(t,\omega)dW(t,\omega),$$

$$y(k,\omega) = y^2(k-1,\omega) + x_1^3(t,\omega),$$

$$u(t,\omega) = \mathrm{sign}(x_1(t,\omega)),$$

$$m(t,\omega) = \mathrm{sign}(x_1^3(t,\omega)x_2(t,\omega))$$

выполнены все условия теоремы. Следовательно, для любой вероятностной меры ν на $(R^d, \beta(R^d))$ с компактным носителем и любого $y_0 \in R^r$ система имеет слабое решение с начальным распределением ν и начальным условием y_0.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ГЛАДКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий[1]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
ya.andrei173@yandex.by

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \tag{1_μ}$$

с матрицами $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\operatorname{diag}[1,-1], & 2k-2 \leqslant t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & 2k-1 \leqslant t < 2k, \end{cases}$ где $k \in \mathbb{N}$, вещественным параметром μ, числами $b_k \in \mathbb{R}$ и непрерывными функциями $d_k(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Е. Соретс и Т. Спенсер показали в работе [1], что старший характеристический показатель дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = -(K^2(\cos t + \cos(\omega t + \theta)) + E)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0$$

для любого иррационального $\omega \in \mathbb{R}$ и почти всех $\theta \in \mathbb{R}$ положителен на множестве значений $E \geqslant 0$, относительная мера Лебега которого стремится к единице при больших K.

Л.-С. Янг в работе [2], в частности, установила, что при больших значениях $d_k(\cdot) \equiv d > 0$ и $b_k = k\omega$, $k \in \mathbb{N}$, где $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ удовлетворяет некоторому, верному почти всюду, диофантовому условию, старший характеристический показатель системы (1_μ), в силу мультипликативной эргодической теоремы совпадающий для почти всех $\mu \in \mathbb{R}$, примерно равен d.

В работах [3–5] рассматривался случай, когда функции $d_k(\mu)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\cdot) \equiv d_k \geqslant d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. При этом в [3] при наложении ограничения $d_k \equiv d > 4\ln 2$ доказана положительность старшего показателя Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемого как функция параметра μ, на множестве положительной меры Лебега.

Результат статьи [4] влечёт за собой отсутствие равномерных по $\mu \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$ оценок сверху нормы решений системы (1_μ). А метод работы [5], существенно использующий равенство Парсеваля для тригонометрических сумм, позволяет доказать отсутствие равномерных по μ и субэкспоненциальных по t таких оценок. Доказательство утверждаемой там же положительности старшего показателя Ляпунова системы (1_μ) не свободно от ошибок.

Для любого натурального числа n обозначим через $\nu_2(n)$ максимальную степень, с которой 2 делит n. Таким образом, справедливо равенство $n = 2^{\nu_2(n)}p(n)$, где $p(n)$ нечётно.

Теорема. *Пусть* $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ *– произвольная последовательность вещественных чисел, последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *определяется равенством* $b_k = \alpha_{1+\nu_2(k)}, \quad k \in \mathbb{N}$, *а функция* $d_k(\cdot) \equiv d(\cdot) > 0$, $k \in \mathbb{N}$ *– дифференцируемая на* $\mathbb{R}$, π*-периодическая и такая, что выполнены неравенства* $\int_0^\pi d(\mu)\,d\mu > 2^{13}$, $|d'(\mu)| < 2^{-2}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Тогда старший характеристический показатель $\lambda_{\max}(A_\mu)$ *системы* (1_μ) *положителен для всех* μ *из некоторого множества* $\mathfrak{J}$ *положительной меры Лебега.*

В рассматриваемом случае матрица Коши $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (1_μ) удовлетворяет для любого $k \in \mathbb{N}$ равенству $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(\alpha_{k+1} - \alpha_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$, где через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ обозначена матрица поворота на угол $\varphi \in \mathbb{R}$ против часовой стрелки.

Системы с такими коэффициентами обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geqslant 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [6, 7] (см. также [8]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

В работе [9], когда b_k – такие, как в условиях теоремы, а $d_k(\cdot) \equiv d(\cdot)$ – произвольная непрерывная π-периодическая функция, доказано наличие такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива.

Вывод теоремы опирается на ряд следующих утверждений, в которых предполагаются выполненными её условия.

Обозначим через $[\cdot]$ целую часть числа. Для любых $\zeta, \mu \in \mathbb{R}$ обозначим $\mathfrak{g}_\zeta(0,\mu) = \zeta$. Определим функцию $\mathfrak{g}_\zeta(\cdot,\mu) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, полагая для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\mathfrak{g}_\zeta(2n+1,\mu) = \pi[\pi^{-1}\mathfrak{g}_\zeta(2n,\mu)] + \operatorname{arcctg} e^{2d(\mu)} \operatorname{ctg} \mathfrak{g}_\zeta(2n,\mu)$ в случае когда $\pi^{-1}\mathfrak{g}_\zeta(2n,\mu) \notin \mathbb{Z}$, и $\mathfrak{g}_\zeta(2n+1,\mu) = \mathfrak{g}_\zeta(2n,\mu)$ в противном случае. Пусть также $\mathfrak{g}_\zeta(2n+2,\mu) = \mu + b_{n+1} + \mathfrak{g}_\zeta(2n+1,\mu)$.

Лемма 1. *Для любых $\zeta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства $\mathfrak{g}_0(2n+1,\pi) - \mathfrak{g}_0(2n+1,0) = \mathfrak{g}_0(2n,\pi) - \mathfrak{g}_0(2n,0) = n\pi$, функция $\mathfrak{g}_\zeta(n,\mu)$ дифференцируема по μ на $\mathbb{R}$, и для любого $\mu \in \mathbb{R}$ в случае $n > 1$ выполняется оценка $(\mathfrak{g}_\zeta(n,\mu))'_\mu > \frac{1}{2}e^{-2d(\mu)}$. Кроме того, решение $x_\zeta(t,\mu)$ системы (1_μ) с начальным условием $x_\zeta(0,\mu) = U(\zeta)e_1$, где $e_1 = (1,0)^T$, удовлетворяет равенству $x_\zeta(n,\mu) = \|x_\zeta(n,\mu)\| U(\mathfrak{g}_\zeta(n,\mu))e_1$ ($\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^2$).*

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k = \eta_k(\mu) \geqslant 1$ и $\psi_k = \psi_k(\mu)$ следующим образом. Положим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) \equiv 0$, $\xi_k = \xi_k(\mu) = 2\psi_k(\mu) + \alpha_k + \mu$, $q_k(\mu) = \pi[\pi^{-1}\xi_k(\mu)]$. Найдутся единственные $0 < \eta_{k+1} = \eta_{k+1}(\mu) \in \mathbb{R}$ и $\varphi_k = \varphi_k(\mu) \in [q_k(\mu), q_k(\mu)+\pi)$, такие что выполнены равенства $\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))\cos\xi_k$, $\operatorname{ctg}\varphi_k = \sqrt{2}(\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k$, если $\sin\xi_k \neq 0$; $\varphi_k = \xi_k$ в случае, когда $\sin\xi_k = 0$. Наконец, полагаем $\psi_{k+1}(\mu) = \psi_k(\mu) + 2^{-1}\varphi_k(\mu)$.

Лемма 2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ функции $\eta_n(\cdot)$ и $\psi_n(\cdot)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$; при всех $\mu \in \mathbb{R}$ имеет место представление $X_{A_\mu}(2^n-1,0) = U(\psi_n(\mu))\begin{pmatrix} \eta_n(\mu) & 0 \\ 0 & \eta_n(\mu)^{-1} \end{pmatrix} U(\psi_n(\mu))$, справедливы равенство $\psi_n(\pi+\mu) - \psi_n(\mu) = \pi(2^{n-2} - 2^{-1})$ и, в случае $n \neq 1$, оценка $\psi'_n(\mu) > 0$.*

Лемма 3. *Пусть функция $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируема, удовлетворяет неравенству $f(\pi) - f(0) \geqslant \pi$ и, при всех $\mu \in \mathbb{R}$, условию $f'(\mu) \geqslant r > 0$. Тогда определён интеграл $\int_0^\pi ln|\cos f(\mu)|\,d\mu$ и верна оценка $\int_0^\pi ln|\cos f(\mu)|\,d\mu \geqslant -\pi - \dfrac{2^5}{r} ln(e(f(\pi) - f(0)))$.*

Литература

1. Sorets E., Spencer T. *Positive Lyapunov exponents for Schrodinger operators with quasi-periodic potentials* // Commun. Math. Phys. 1991. Vol. 141. P. 543–566.

2. Young L. *Lyapunov exponents for some quasi-periodic cocycles* // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1997. Vol. 17. P. 483–504.

3. Липницкий А. В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

4. Липницкий А. В. *Оценки снизу нормы решений линейных дифференциальных систем с линейным параметром* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 412–416.

5. Липницкий А. В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 3. С. 270–277.

6. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.

7. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.

8. Липницкий А. В. *О решении В. М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

9. Липницкий А. В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 4. С. 470–476.

ПРИЗНАК ПОЧТИ ПРИВОДИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ КЛАССА МИЛЛИОНЩИКОВА

Е.К. Макаров[1]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A вида

$$A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(t), \tag{2}$$

где A_k, $k = 0,\dots,+\infty$, — периодические матрицы с периодами T_k. Если каждая матрица A_k всюду непрерывна и ряд (2) сходится равномерно по t, то матрица A является предельно периодической [1, p. 32] и, следовательно, почти периодической. Задача о правильности по Ляпунову линейных систем с почти периодическими коэффициентами была поставлена Н.П. Еругиным на математическом семинаре в Физико-математическом институте АН БССР в 1956 году. Формулировка этой задачи была опубликована в [2, с. 121, 137].

В [3] В.М. Миллионщиков доказал существование неправильной по Ляпунову линейной системы с предельно периодическими коэффициентами. Для этого им был введен некоторый специальный класс линейных систем. Обширное исследование систем из этого класса было проведено А.В. Липницким в работах [4, 5] и др. В частности, в [4] построен явный пример неправильной по Ляпунову системы из класса Миллионщикова.

Хорошо известно, что множество правильных по Ляпунову (и, тем более, почти приводимых, определение почти приводимости см. в [6]) систем с почти периодическими коэффициентами велико в некотором естественном смысле. Однако эффективные инструменты для распознавания этих свойств в классе почти периодических систем пока не созданы.

В настоящем докладе приводятся некоторые частные достаточные условия почти приводимости для линейных систем из класса Миллионщикова. Эти условия не являются коэффициентными, но могут быть полезны при построении предельно периодических систем с предписанными асимптотическими свойствами.

Далее мы предполагаем, что $T_0 = 2$, $T_k \in \mathbb{N}$ и $T_{k+1}/T_k = m \in \mathbb{N}$ для всех $k = 0,\dots,+\infty$. Мы также предполагаем, что $m_k > 1$, $k = 0,\dots,+\infty$. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем некоторую непрерывную функцию $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ такую, что $\omega(0) = \omega(1) = 0$ и $\int\limits_0^1 \omega(t)dt = 1$. Возьмем также произвольную последовательность $\varphi : \mathbb{N} \to [0,\pi/2[$. Элементы последовательности φ обозначим через φ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Определим матрицы A_k следующими равенствами:

$$A_0(t) = \begin{cases} \omega(t)D, & \text{для } t \in [0,1]; \\ \\ 0, & \text{для } t \in [1,2[; \end{cases} \tag{3}$$

для $k = 0$ и

$$A_k(t) = \begin{cases} -\varphi_k \omega(t) J, & \text{для } t \in [0,1[; \\ \\ 0, & \text{для } t \in [1, T_i[; \end{cases} \tag{4}$$

для всех $k = 1, \ldots, +\infty$.

Лемма. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k < +\infty,$$

то система (1) *с матрицей коэффициентов* A*, определяемой равенствами* (2),(3) *и* (4) *, является предельно периодической.*

Пусть

$$S_m(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t), \quad m = 1, \ldots, +\infty,$$

где A_k определяются равенствами (3) и (4) . Легко видеть, что каждая матрица S_m является T_m-периодической. Теперь для произвольного $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим периодическую линейную систему

$$\dot{z} = S_m(t) z, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Обозначим матрицу Коши системы (5) через Z_m. Тогда матрица $Z_m(T_m, 0)$ является матрицей монодромии системы (5), а ее собственные значения являются мультипликаторами системы (5).

Определение. Будем говорить, что система (1) с матрицей коэффициентов A, определяемой равенствами (2), (3) и (4), имеет вещественный тип, если при каждом $m \in \mathbb{N}$ мультипликаторы соответствующей системы (5) вещественны.

Теорема. *Пусть система* (1) *с матрицей коэффициентов* A *определяемой равенствами* (2), (3) *и* (4) *имеет вещественный тип, и* β_m *— угол между собственными подпространствами матрицы монодромии* $Z_m(T_m, 0)$*. Тогда, если последовательность* $\sin \beta_m$*,* $m \in \mathbb{N}$*, отделена от нуля, то система* (1) *почти приводима.*

Литература

1. Besicovitch A. S. *Almost periodic functions*. New York: Dover Publications, 1955.

2. Еругин Н. П. *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами*. Минск: Изд-во АН БССР, 1963.

3. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.

4. Липницкий А. В. *О решении В. М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

5. Липницкий А. В. *О полунепрерывности сверху старшего показателя Ляпунова линейных дифференциальных систем Миллионщикова с аффинным параметром* // Дифференц. уравнения. Т. 56, № 1. С. 62–69.

6. Былов Б. Ф. *Почти приводимые системы дифференциальных уравнений* // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, № 3. С. 333–359.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования ‘Белорусско-Российский университет‘,
проспект Мира, 43, 212000 Могилев, Беларусь,
imi.makzi@gmail.com

Исследуется краевая задача типа [1,2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda XQ(t)X + F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n}), F \in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что $Q(t) \not\equiv 0$, матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5 и др.]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением, обобщением и развитием [1, 2, 7]. Задача (1), (2) рассматривается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [8, с.21],

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \leqslant t \leq \omega, \|X\| \leqslant \rho\}, M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t \|A(t)\|, \beta = \max_t \|B(t)\|, \delta = \max_t \|Q(t)\|, h = \max_t \|F(t,0)\|, \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega+2]\rho, q_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2 + \gamma\omega L[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2, \varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho + [1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L\rho+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho-\varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \varepsilon_2 = \frac{1-q_2(\rho)}{q_1(\rho)}, \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde\rho, t \in I, L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M,N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leqslant \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) = \Phi^{-1}\Big\{\int_0^\omega A(\tau)d\tau\int_\tau^t[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + \lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)+$$

$$+F(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma + \int_0^\omega\Big(\int_\tau^t[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma)+$$

$$+\lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + F(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big)B(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}[\lambda X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)+F(\tau,X_k(\tau,\lambda))]d\tau\Big\},\ k=1,2,\ldots, \quad (3)$$

где $X_0=0,\ X_1=-\Phi^{-1}\int\limits_0^{\omega}F(\tau,0)d\tau.$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X-X_{k+1}\|_{\mathbb{C}}\leqslant\frac{q\|X_{k+1}-X_k\|_{\mathbb{C}}+q_2\|X_k-X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\ k=1,2,\ldots \quad (4)$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками:

$$\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}\leqslant\gamma\omega h;$$

$$\|X_2-X_1\|_{\mathbb{C}}\leqslant\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho+h]+\gamma\omega(\varepsilon\delta\rho^2+L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Замечание. В [7] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен для реализации тем, что при построоении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая О. А. *Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати* // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43-50.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. *Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 937-946.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300с.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати*. Могилев: БРУ, 2012. 167 с.

5. Лаптинский В. Н. *О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems—existence and uniqueness* // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. Vol. 167, Is. 2. P. 505-515.

7. Маковецкая О. А. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения - 2019”, Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М. : Наука, 1967. 472 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования ‘Белорусско-Российский университет‘, проспект Мира, 43, 212000 Могилев, Беларусь,
imi.makzi@gmail.com

Рассматривается краевая задача для матричного уравнения типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+XB(t)+F(t,X) \quad (1)$$

с интегральным условием

$$\int_0^{\omega}[\Phi_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\Phi_2(\tau)]d\tau=0, \quad (2)$$

где $A, B, \Phi_1, \Phi_2 \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$; предполагатся, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица (локально); $F(t, 0) \not\equiv 0$, $\omega > 0$.

Исследуются вопросы существования, единственности и построения решения этой задачи в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho\}, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \beta = \max_{t\in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t\in I} \|F(t, 0)\|, \delta_i = \max_{t\in I} \|\Phi_i(t)\| (i = 1, 2), b = \max_{0\leqslant\tau\leq t\leqslant\omega} \|U^{-1}(\tau)U(t)\|,$$

$$q = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)(\beta + L)b^2\omega^2, p = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)b^2\omega^2 h,$$

$$\tilde\Phi Z = (\tilde\Phi_1 + \tilde\Phi_2)Z, Z \in \mathbb{Z}^{n\times n},$$

$L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\tilde\Phi_1 Z = \int_0^\omega \Phi_1(\tau)U(\tau)d\tau Z(t)$, $\tilde\Phi_2 Z = \int_0^\omega U(\tau)Z(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau$; $U(t), U(0) = E$, – интегральная матрица уравнения $dU/dt = A(t)U$; E – единичная матрица.

С помощью метода регуляризации [3] в случае однозначной обратимости оператора $\tilde\Phi$ задача (1), (2) сведена к эквивалентному матричному интегральному уравнению

$$X(t) = U(t)\tilde\Phi^{-1}\Big\{\int_0^\omega \Phi_1(\tau)U(\tau)\Big(\int_\tau^t U^{-1}(\sigma)(X(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma)))d\sigma\Big)d\tau +$$
$$+\int_0^\omega U(\tau)\Big(\int_\tau^t U^{-1}(\sigma)(X(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma)))d\sigma\Big)\Phi_2(\tau)d\tau\Big\}. \quad (3)$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: оператор $\tilde\Phi$ однозначно обратим, $q < 1$, $p/(1-q) \leqslant \rho$. Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \leqslant \frac{p}{1-q}.$$

Это решение представимо как предел равномерно по $t \in I$ сходящейся к решению уравнения (3) последовательности матричных функций $\{X_k(t)\}|_0^\infty$, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_{k+1}(t) = U(t)\tilde\Phi^{-1}\Big\{\int_0^\omega \Phi_1(\tau)U(\tau)\Big(\int_\tau^t U^{-1}(\sigma)(X_k(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma)))d\sigma\Big)d\tau +$$
$$+\int_0^\omega U(\tau)\Big(\int_\tau^t U^{-1}(\sigma)(X_k(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma)))d\sigma\Big)\Phi_2(\tau)d\tau\Big\}, \ k = 0, 1, 2, ..., \quad (4)$$

где $X_0(t) \in D_\rho$ – произвольная функция класса $C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (4).

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — existence and uniqueness* // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 167, No 2. P. 505–515.

2. Murty K. N., Howell G. W., Sarma G. V. R. L. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness* // Mathematical Problems in Engineering. 2000. Vol. 6. Art. 805903.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1998.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Мироненко[1]

[1]Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
Советская, 104, 246028 Гомель, Беларусь,
vladimir.v.mironenko@gmail.com

Теорема. *Пусть для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=\frac{P(x,y)}{(a_0+2ax+by)Q(x,y)}, \\ \frac{dy}{dt}=\frac{M(x,y)}{(b_0+bx+2cy)N(x,y)} \end{array} \qquad (1)$$

выполнены условия:

1) функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $M(x,y)$ и $N(x,y)$ представимы в окрестности точки $(0;0)$ сходящимися степенными рядами;

2) имеет место соотношение

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}+\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\sum_{n=1}^{\infty} r_n U^n(x,y),$$

где

$$U(x,y)=a_0x+b_0y+ax^2+bxy+cy^2,$$

а a_0,b_0,a,b,c,r_n — действительные числа;

3) точка $(0;0)$ является изолированной особой точкой дифференциальной системы (1).

Тогда особая точка $(0;0)$ является центром.

Доказательство основано на том, что функция $U(x,y)$, указанная в первом условии теоремы, является обобщенным первым интегралом дифференциальной системы (1) (см [1]).

Литература

1. Мироненко В. И., Мироненко В. В. *Отражающая функция и обобщение понятия первого интеграла* // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 1. С. 12–22.

ОТРАЖАЮЩАЯ МАТРИЦА И ТЕОРЕМА ФЛОКЕ

В.И. Мироненко[1]

[1]Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
Советская, 104, 246028 Гомель, Беларусь,
vmironenko@tut.by

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x=P_{ev}(t)x+P_{od}(t)x, \qquad (1)$$

где

$$P_{ev}(t):=\frac{P(t)+P(-t)}{2},\ \ P_{od}(t):=\frac{P(t)-P(-t)}{2}.$$

При этом матрица $P(t)$ предполагается непрерывной на R и $2\omega-$периодической.

Дифференцируемая матрица $F(t)$ является отражающей матрицей (ОМ) системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши [1]

$$\frac{dF}{dt}+FP(t)+P(-t)F=0,\ \ F(0)=E.$$

(Здесь и далее E — единичная $n\times n$ матрица.)

Если $F(t)$ — ОМ дифференциальной системы (1), то для любого решения $x(t)$ этой системы справедливо тождество $F(t)x(t) \equiv x(-t)$. Поэтому отображение Пуанкаре $\Pi : x(-\omega) \mapsto x(\omega)$ задается формулой $\Pi(\omega) = F(-\omega)x$. Знание отображения Пуанкаре позволяет из уравнения $F(-\omega)x = x$ найти начальные данные всех $2\omega-$периодических решений системы (1) и установить характер их устойчивости.

Наряду с системой (1) рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dz}{dt} = P_{od}(t)z.$$

Ее фундаментальная матрица $\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$, согласно [1, с. 13], является четной, 2ω-периодической и, конечно, удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \equiv P_{od}(t)\Phi(t).$$

Рассмотрим также дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = \Phi^{-1}(t)P_{ev}\Phi(t)y. \tag{2}$$

Задача Коши для ее ОМ $G(t)$ имеет вид

$$\frac{dG}{dt} + G(\Phi^{-1}(t)P_{ev}(t)\Phi(t)) + (\Phi^{-1}(t)P_{ev}(t)\Phi(t))G = 0, \;\; G(0) = E.$$

Теорема. *Пусть $G(t)$ — ОМ системы (2). Тогда ОМ $F(t)$ системы (1) имеет вид $F(t) \equiv \equiv \Phi(t)G(t)\Phi^{-1}(t)$, а ее отображение Пуанкаре $F(-\omega) \equiv \Phi(\omega)G(-\omega)\Phi^{-1}(\omega)$ подобно отображению $G(-\omega)$ системы (2).*

Следствие 1. *Множество 2ω-периодических решений системы (1) эквивалентно множеству 2ω-периодических решений системы (2) таким образом, что характеры устойчивости соответствующих решений совпадают.*

Следствие 2. *Пусть нами найдены постоянная матрица C и непрерывная кусочно-дифференцируемая четная матрица $\Phi(t)$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\begin{aligned} &P_{ev}(t)\Phi(t) \equiv \Phi(t)C, \\ &\left[\tfrac{dP_{ev}}{dt} + P_{ev}P_{od} - P_{od}P_{ev}\right]\Phi \equiv 0. \end{aligned}$$

Тогда ОМ системы (1) задается формулой $F(t) = \Phi(t)e^{-2Ct}\Phi^{-1}(t)$, а ее отображение за период 2ω — формулой $\Pi(x) = F(-\omega)x$.

Для того, чтобы прийти к такому результату, требовалась изначальная уверенность в его достижимости. Эту уверенность дают теорема Флоке [2, с. 183] и теорема Лаппо-Данилевского [2, с. 117]

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.

2. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРЕХМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СО СКРЫТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Э.В. Мусафиров[1], **А.А. Гринь**[1], **А.Ф. Проневич**[1]

[1]Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, ул. Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь,
{musafirov_ev,grin,pranevich}@grsu.by

Введение. Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым была предложена классификация аттракторов динамических систем, согласно которой "аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся"[1]. В частности, аттрактор является скрытым у системы, не имеющей состояний равновесия или имеющей только устойчивые состояния равновесия.

Вещественная автономная двумерная система имеет замкнутую траекторию только если у нее существует хотя бы одно состояние равновесия [2, с. 124]. В отличии от двумерных трехмерные системы не обладают указанным свойством. В.И. Булгаков привел пример (см. [3]) такой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xz + ay, \\ \dot{y} &= 2yz - ax, \\ \dot{z} &= z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — параметры системы. В этой системе при $-2 < b < 0$ имеется предельный цикл, но отсутствуют состояния равновесия (в этом случае предельный цикл является скрытым аттрактором и система демонстрирует скрытые колебания).

Отражающая функция Мироненко (ОФМ) [4] связывает прошлое состояние системы дифференциальных уравнений с её будущим состоянием в симметричный момент времени. Все системы с одинаковой ОФМ имеют один и тот же оператор сдвига [5, с. 11–13] на любом интервале $(-\alpha, \alpha)$, а, следовательно, все 2ω-периодические системы с одинаковой ОФМ имеют одно и то же отображение за период $[-\omega, \omega]$. Это определяет одинаковые начальные данные и характер устойчивости по Ляпунову периодических решений систем с совпадающими ОФМ. Однако, как показано в работах [6–9], для решений систем с одинаковой ОФМ могут быть одинаковыми и другие качественные свойства (устойчивость по Липшицу, глобальная экспоненциальная устойчивость, наличие странных и хаотических аттракторов). Поэтому для хорошо изученных систем целесообразно искать возмущения, не изменяющие ОФМ (так называемые допустимые возмущения).

Основной результат. Для автономной системы (1) неавтономные допустимые возмущения искались с помощью теоремы 1 из [10] в виде $\alpha_i(t)\Delta_i(x,y,z)$, где $\Delta_i(x,y,z)$ — вектор-функции, компоненты которых — полиномы. То есть поиск допустимых возмущений осуществлялся методом неопределенных коэффициентов, используя тождество

$$\frac{\partial \Delta_i(x,y,z)}{\partial (x,y,z)} X(x,y,z) \equiv \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial (x,y,z)} \Delta_i(x,y,z),$$

где $X(x,y,z)$ — правая часть системы (1).

В частности, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\alpha_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда:*

1. *$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2xz + ay)(1 + \alpha_1(t)) + 2xz\alpha_2(t), \\ \dot{y} &= (2yz - ax)(1 + \alpha_1(t)) + 2yz\alpha_2(t), \\ \dot{z} &= \left(z^2 + bz + 1 - x^2 - y^2\right)(1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)); \end{aligned} \tag{2}$$

2. *при $a = b = 0$ ОФМ системы (1) совпадает с ОФМ системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xz(1 + \alpha_1(t)) + 2xy\alpha_2(t) - \left(1 - x^2 + y^2 + z^2\right)\alpha_3(t), \\ \dot{y} &= 2yz(1 + \alpha_1(t)) - \left(1 + x^2 - y^2 + z^2\right)\alpha_2(t) + 2xy\alpha_3(t), \\ \dot{z} &= \left(1 - x^2 - y^2 + z^2\right)(1 + \alpha_1(t)) + 2yz\alpha_2(t) + 2xz\alpha_3(t). \end{aligned}$$

Для полученных возмущенных неавтономных систем изучена устойчивость по Ляпунову стационарных решений, доказано существование предельного цикла и периодических решений, а также изучен характер их устойчивости по Ляпунову. Показано, что возмущенная неавтономная система (2), как и исходная автономная система (1), при определенных значениях параметров проявляет скрытые колебания (имеет предельный цикл, но не имеет стационарных решений).

Литература

1. Кузнецов Н. В. *Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления* // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 5–27.

2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем*. М.: Наука, 1976.

3. Булгаков В. И. *О фазовом портрете автономной системы третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 10. С. 1821–1822.

4. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем*. Гомель: ГГУ, 2004.

5. Красносельский М. А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1966.

6. Musafirov E. V. *Admissible perturbations of the Lorenz-84 climate model* // International journal of bifurcation and chaos. 2019. Vol. 29, No 6. Art. 1950080.

7. Musafirov E., Grin A., Pranevich A. *Admissible perturbations of a generalized Langford system* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32, No 03. Art. 2250038.

8. Musafirov E. *Admissible perturbations of the three-dimensional Hindmarsh – Rose neuron model* // Journal of Applied Analysis and Computation. 2023. Vol. 13, No 4. P. 1668–1678.

9. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения системы Лэнгфорда* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.

10. Мироненко В. В. *Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий*. Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1325–1332.

КРАТНОСТЬ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

П.Б. Павлючик[1], **А.Ф. Проневич**[1]

[1]Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь,
{p.pavlyuchik, pranevich}@grsu.by

Рассмотрим неавтономную полиномиальную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t,x)\,dt_j, \quad i=1,\dots,n, \quad t\in\mathbb{R}^m,\ x\in\mathbb{R}^n,\ m\leqslant n, \tag{1}$$

где $P_{ij}\colon T\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$, суть полиномы по зависимым переменным $x_1,\dots,x_n$ с голоморфными по независимым переменным $t_1,\dots,t_m$ на области $T\subset\mathbb{R}^m$ коэффициентами. При $m=1$ дифференциальная система (1) является неавтономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой n-го порядка. Цель данной работы – выделить классы неавтономных полиномиальных систем в полных дифференциалах (1), у которых первые интегралы находятся по *кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам*. Статья продолжает исследования авторов [1–3] по изучению аналитической структуры первых интегралов систем в полных дифференциалах (1) в зависимости от неавтономных полиномиальных частных интегралов.

Следуя [4, с. 173], комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}$ системы (1) будем называть *кратным* с *кратностью* $\mathfrak{z}=1+\sum\limits_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}}\mathfrak{f}_\zeta$, если существуют функции $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}$ и $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta j}$, $\mathfrak{h}_\zeta\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_\zeta=$ $=1,\dots,\mathfrak{f}_\zeta$, $\zeta=1,\dots,\mathfrak{e}$, $j=1,\dots,m$, являющиеся полиномами по $x_1,\dots,x_n$ с комплекснозначными голоморфными по $t_1,\dots,t_m$ на области T коэффициентами, такие, что

$$\mathfrak{A}_j\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(t,x)=\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta j}(t,x), \quad \mathfrak{h}_\zeta\in\mathbb{N},\ \ \mathfrak{g}_\zeta=1,\dots,\mathfrak{f}_\zeta,\ \ \zeta=1,\dots,\mathfrak{e},\ \ j=1,\dots,m, \tag{2}$$

где функции $\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(t,x)=\dfrac{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta\mathfrak{g}_\zeta}(t,x)}{\mathfrak{w}^{\mathfrak{h}_\zeta}(t,x)}$, а операторы $\mathfrak{A}_j(t,x)=\partial_{t_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}P_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i}$. Отметим, что альтернативная точка зрения на понятие «кратность частного интеграла» для автономных обыкновенных дифференциальных систем была предложена в работах J. Llibre и X. Zhang [5; 6].

Так, например, для дифференциальной системы (1) имеют место следующие утверждения [3].

Теорема 1. *Пусть система* (1) *имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл* $\mathfrak{w}$ *на области* $\Theta' = T' \times \mathbb{R}^n$, $T' \subset T$, *кратности* $\mathfrak{z} = 1 + \sum\limits_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_\zeta$ *и существует такое* $\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{e}\}$, *что в тождествах* (2) *при фиксированном* $\mathfrak{g}_\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{f}_\zeta\}$ *у функций* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = 1,\ldots$ $\ldots, m$, *мнимые части* $\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(t,x) = \lambda_j(t_j)\ \ \forall (t,x) \in \Theta'$, $j = 1,\ldots,m$. *Тогда функция*

$$F\colon (t,x) \to \operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(t,x) - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_j^0}^{t_j} \lambda_j(t_j)\,dt_j \quad \forall (t,x) \in \Theta_0' = T_0' \times X \subset \Theta',$$

где $\overset{0}{t_j}$ *– произвольная фиксированная точка из естественной проекции области* T_0' *на координатную прямую* Ot_j, $j = 1,\ldots,m$, *будет первым интегралом на области* Θ_0' *системы* (1).

Теорема 2. *Если система* (1) *имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл* $\mathfrak{w}$ *на области* Θ' *кратности* $\mathfrak{z} = 1 + \sum\limits_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_\zeta$ *и существует такое* $\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{e}\}$, *что в тождествах* (2) *при фиксированном* $\mathfrak{g}_\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{f}_\zeta\}$ *у функций* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = 1,\ldots,m$, *вещественные части* $\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(t,x) = \lambda_j\ \ \forall (t,x) \in \Theta'$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, *то функция*

$$F\colon (t,x) \to \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(t,x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j t_j \quad \forall (t,x) \in \Theta_0' \subset \Theta'$$

будет первым интегралом на области Θ_0' *системы уравнений в полных дифференциалах* (1).

Неавтономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (x_1^2 - 2\cos t_1\, x_1x_2 - x_2^2)\,dt_1 + (3x_1^2 + 2t_2x_1x_2 - 3x_2^2)\,dt_2,\\
dx_2 &= \big(2x_1x_2 + \cos t_1(x_1^2 - x_2^2)\big)\,dt_1 + \big(6x_1x_2 - t_2(x_1^2 - x_2^2)\big)\,dt_2,\\
dx_3 &= \frac{1}{t_1}\,\big(\sin t_2\, x_1^2(t_1x_3+1)^2 - x_3\big)\,dt_1 + \cos t_1(x_2 - x_4)(t_1x_3+1)^2\,dt_2,\\
dx_4 &= \sin t_2\, x_1^2(t_1x_3+1)(x_4+2)\,dt_1 + t_1\cos t_1(x_2 - x_4)(t_1x_3+1)(x_4+2)\,dt_2
\end{aligned} \tag{3}$$

имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon (t,x) \to x_1 + ix_2$ такой, что

$$\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{w}(t,x) = (1 + i\cos t_1)\,\mathfrak{w}^2(t,x), \quad \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{w}(t,x) = (3 - it_2)\,\mathfrak{w}^2(t,x) \quad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^4,$$

$$\mathfrak{A}_1\,\frac{1}{\mathfrak{w}(t,x)} = -1 - i\cos t_1, \quad \mathfrak{A}_2\,\frac{1}{\mathfrak{w}(t,x)} = -3 + it_2 \quad \forall (t,x) \in \Theta \subset \{(t,x)\colon t_1(x_1^2 + x_2^2) \neq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ – операторы дифференцирования в силу системы (3). По теоремам 1 и 2, строим первые интегралы на области Θ системы уравнений в полных дифференциалах (3):

$$F_1\colon (t,x) \to \operatorname{Im}\frac{1}{x_1 + ix_2} + \int\limits_{\Theta}^{t_1} \cos t_1\,dt_1 - \int\limits_{0}^{t_2} t_2\,dt_2 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \sin t_1 - \frac{t_2^2}{2} \quad \forall (t,x) \in \Theta$$

$$F_2\colon (t,x) \to \operatorname{Re}\frac{1}{x_1 + ix_2} + t_1 + 3t_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + t_1 + 3t_2 \quad \forall (t,x) \in \Theta.$$

Литература

1. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф., Павлючик П. Б. *Кратность полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 1. С. 15–25.

2. Горбузов В. Н., Павлючик П. Б., Проневич А. Ф. *Комплекснозначные полиномиальные частные интегралы неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11, № 1. С. 56–66.

3. Горбузов В. Н., Павлючик П. Б., Проневич А. Ф. *Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2023. Т. 13, № 3. С. 33–48.

4. Горбузов В. Н. *Интегралы дифференциальных систем*. Гродно: ГрГУ, 2006.

5. Llibre J., Zhang X. *Darboux theory of integrability in $\mathbb{C}^n$ taking into account the multiplicity* // Differential Equations. 2009. Vol. 246. P. 541–551.

6. Llibre J., Zhang X. *Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in $\mathbb{R}^n$ taking into account the multiplicity at infinity* // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2009. Vol. 133, Issue 7. P. 765–778.

О ЗАДАЧАХ НАЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

С.Н. Попова[1], Э.А. Фахразиева[2]

[1]Удмуртский государственный университет, Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия, udsu.popova.sn@gmail.com,
[2]Удмуртский государственный университет, Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия, elmiraf12@mail.ru

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k), \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0,1,2,\dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, функция $A_{11}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функции $A_{j2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$ $(j=1,2)$ и $A_{21}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ограничены. Положим $n \doteq n_1 + n_2$. Систему (1) отождествим с матрицей $A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим $\mathcal{M}_n$. Метрика в этом множестве — равномерная на $[0,+\infty)$.

Под решением системы (1) понимаем функцию $z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$.

Пусть $X(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$. Положим

$$X_A(k+1,k) = \begin{pmatrix} X(k+1,k) & \int\limits_k^{k+1} X(k+1,s)\,ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$X_A(k,l) = X_A(k,k-1)X_A(k-1,k-2)\dots X_A(l+1,l), \quad k,l \in \mathbb{N}_0,\ k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (1) имеет место равенство $z(k) = X_A(k,l)z(l)$, $k,l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Будем называть матрицу $X_A(k,l)$, $k,l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$, *матрицей (оператором) Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени. Обозначим через $\mathcal{M}_n^0$ подмножество множества $\mathcal{M}_n$, состоящее из систем вида (1), для которых последовательность $\big(X_A(k+1,k)\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ вполне ограничена [1].

Определение 1. *Показателями Ляпунова* системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ будем называть величины $\lambda_i(A) \doteq \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \overline{\lim}_{k\to\infty} k^{-1} \ln \| X_A|_F(k,0)\|$, $i = 1,\dots,n$, где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A|_F$ — сужение оператора Коши системы $A(\cdot)$ на подпространство $F \subset \mathbb{R}^n$. *Полным спектром* показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ назовем набор $\lambda(A) \doteq \big(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)\big)$.

Заметим, что $\lambda_1(C) \leqslant \lambda_2(C) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(C)$ для любой системы $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ всех упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Метрику во множестве $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ полагаем индуцированной нормой пространства $\mathbb{R}^n$. Итак, имеем отображение $C \mapsto \lambda(C)$, определенное на $\mathcal{M}^0_n$ и действующее в $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Определение 2. Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}^0_n$ называется *устойчивым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ непрерывно в точке $C \equiv A$.

Определения 1 и 2 — это непосредственный перенос на гибридные системы соответствующих определений, известных как для систем с непрерывным временем [2–4], так и для систем с дискретным временем (см., например, [5]).

Рассмотрим также линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{cases} \tag{2}$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функция $B_{11}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; управление $u\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции $B_{j2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ $(j = 1, 2)$ и $B_{21}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ ограничены; управление $v\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{m_2}$ произвольно.

Определение 3 (см. [6]). Система (2) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $L > 0$, что для каждого $\ell \in \mathbb{N}_0$ и любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u\colon [\ell, \ell+\vartheta) \to \mathbb{R}^{m_1}$, $v\colon [\ell, \ell+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $\big(x(\cdot), y(\cdot)\big)$ системы (2) с начальными условиями $x(\ell) = x_0$, $y(\ell) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(\ell+\vartheta) = x_1$, $y(\ell+\vartheta) = y_1$, при этом $\sup\limits_{t \in [\ell, \ell+\vartheta)} \|u(t)\| \leqslant L \max\big\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\big\}$, $\max\limits_{k \in [\ell, \ell+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| \leqslant L \max\big\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\big\}$.

Замкнем систему (2) линейной обратной связью $u(t) = U(t)x(t)$, $v(k) = V(k)y(k)$, где функция $U\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция $V\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ ограничена. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \big(A_{11}(t) + B_{11}(t)U(t)\big)x(t) + \big(A_{12}(k) + B_{12}(k)V(k)\big)y(k), \\ y(k+1) = \big(A_{21}(k) + B_{21}(k)U(k)\big)x(k) + \big(A_{22}(k) + B_{22}(k)V(k)\big)y(k). \end{cases} \tag{3}$$

Если $A(\cdot) \in \mathcal{M}^0_n$, то эта система принадлежит множеству $\mathcal{M}^0_n$ при достаточно малых $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|U(t)\|$, $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \|V(k)\|$, поэтому для нее определен полный спектр показателей Ляпунова, который условно обозначим как $\lambda(A + BW)$. Здесь $W(t) \doteq \big(U(t), V(k)\big)$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Функцию $W(\cdot)$ называем *допустимым матричным управлением*, если для $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ выполнены описанные выше условия.

Определение 4. Пусть $A(\cdot) \in \mathcal{M}^0_n$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (3) называется *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие $\delta > 0$ и $\ell > 0$, что для каждого набора чисел $\mu \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ найдется допустимое матричное управление $W(\cdot)$ такое, что $\lambda(A + BW) = \mu$, при этом $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|W(t)\| \leqslant \ell \|\mu - \lambda(A)\|$.

Теорема. *Если система $A(\cdot) \in \mathcal{M}^0_n$ обладает устойчивым полным спектром показателей Ляпунова, а система (2) равномерно вполне управляема, то полный спектр системы (3) пропорционально локально управляем.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.

2. Ляпунов А. М. *Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения.* М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

3. Миллионщиков В. М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I* // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.

4. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: Издательство БГУ, 2006.

5. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems* // SIAM J. Control. Optim. 2019. Vol. 57, No 2. P. 1355–1377.

6. Попова С. Н., Фахразиева Э. А. *Равномерная локальная достижимость линейных управляемых гибридных систем* // «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024). Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. С. 253–256.

О БЭРОВСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СЛАБЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ КОРНЕЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Похачевский[1]

[1]Московский государственный университет, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Россия, pokhachevskiy@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемыми функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (которые мы отождествляем с задаваемыми ими системами) и метрикой

$$\rho(A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1}\}, \quad A, B \in \mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Определение. [1,2] *Верхним и нижним слабыми показателями колеблемости корней* ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}^+{}_\circ(x) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^+((x,m),t), \quad \check{\nu}^+{}_\circ(x) = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^+((x,m),t),$$

где $\nu^+(y,t)$ – количество корней (т.е. нулей с учётом кратности) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(0,t]$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, а звёздочка снизу обозначает выкалывание нуля.

Отметим, что введённые выше величины являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которую мы наделяем стандартным порядком и порядковой топологией.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – какие-либо классы подмножеств метрического пространства M. Будем говорить [3, с. 223–224], что функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathfrak{M},^*)$ (классу $(^*,\mathfrak{N})$), если для всякого $r \in \mathbb{R}$ справедливо включение $f^{-1}((r,+\infty]) \in \mathfrak{M}$ (соответственно, включение $f^{-1}([r,+\infty]) \in \mathfrak{N}$). Напомним, что через F_σ обозначается класс, состоящий из всевозможных счётных объединений замкнутых множеств, а через $F_{\sigma\delta}$ – класс, состоящий из счётных пересечений множеств из класса F_σ. Кроме того, через $X_A(\cdot,\cdot)$ условимся обозначить оператор Коши системы A.

Теорема. *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*

1) функция $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A,\xi) \mapsto \check{\nu}^+{}_\circ(X_A(\cdot,0)\xi)$, принадлежит классу $(F_\sigma,^*)$ и, в частности, принадлежит второму классу Бэра;

2) функция $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу, $(A,\xi) \mapsto \hat{\nu}^+{}_\circ(X_A(\cdot,0)\xi)$, принадлежит классу $(^*,F_{\sigma\delta})$ и, в частности, принадлежит третьему классу Бэра.

Следствие. Для любой системы $A \in \mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ спектры слабых показателей колеблемости корней системы A, т.е. множества $\{\check{\nu}^+{}_\circ(X_A(\cdot,0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n_*\}$ и $\{\hat{\nu}^+{}_\circ(X_A(\cdot,0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n_*\}$ являются суслинскими подмножествами расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Литература

1. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.

2. Сергеев И. Н. *Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.

3. Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Д.В. Роголев

Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Изучается краевая задача типа

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)XC_1(t) + D_1(t)XK_1(t) + XB_1(t) + X\left(S_1(t)X + S_2(t)Y\right) + F_1(t) = G_1(t,X,Y), \qquad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)YC_2(t) + D_2(t)YK_2(t) + YB_2(t) + Y\left(P_1(t)X + P_2(t)Y\right) + F_2(t) = G_2(t,X,Y), \qquad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \qquad (3)$$

$$Y(0) = Y(\omega), \qquad (4)$$

где $t \in [0,\omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $K_i(t)$, $S_i(t)$, $P_i(t)$, $F_i(t)$ $(i = 1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega > 0$.

Система уравнений (1), (2) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида. В частности, к таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–4]. Указанная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [1, 2]). Задача типа (1)–(4) рассмотрена в [1, 4].

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [5, 6], с помощью метода [4, гл. 3] получены коэффициентные, то есть явно в терминах задачи (1)–(4), достаточные условия её однозначной разрешимости на компакте и дан удобный для применений алгоритм построения решения. В работах [5, 6] рассмотрен случай, когда линейные части в (1), (2) имеют соответственно вид $A_1(t)X + XB_1(t)$, $A_2(t)Y + YB_2(t)$, при этом в [6] использована правосторонняя регуляризация. Исследования выполнены в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций $T(t)$ с нормой $\|T\|_C = \max\limits_t \|T(t)\|$.

Обозначения:

$$D = \{(t,X,Y) : 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \|X\| \leqslant \rho_1,\ \|Y\| \leqslant \rho_2\},\ \tilde{A}_i(\omega) = \int_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\ \gamma_i = \left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$
$$\alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|,\ \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|,\ c_i = \max_t \|C_i(t)\|,\ d_i = \max_t \|D_i(t)\|,\ k_i = \max_t \|K_i(t)\|,$$
$$\delta_i = \max_t \|S_i(t)\|,\ \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|,\ h_i = \max_t \|F_i(t)\|,$$
$$q_{11} = \gamma_1\left[0,5\alpha_1(\alpha_1c_1 + d_1k_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + (d_1k_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega\right],$$
$$q_{12} = \gamma_1\delta_2\rho_1\omega(0,5\alpha_1\omega + 1),\ q_{21} = \gamma_2\mu_1\rho_2\omega(0,5\alpha_2\omega + 1),$$
$$q_{22} = \gamma_2\left[0,5\alpha_2(\alpha_2c_2 + d_2k_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2 + (d_2k_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

где $t \in [0,\omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения алгебры $\mathfrak{B}(n)$, например, любая из норм I, II, приведённых в [7, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [2].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{A}_i \neq 0\ (i = 1,2)$,

2) $$\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_1 \left[(\alpha_1 c_1 + d_1 k_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] \omega^2 + \right.$$
$$\left. + \left[(d_1 k_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] \omega \right\} \leqslant \rho_1,$$
$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2 \left[(\alpha_2 c_2 + d_2 k_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] \omega^2 + \right.$$
$$\left. + \left[(d_2 k_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] \omega \right\} \leqslant \rho_2,$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - Q) > 0$, *где* $E = diag(1,1)$, $Q = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D.

При доказательстве теоремы задача (1)–(4) с помощью тождества-регуляризатора

$$\int_0^\omega A(\tau)Z(\tau)d\tau = \int_0^\omega A(\tau)d\tau Z(t) - \int_0^t \Big(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\Big)dZ(\tau) + \int_t^\omega \Big(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\Big)dZ(\tau)$$

сведена к эквивалентной интегральной задаче, к которой применён обобщённый принцип Каччопполи – Банаха сжимающих отображений.

Для построения решения интегральной задачи предложен алгоритм

$$X_{k+1}(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega)\Big\{ \int_0^t \Big(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\Big)[A_1(\tau)X_k(\tau)C_1(\tau) + D_1(\tau)X_{k-1}(\tau)K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau)B_1(\tau) +$$
$$+ X_{k-1}(\tau)\left(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right) + F_1(\tau)]\,d\tau -$$
$$- \int_t^\omega \Big(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\Big)[A_1(\tau)X_k(\tau)C_1(\tau) + D_1(\tau)X_{k-1}(\tau)K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau)B_1(\tau) +$$
$$+ X_{k-1}(\tau)\left(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right) + F_1(\tau)]\,d\tau -$$
$$- \int_0^\omega [D_1(\tau)X_k(\tau)K_1(\tau) + X_k(\tau)B_1(\tau) + X_k(\tau)\left(S_1(\tau)X_k(\tau) + S_2(\tau)Y_k(\tau)\right) + F_1(\tau)]\,d\tau \Big\}, \tag{5}$$

$$Y_{k+1}(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega)\Big\{ \int_0^t \Big(\int_0^\tau A_2(\sigma)\,d\sigma\Big)[A_2(\tau)Y_k(\tau)C_2(\tau) + D_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau) +$$
$$+ Y_{k-1}(\tau)\left(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right) + F_2(\tau)]\,d\tau -$$
$$- \int_t^\omega \Big(\int_\tau^\omega A_2(\sigma)\,d\sigma\Big)[A_2(\tau)Y_k(\tau)C_2(\tau) + D_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau) +$$
$$+ Y_{k-1}(\tau)\left(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right) + F_2(\tau)]\,d\tau -$$
$$- \int_0^\omega [D_2(\tau)Y_k(\tau)K_2(\tau) + Y_k(\tau)B_2(\tau) + Y_k(\tau)\left(P_1(\tau)X_k(\tau) + P_2(\tau)Y_k(\tau)\right) + F_2(\tau)]\,d\tau \Big\}, \tag{6}$$

$k = 1,2,...,$

$$X_0 = 0,\ Y_0 = 0;\ X_1 = -\tilde{A}_1^{-1}(\omega)\int_0^\omega F_1(\tau)d\tau,\ Y_1 = -\tilde{A}_2^{-1}(\omega)\int_0^\omega F_2(\tau)d\tau.$$

Установлено, что последовательность $\{X_k(t), Y_k(t)\}_0^\infty$, построенная с помощью алгоритма (5), (6), при выполнении условий теоремы сходится равномерно по $t \in [0,\omega]$ к решению полученной интегральной задачи. При этом получена оценка типа [5], характеризующая скорость сходимости алгоритма (5), (6).

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М. : Наука, 1975. 496 с.

2. Lucas J. *Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games* // Applied Mathematics Letters. 1990. Vol. 3, No 4. P. 9–12.

3. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300 с.

5. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивный метод анализа периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 39(1). С. 138–147.

6. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* / В.Н. Лаптинский, // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.

7. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М. : Наука, 1967. 472 с.

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А.Е. Руденок

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, roudenok@bsu.by

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y\left(1 - dx - Dx^2\right), \ \ \dot{y} = x\left(1 - Ax - Kx^2\right) - 3x(B + Lx)y + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3, \tag{5}$$

где $x = x(t),\ y = y(t),\ x, y, t \in \mathbb{R},\ d, D, A, B, K, L, M, N, U$ — действительные параметры. Если $d = D = 0$, то (1) — классическая система Куклеса [1], обозначим ее КСК. Любые монодромные системы, которые содержат КСК как частный случай, называют обобщенными системами Куклеса (ОСК).

Решению проблемы различения центра и фокуса КСК посвящено множество работ, см., например, библиографию в [2, 3]. В то же время, КСК оказалась простой для решения задачи об изохронности центра. Только одна система $\dot{x} = -y,\ \ \dot{y} = x + 3xy + x^3$ (с точностью до преобразования подобия) имеет изохронный центр [4]. Что касается ОСК, то работ по проблеме изохронности центра практически нет, кроме случаев обратимых систем [5].

Теорема 1. *Для того чтобыособая точка $O(0,0)$, будучи центром или фокусом системы (1), была изохронной относительно луча $\varphi = \varphi_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало формальное преобразование*

$$\omega = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} r^i v_i(\varphi), \ \ v_i(\varphi + 2\pi) = v_i(\varphi), \ \ v_i(\varphi_0) = 0, \ \ \forall i \in N,$$

такое, что производная $d\omega/dt$ в силу системы равна 1.

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до преобразования подобия она сводилась к одной из систем*

$$1)\ \dot{x} = -y\left(1 + dx - Dx^2\right), \ \ \dot{y} = x\left(1 + Dy^2\right) - dy^2;$$

$$2)\ \dot{x} = -y\left(1 - x(d + Dx)\right), \ \ \dot{y} = x\left(1 + Dy^2\right) - \frac{1}{2}d\left(x^2 - y^2\right);$$

$$3)\ \dot{x} = -y\left(1 - 9dx(1 - 2dx)\right), \ \ \dot{y} = x\left(1 + 9d^2y^2\right);$$

$$4)\ \dot{x} = -y\left(1 - dx(1 + 3dx)\right), \ \ \dot{y} = x\left(1 + 6d^2y^2\right) + d\left(x^2 - y^2\right);$$

$$5)\ \dot{x} = -y(1 - dx), \ \ \dot{y} = x(-1 + dx)^2 + 2dy^2;$$

$$6)\ \dot{x} = -y\left(1 - 11dx(1 + 12dx)\right), \ \ \dot{y} = x + 11d\left(x^2(1 + 3dx) + (-1 + 36dx)y^2\right);$$

$$7)\ \dot{x} = -y\left(1 - Dx^2\right)y, \ \ \dot{y} = x - \frac{1}{3}Dx\left(2x^2 - 9y^2\right);$$

$$8)\ \dot{x} = -y\left(1 - \left(dx + (d + U)(3d + 2U)x^2\right)\right),$$

$$\dot{y} = x\left(1 + (d + U)\left(x + 2(3d + 2U)y^2\right)\right) - (d + 2U)y^2;$$

$$9)\ \dot{x} = -y\left(1 - dx + \frac{2\,(d+U)\,(2d+U)\,(3d+2U)\,x^2}{11d+7U}\right),$$

$$\dot{y} = x\left(1 + (d+U)\,x + \frac{(d+U)^2\,(3d+2U)\,x^2}{11d+7U}\right) +$$

$$+\left(-d - 2U + \frac{6\,(d+U)\,(2d+U)\,(3d+2U)\,x}{11d+7U}\right)y^2;$$

$$10)\ \dot{x} = -y + 4Uxy,\ \ \dot{y} = x + x\left(-4Ux + \frac{16U^2x^2}{3}\right) + 3Uy^2;$$

$$11)\ \dot{x} = -y + \left(3Ux - 2U^2x^2\right)y,\ \ \dot{y} = x + x\left(-2Ux + 2U^2x^2\right) + Uy^2;$$

$$12)\ \dot{x} = -y - 4Uxy, \dot{y} = x - Uy^2;$$

$$13)\ \dot{x} = -y - \frac{1}{2}U^2x^2y,\ \ \dot{y} = x + \frac{U^2x^3}{2} - 2Uy^2 + \frac{U^2y^3}{2} - \frac{1}{2}Ux^2\,(-2+3Uy)\,;$$

$$14)\ \dot{x} = -y - \frac{1}{2}U^2x^2y,\ \ \dot{y} = x + \frac{U^2x^3}{2} - 2Uy^2 - \frac{U^2y^3}{2} + \frac{1}{2}Ux^2\,(2+3Uy)\,;$$

$$15)\ \dot{x} = -y + dxy,\ \ \dot{y} = x + x\left(-2dx - \left(-B^2 - d^2\right)x^2\right) - 3Bxy + 2dy^2;$$

$$16)\ \dot{x} = -y - B^2x^2y,\ \ \dot{y} = x - 3Bxy + 2B^2xy^2;$$

$$17)\ \dot{x} = -y + \left(-Ux - B^2x^2\right)y,\ \ \dot{y} = x - 3Bxy + \left(-U + 2B^2x\right)y^2 + BUy^3;$$

$$18)\ \dot{x} = -y - \frac{1}{4}Ax\left(2 + Ax + s^2\,(-2+Ax)\right)y,$$

$$\dot{y} = x + \frac{1}{4s^2}A(x^2\left(Ax + s^2\,(-4+Ax)\right) + 3sx\left(2 + Ax + s^2\,(-2+Ax)\right)y +$$

$$+2s^2\left(3+s^2\right)y^2 - As^3\left(1+s^2\right)y^3;$$

$$19)\ \dot{x} = -y - \frac{1}{8}Ux\,(6+Ux)\,y,$$

$$\dot{y} = x + \frac{1}{56}U\left(Ux^3 - 18\sqrt{7}xy + x^2\left(14 - 3\sqrt{7}Uy\right) + 7y^2\left(-10 + \sqrt{7}Uy\right)\right).$$

Литература

1. Куклес И. С. *О некоторых случаях отличия фокуса от центра* // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42, № 5. С. 208-211.

2. Садовский А. П. *Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 236–244.

3. Руденок А. Е., Василевич М. Н. *О базисе Грёбнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 170–182.

4. Mardesic P., Rousseau C., Toni B. *Linearization of isochronous centers* // J. Diff. Equations. 1995. Vol. 121, № 1. P. 67-108.

5. Chen Xingwu, Romanovski V. G. *Linearizability conditions of time-reversible cubic systems* // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 362, No 2. P. 438–449.

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ГРУБОГО ФОКУСА

А.Е. Руденок, М.Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
roudenok@bsu.by, vasilevichm@gmail.com

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + P(x,y), \ \ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Q(x,y), \tag{1}$$

$\lambda \neq 0$, P, Q – голоморфные в окрестности точки $O(0,0)$, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$. Пусть $\Gamma_k \, : \, \gamma_k(x, \, y) \; = \; 0$ – голоморфное в окрестности точки $O(0,0)$ семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в точке $O(0,0)$ с разными угловыми коэффициентами $k \in (-\infty, \infty)$.

Определение 1. *Кривые Γ_k называются изохронами системы (1) в окрестности особой точки $O(0,0)$, если траектории системы пересекают сектор между двумя любыми кривыми $\Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2}$ за одно и то же время.*

Определение 2. *Если изохроны системы существуют, то особая точка $O(0,0)$ называется изохронной.*

Теорема 1 [1, с. 70-71, пример 1.22]. *Существует голоморфная замена*

$$u = \ x + U\left(x,y\right), \ \ v = y + V\left(x,y\right), \tag{2}$$

переводящая систему (1) *в систему*

$$du/dt = -v + \lambda u, \ \ dv/dt = u + \lambda v. \tag{3}$$

Здесь $U\left(x,y\right)$, $V\left(x,y\right)$ – функции без линейных членов.

Из теоремы 1 следует, что голоморфная система (1), имеющая грубый фокус в начале координат, является изохронной, а ее изохронами является семейство кривых

$$\Gamma_k : \{y + V\left(x,y\right) = k\left(x + U\left(x,y\right)\right)\} \bigcup x + U\left(x,y\right) = 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для системы* (1) *среди голоморфных семейств изохрон семейство* (4) *является единственной.*

Определение 3. *Если среди изохрон системы* (1) *имеется положительная полуось Ox^+, то будем говорить, что особая точка $O(0,0)$ является изохронной относительно Ox^+. Если она одновременно изохронная и относительно полуоси Ox^-, то особая точка $O(0,0)$ называется сильно изохронной относительно оси Ox.* [2]

Теорема 3. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ системы* (1) *была изохронной относительно Ox^+, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная замена*

$$u = \ x + U\left(x,y\right), \ \ v = y, \tag{5}$$

которая переводит систему (1) в систему с равномерной изохронностью. При этом особая точка $O(0,0)$ является и сильно изохронной относительно оси Ox.

Рассмотрим систему с квадратичными нелинейностями и грубым фокусом в особой точке $O(0,0)$, которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}\dot{x} = -y + \lambda x + \left(a + k\right)x^2 + \left(b + c - 2m\right)xy + \left(d - k\right)y^2 = -y + \lambda x + p(x,y),\\ \dot{y} = x + \lambda y - \left(c + m\right)x^2 + \left(a - d - 2k\right)xy + \left(b + m\right)y^2 = x + \lambda y + q(x,y).\end{gathered} \tag{6}$$

Теорема 4. *Для того чтобы система* (2) *была сильно изохронной относительно оси Ox, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до преобразования гомотетии она представлялась в одном из видов:*

$$1) \ \dot{x} = -y + x\lambda - 4cx\left(-2y + x\lambda\right), \ \ \dot{y} = x + y\lambda - 4c\left(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda\right).$$

$$2) \ \dot{x} = -y + x\lambda - c\left(-2xy + (x^2 - y^2)\lambda\right), \ \ \dot{y} = x + y\lambda - c\left(x^2 - y^2 + 2xy\lambda\right).$$

$$3)\ \dot{x} = -y + \lambda x + 4A\lambda\left(2\left(2+s^2\right)xy - s^2x^2\lambda + y^2\left(2s+\lambda\right)\right),$$

$$\dot{y} = x + \lambda y + 4A\lambda\left(y^2 + 2sy\left(2x+y\lambda\right) - s^2\left(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda\right)\right).$$

$$4)\ \dot{x} = -y + \lambda x + \frac{4}{15}\left(5sy\left(4x+y\lambda\right) + 2b\left(6x^2\lambda - y^2\lambda + xy\left(2+3\lambda^2\right)\right)\right),$$

$$\dot{y} = x + \lambda y + \frac{4}{15}y\left(5sy + b\left(y + 6x\lambda + 3y\lambda^2\right)\right).$$

Соответствующие замены (5):

$$1)\ u = x(1-4cx),\ v = y. \quad 2)\ u = x - c\left(x^2+y^2\right),\ v = y.$$

$$3)\ u = x - 4A\left(sx-y\right)^2\lambda,\ v = y. \quad 4)\ u = x - \frac{4y\left(\left(b+5s\right)y + 3bx\lambda\right)}{3\left(5+4by\lambda\right)},\ v = y.$$

Литература

1. Chow S. N., Li C., Wang D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields.* Cambridge University Press, 1994.

2. Руденок А. Е. *Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара* // Дифф. уравнения. 1975. Т. 11, № 5. С. 811–819.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ЧИСТО МНИМЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

А.П. Садовский

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, sadovskii@bsu.by

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = v + X(u,v), \quad \frac{dv}{dt} = -u + Y(u,v), \tag{1}$$

где X, Y – голоморфные в окрестности $u = v = 0$ функции без свободных и линейных членов. При этом $O(0,0)$системы (1) является центром или фокусом [1]. Наряду с системой (1) будем рассматривать систему

$$\frac{du}{d\tau} = (v + X(u,v))Z(u,v) \equiv X_1(u,v), \quad \frac{du}{d\tau} = (-u + Y(u,v))Z(u,v) \equiv Y_1(u,v), \tag{2}$$

где $Z(u,v)$ – произвольная аналитическая функция в окрестности $u = v = 0$, для которой $Z(0,0) = 1$. Ясно, что поведение интегральных кривых систем (1), (2) в окрестности начала координат совпадает.

Если замена

$$x = u + \sum_{j=2}^{\infty} f_j u^j \equiv u + \varphi(u), \quad y = v + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} g_{j,i} - u^j v^{i-j} \equiv v + \psi(u,v), \tag{3}$$

преобразует систему (2) к системе вида

$$\frac{dx}{d\tau} = y + \sum_{i=1}^{m} e_{2i}x^{2i}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x, \tag{4}$$

то

$$\left(1+\varphi'(u)\right)X_1(u,v) = y + \sum_{i=1}^{m} e_{2i}x^{2i}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}X_1(u,v) + \left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)Y_1(u,v) = -x. \tag{5}$$

Из (5) на основании правила Крамера получаем

$$X_1(u,v)=\frac{\left(y+\sum_{i=1}^m e_{2i}x^{2i}\right)\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}{(1+\varphi'(u))\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)},\ Y_1(u,v)=\frac{-x(1+\varphi'(u))-\left(y+\sum_{i=1}^m e_{2i}x^{2i}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}}{(1+\varphi'(u))\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}. \qquad (6)$$

При выполнении (6)

$$\left(y+\sum_{i=1}^m e_{2i}x^{2i}\right)\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)-X_1(u,v)\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0,$$

$$-x(1+\varphi'(u))-\left(y+\sum_{i=1}^m e_{2i}x^{2i}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}-Y_1(u,v)(1+\varphi'(u))\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0. \qquad (7)$$

Если первое из равенств (7) умножить на Y_1, а второе на $-X_1$ и сложить, то в результате получим

$$\left(y+\sum_{i=1}^m e_{2i}x^{2i}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}(v+X(u,v))+\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)(-u+Y(u,v))\right)+$$
$$+(1+\varphi'(u))(u+\varphi(u))(v+X(u,v))=0. \qquad (8)$$

Теорема. *Особая точка $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда для (1) существуют функции $\varphi(u)$, $\psi(u,v)$ и постоянные e_{2i}, для которых выполняется тождество* (8).

Для проверки выполнения (8) функции $\varphi(u)$, $\psi(u,v)$ представляем в виде

$$\varphi(u)=\sum_{k=2}^{\infty}f_k u^k,\ \psi(u,v)=\sum_{i=2}^{\infty}\tilde{g}_i(u,v)\equiv\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}g_{j,i-j}u^j v^{i-j},$$

где $\tilde{g}_i(u,v)$ – однородные полиномы i-ой степени. На первом шаге единственным образом последовательно находим $g_{1,1}$, $g_{2,0}$, f_2, e_2. Далее на втором шаге находим $g_{1,2}$, $g_{2,1}$, $g_{3,0}$ f_3 и условие $h_1=0$, которое представляет первую фокусную величину системы (1).

Далее единственным образом находим $g_{4,0}$, $g_{3,1}$, $g_{2,2}$, $g_{1,3}$ f_4, e_4 и $g_{5,0}$, $g_{4,1}$, $g_{3,2}$, $g_{2,3}$, $g_{4,1}$, f_5, а также условие $h_2=0$, представляющее вторую фокусную величину системы (1).

Заметим, что при $i=2m$ коэффициенты $g_{1,2m-1}$, $g_{2,2m-2}$, ..., $g_{2m,0}$, f_{2m}, e_{2m} находятся единственным образом [2]. При $i=2m+1$ единственным образом находятся $g_{1,2m}$, $g_{1,2m-1}$, ..., $g_{2m+1,0}$, f_{2m+1}, e_{2m+1}, а также m-ая фокусная величина h_m.

Пример. Квадратичная система Дюлака [3]

$$\dot{u}=v+Au^2+Buv+Cv^2,\quad \dot{v}=-u+Ku^2+Luv+Mv^2.$$

На первом шаге в этом случае находим

$$e_2=\frac{1}{2}(2A+C+L),\quad f_2=\frac{1}{3}(-B-K-2M),\quad g_{1,1}=-M.$$

С учётом найденных значений на втором шаге находим

$$f_3=\frac{1}{36}\left(7B^2+5BK-2K^2+9C(C+L)+9A(2C+L)+19BM+10(K+M)\right),$$

$$g_{1,2}=CM,\ g_{1,2}=\frac{1}{2}(C(CL)+M(B+M)),$$
$$h_1=(2A+L)(K+M)-(A+C)(B+2M).$$

На третьем шаге получаем $g_{4,0}$, $g_{3,1}$, $g_{2,2}$, $g_{1,3}$ f_4, e_4. На четвёртом шаге получим h_2. На шестом шаге получим третью фокусную величину h_3.

Литература

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск: Изд-во БГУ, 1982.

2. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* М.: Наука, 1982.

3. Zoladek H. *Quadratic systems with center and their perturbation* // Journal of differential equations. 1994. Vol. 109, No 2. P. 223–273.

4. Садовский А. П. *Полиномиальные идеалы и многообразия.* Минск: изд-во БГУ, 2004.

5. Садовский А. П., Маковецкая Т. В., Чергинец Д. Н. *Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. №2. С. 4–11.

6. Садовский А. П., Чергинец Д. Н., Детченя Л. В., Гринь А. А. *Семикратные фокусы кубических систем Куклеса* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11, №1. С. 42–56.

7. Садовский А. П. *Базис Гребнера идеала фокусных величин кубической системы И.С. Куклеса* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, №1. С. 142–144.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

И.Н. Сидоренко

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова, Космонавтов, 1, 212022 Могилев, Беларусь, sidorenko_in@msu.by

Введение. Рассмотрим систему Льенара с четырьмя простыми особыми точками

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-g(x)-\varepsilon f(x)y, \tag{1}$$

где $g(x)=x(1-x)(1-Lx)(1-Mx), f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера», окружающих группу особых точек, а также построение систем (1) с заданным количеством предельных циклов.

Система (1) имеет конфигурацию особых точек $2A+2S$ - 2 антиседла и 2 седла. Для исследования применяется разработанный прогнозный метод оценки числа предельных циклов «нормального размера» для систем Льенара и метод возмущения негрубого фокуса [1].

Определение 1. Пусть система Льенара (1) имеет антиседло $A(x_0,0)$. Обозначим, через ξ_1 (ξ_2) абсциссу ближайшей слева (справа) к точке А особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1=-\infty$ ($\xi_2=+\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0,0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta)=F(\mu),\ G(\eta)=G(\mu), \tag{2}$$

где $F(\eta)=\int_{x_0}^{\eta}f(x)dx$, $G(\eta)=\int_{x_0}^{\eta}g(x)dx$, $\xi_1<\eta<x_0$, $x_0<\mu<\xi_2$.

Сформулированное определения остаётся справедливым и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом равным +1. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать «центральную» точку (это может быть и седло), ξ_1, ξ_2 - абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу вокруг которой производится оценка, а $\xi_1<\eta<\zeta_1$, $\zeta_2<\mu<\xi_2$, где ζ_1, ζ_2 - находятся из условия $G(\zeta_1)=G(\zeta_2)=\max G(x_i)$, $\zeta_1<x_i<\zeta_2$, x_i - абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

Теорема. *Система Льенара* (1)

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=x(1-x)(1-Lx)(1-Mx)-\varepsilon(a_0+a_1x+a_2x^2)y,$$

с $L=-\frac{1}{2}$, $M=\frac{1}{4}$ *и* $a_2=1$, *имеющей седла* $D(-2,0)$, $E(1,0)$ *и седла* $S_1(0,0)$, $S_2(4,0)$ *выполняются следующие утверждения:*

- *все решения соответствующей системы прогноза (2) типа* $((k_2,k_3),k_1)$ *удовлетворяют неравенству* $k_1+k_2+k_3\leqslant 4$

- *соответствующей системы прогноза (2) для рассматриваемой системы Льенара может иметь решения следующих типов: ((1,0),0), ((0,1),0), ((0,0),1), ((1,0),1), ((0,1),1), ((1,1),1), ((0,2),0), ((2,0),0), ((0,0),2);*

- *в каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа* $((k_2,k_3),k_1)$*, существует подмножество, в котором система Льенара (1) при* $\varepsilon \leqslant 0.001$ *имеет такое же распределение предельных циклов;*

- *если* $k_2 = 0$ $(k_3 = 0)$*, то система Льенара (1) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку* $D(-2,0)$*,* $(E(1,0))$*.*

.

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы кубической системы Льенара типа 2А + 1S* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. 2022. №2. С. 21–29.

2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара типа 2A + 3S и 3A + 2 S* // XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023): материалы конф.: в 2 ч. / Ин-т мат. нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. Ч. 1. С. 94–96.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ С ИНДЕКСАМИ ХЁРСТА, БОЛЬШИМИ 1/4

М.А. Фирсов[1], **М.М. Васьковский**[1]

[1]Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
firsovm23@gmail.com, vaskovskii@bsu.by

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{U}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, B – банахово пространство, а $\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U})$ – множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{U}$.

Рассмотрим эволюционное уравнение следующего вида:

$$dY_t = LY_t dt + F(Y_t)d\mathbf{X}_t, \quad Y_0 = \xi \in \mathcal{U}, \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^3) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$, $\alpha \in (\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$; $F : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U})$; L – отрицательно определённый самосопряжённый оператор, порождающий аналитическую C_0-полугруппу на $\mathcal{U}$.

Замечание. Некоторые обозначения, которые мы будем использовать без определения, такие как $\mathcal{U}_\beta$, $L^\infty([0,T],B)$ и др., определяются так же, как и в [1].

Через $C_S^\alpha([0,T],B)$ обозначим множество функций $f : [0,T] \to B$, для которых $\|\delta_S f\|_{\alpha,B} < \infty$, где $\delta_S f_{s,t} = f_t - S_{t-s} f_s$.

Определение 1. Пусть $\mathbf{X} = (1,\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^3) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0,T],\mathcal{H})$, $\alpha \in (\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$. Тогда будем говорить, что функция $Y \in C_S^\alpha([0,T],B)$ управляется грубой траекторией $\mathbf{X}$ в соответствии с полугруппой $\{S_t\}_{t\geq 0}$, если существуют такие элементы $Y' \in C_S^\alpha([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},B))$ и $Y'' \in C_S^\alpha([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{L}_2(\mathcal{H},B)))$, что для выражений:

$$R_{s,t}^{S,Y,2} := Y_t' - S_{t-s}(Y_s' + Y_s''\mathbf{X}_{s,t}^1),$$

$$R_{s,t}^{S,Y,3} := Y_t - S_{t-s}(Y_s + Y_s'\mathbf{X}_{s,t}^1 + Y_s''\mathbf{X}_{s,t}^2)$$

верно, что $\|R^{S,Y,2}\|_{2\alpha,\mathcal{L}_2(\mathcal{H},B)} < \infty$ и $\|R^{S,Y,3}\|_{3\alpha,B} < \infty$. Под $\mathcal{D}_{S,\mathbf{X}}^\alpha([0,T],B)$ будем понимать множество всех таких троек (Y,Y',Y'').

Лемма 1. *Пусть* $T>0$ *и для некоторого* $\alpha\in(\frac14,\frac13]$ *имеется грубая траектория* $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^3)\in\mathcal{C}_g^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ *и управляемая грубая траектория* $(Y,Y',Y'')\in\in\mathcal{D}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}_\beta))$. *Тогда для любых* $s,t\in[0,T]$ *интеграл*

$$\int\limits_s^t S_{t-u}Y_ud\mathbf{X}_u:=\lim_{|\mathcal{P}|\to0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}S_{t-u}(Y_u\mathbf{X}^1_{u,v}+Y'_u\mathbf{X}^2_{u,v}+Y''_u\mathbf{X}^3_{u,v}) \tag{2}$$

корректно определён и для каждого $0\leqslant\mu<4\alpha$ *существует такая константа* $C_{\alpha,\mu}>0$, *что выполняется неравенство*

$$\left\|\int\limits_s^t S_{t-u}Y_ud\mathbf{X}_u-S_{t-s}(Y_s\mathbf{X}^1_{s,t}+Y'_s\mathbf{X}^2_{s,t}+Y''_s\mathbf{X}^3_{s,t})\right\|_{\mathcal{U}_{\beta+\mu}}\leqslant C_{\alpha,\mu}(\|\mathbf{X}^1\|_{\alpha,\mathcal{H}}\|R^{S,Y,3}\|_{3\alpha,\mathcal{U}_\beta}$$

$$+\|\mathbf{X}^2\|_{2\alpha,\mathcal{H}^{\otimes2}}\|R^{S,Y,2}\|_{2\alpha,\mathcal{U}_\beta}+\|\mathbf{X}^3\|_{3\alpha,\mathcal{H}^{\otimes3}}\|R^{S,Y,1}\|_{\alpha,\mathcal{U}_\beta})|t-s|^{4\alpha-\mu}$$

для всех $s,t\in[0,T]$.

Лемма 2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\alpha\in(\frac14,\frac13],\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^3)\in\mathcal{C}_g^\alpha([0,T],\mathcal{H})$, $F\in C_b^3(E^m_{3\alpha+\beta},\mathcal{U}^n_{3\alpha+\beta})$, *где* $E^m_{3\alpha+\beta}\subseteq\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}$ *– либо шар в* $\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}$, *либо* $E^m_{3\alpha+\beta}=\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}$, $(Y,Y',Y'')\in\mathcal{D}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{U}^m_\beta)$. *Также предположим, что* $Y\in L^\infty([0,T],\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta})$, $Y'\in L^\infty([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}))$, $Y''\in L^\infty([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta})))$ *и* $Y_t\in E^m_{3\alpha+\beta}$ $\forall t\in[0,T]$. *Тогда* $(Z,Z',Z''):=(F(Y),F(Y)',F(Y)'')\in\mathcal{D}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\ \mathcal{U}^n_\beta)$ *и выполняется оценка*

$$\|(Z,Z',Z'')\|_{S,\mathbf{X},\alpha,\mathcal{U}^n_\beta}\leqslant C_F(1+\|\mathbf{X}^1\|_{\alpha,\mathcal{H}}+\|\mathbf{X}^2\|_{2\alpha,\mathcal{H}^{\otimes2}})^3\times$$

$$\times(1+\|Y\|_{\infty,\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}}+\|Y'\|_{\infty,\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}}+\|Y''\|_{\infty,\mathcal{U}^m_{3\alpha+\beta}}+\|(Y,Y',Y'')\|_{S,\mathbf{X},\alpha,\mathcal{U}^m_\beta})^3,$$

при этом константа C_F *зависит от* T, α, *оценок* F *и её производных.*

Введём пространство

$$\tilde{\mathcal{D}}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{U}_\beta):=\mathcal{D}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{U}_{\beta-3\alpha})\cap(C^\alpha_S([0,T],\mathcal{U}_\beta)\times L^\infty([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}_\beta))^{\times2}).$$

Определение 2. Пусть $\alpha\in(\frac14,\frac13]$ и $T>0$, тогда отображение $Y\in C^\alpha_S([0,T],\mathcal{U})$ будем называть решением задачи Коши (1) на промежутке $[0,T]$, если выполняются следующие условия:

1) $(Y,Y',Y'')\in\tilde{\mathcal{D}}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{U})$, где $Y'=F(Y),Y''=F(Y)'=DF(Y)F(Y)$;

2) $(F(Y),F(Y)',F(Y)'')\in\mathcal{D}^\alpha_{S,\mathbf{X}}([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}_{-3\alpha}))\cap L^\infty([0,T],\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}))^{\times3}$;

3) для любого $t\in[0,T]$ выполняется равенство $Y_t=S_t\xi+\int_0^tS_{t-r}F(Y_r)d\mathbf{X}_r$, где интеграл в правой части – потраекторный интеграл (2).

Теорема 1. *Пусть* $\xi\in\mathcal{U}$, $\alpha\in(\frac14,\frac13]$, $\mathbf{X}\in\mathcal{C}^\alpha_g([0,T],\mathcal{H})$, $F\in C^4(\mathcal{U}_\gamma,\mathcal{L}_2(\mathcal{H},\mathcal{U}_\gamma))$ *и* F *– локально ограничен на* $\mathcal{U}_\gamma$ *для каждого* $\gamma\in(-\alpha,0]$. *Тогда существует* $T_0\in(0,T]$ *такое, что на промежутке* $[0,T_0]$ *уравнение (1) имеет единственное решение.*

Предложение 1 (Теорема 1.1, [2]) *Пусть* B^H *–* d*-мерное дробное броуновское движение с показателем Хёрста* $H\in(\frac14,\frac13]$. *Тогда* $\forall\alpha\in(\frac14,H)$ *и* $T>0$ *п. н.*

$$\mathbb{B}=(1,\mathbb{B}^1,\mathbb{B}^2,\mathbb{B}^3)\in\mathcal{C}^\alpha_g([0,T],\mathbb{R}^d),$$

где $\mathbb{B}$ *– грубая траектория над* B^H.

Рассмотрим стохастическое эволюционное уравнение

$$dY_t=LY_tdt+F(Y_t)d\mathbb{B}_t,\quad Y_0=\xi. \tag{3}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{U}}=\mathcal{U}\cup\{\infty\}$ – метрическое пространство, которое является одноточечным расширением пространства $\mathcal{U}$. Для произвольной функции $f:[0,T]\to\widehat{\mathcal{U}}$ величину $\tau(f):=\inf\{t:f(t)=\infty\}$ будем называть моментом взрыва функции f. Если $\{t:f(t)=\infty\}=\varnothing$, то будем считать, что $\tau(f)=+\infty$.

Обозначим через $\widehat{C}([0,T],\widehat{\mathcal{U}})$ множество функций $f:[0,T]\to\widehat{\mathcal{U}}$ таких, что f непрерывна при $t\in[0,T]\cap[0,\tau(f))$ и $f(t)=\infty$ при $t\in[0,T]\cap[\tau(f),\infty)$.

Определение 3. Пусть $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, $\alpha \in (\frac{1}{4}, H)$ и $T > 0$, тогда слабым решением задачи Коши (3) на промежутке $[0,T]$ будем называть случайный процесс Y_t, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, такой, что выполняются следующие условия:

1) $Y(\omega) \in \widehat{C}([0,T], \widehat{\mathcal{U}})$ для почти всех $\omega \in \Omega$;

2) для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $\tilde{T} \in (0, \tau(\omega)) \cap [0,T]$ отображение $t \to Y_t(\omega)$ является решением (в смысле определения 2) детерминированного уравнения

$$dY_t = LY_t dt + F(Y_t) d\mathbb{B}_t(\omega), \quad t \in [0, \tilde{T}],$$

с начальным условием $Y_0(\omega) = \xi(\omega)$, где $\tau(\omega) = \tau(Y(\omega))$ – момент взрыва $Y(\omega)$;

3) для почти всех $\omega \in \Omega$ если $\tau(\omega) \leqslant T$, то $\limsup\limits_{t \uparrow \tau(\omega)} \|Y_t(\omega)\|_{\mathcal{U}} = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, $\alpha \in (\frac{1}{4}, H)$, $T > 0$, $F \in C^4(\mathcal{U}_\gamma, \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d, \mathcal{U}_\gamma))$ *и* F *– локально ограничена на* $\mathcal{U}_\gamma$ *для каждого* $\gamma \in (-\alpha, 0]$. *Тогда существует единственное слабое решение* Y_t *задачи Коши (3) на промежутке* $[0,T]$.

Литература

1. Gerasimovics A., Hairer M. *Hormander's theorem for semilinear SPDEs* // Electron. J. Probab. 2019. Vol. 24, No 132. P. 1–56.

2. Nualart D., Tindel S. *A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra's representation* // Ann. Probab. 2011. Vol. 39, No 3. P. 1061–1096.

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННОЙ С МОДЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

В.В. Цегельник[1]

[1]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, П.Бровки, 6, 220013 Минск, Беларусь, tsegvv@bsuir.by

Система дифференциальных уравнений [1]

$$2s_n = \frac{1}{1 - s_{n-1}^2}\left(\frac{n}{t}s_{n-1} - \frac{ds_{n-1}}{dt}\right), \quad 2s_{n-1} = \frac{1}{1 - s_n^2}\left(\frac{n+1}{t}s_n + \frac{ds_n}{dt}\right), \tag{1}$$

где t – непрерывная независимая переменная, n – произвольный параметр, ассоциируется (в случае натурального n) с уравнением [2]

$$(n+1)s_n = t(s_{n+1} + s_{n-1})(1 - s_n^2), \tag{2}$$

представляющим второе дискретное уравнение Пенлеве, и дискретным модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза [3]

$$\frac{ds_n}{dt} = -(s_{n+1} - s_{n-1})(1 - s_n^2). \tag{3}$$

Уравнения системы (1) получаются в результате вычитания из (2) уравнения (3) и замены в полученном выражении n на $n-1$, а также в результате сложения уравнений (2) и (3).

Система (1) в обозначениях $t = z$, $s_{n-1} = v = v(z)$, $s_n = u = u(z)$ принимает вид

$$v = \frac{1}{2(1-u^2)}\left(\frac{n+1}{z}u + u'\right), \quad u = \frac{1}{2(1-v^2)}\left(\frac{n}{z}v - v'\right), \quad ' = \frac{d}{dz}. \tag{4}$$

Относительно неизвестных функций v, u система (4) эквивалентна соответственно уравнениям

$$v'' = -\frac{v}{1-v^2}v'^2 - \frac{1}{z}v' + \frac{n^2}{z^2} \cdot \frac{v}{1-v^2} - 4v(1-v^2), \tag{5}$$

$$u'' = -\frac{u}{1-u^2}u'^2 - \frac{1}{z}u' + \frac{(n+1)^2}{z^2} \cdot \frac{u}{1-u^2} - 4u(1-u^2). \tag{6}$$

Таким образом, справедливы

Теорема 1 [1]. *Пусть* $v = v(z)$ *– решение уравнения* (5). *Тогда функция* $u(z)$, *определяемая формулой из* (4), *является решением уравнения* (6).

Теорема 2. *Пусть* $u = u(z)$ *– решение уравнения* (6). *Тогда функция* $v(z)$, *определяемая формулой из* (4), *является решением уравнения* (5).

Уравнения (5), (6)с помощью преобразований

$$v = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-y}},\ u = \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}},\ z^2 = \tau,\ \varepsilon^2 = \sigma^2 = 1 \tag{7}$$

сводятся к уравнениям

$$y'' = \frac{3y-1}{2y(y-1)}y'^2 - \frac{y'}{\tau} - \frac{n^2}{2}\cdot\frac{(y-1)^2}{y\tau^2} + 2\frac{y}{\tau}, \tag{8}$$

$$q'' = \frac{3q-1}{2q(q-1)}q'^2 - \frac{q'}{\tau} - \frac{(n+1)^2}{2}\cdot\frac{(q-1)^2}{q\tau^2} + 2\frac{q}{\tau} \tag{9}$$

соответственно. Каждое из уравнений (8), (9) представляет собой пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{\tau} + \frac{(w-1)^2}{\tau^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{\tau} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \tag{10}$$

при значениях параметров $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{n^2}{2}$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{(n+1)^2}{2}$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ соответственно.

Из (4) с помощью преобразований (7) несложно получить формулы взаимно однозначного соответствия между решениями уравнений (8) и (9)

$$y = 1 + \frac{4\tau q^2(q-1)}{[(n+1)(1-q)+\tau q']^2}, \tag{11}$$

$$q = 1 + \frac{4\tau y^2(y-1)}{[n(y-1)+\tau y']^2}. \tag{12}$$

Формула (12) (преобразование Беклунда уравнения (10) в случае $\alpha = \delta = 0$, $\gamma \neq 0$) получена в [4]. Обобщение формулы (12) на случай, когда в (10) $\alpha\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ дано в [5]. В работе [6] показано, что система дифференциальных уравнений (11), (12) является системой Пенлеве–типа.

Решения уравнения (5) определяют класс сепарабельных решений комплексного sin-Gordon уравнения, известного также, как модель Полмайера–Лунда–Редже. Более подробная информация о других приложениях (с конкретными ссылками на источники) содержится в [7]. К системе (4) сводится также система двух дифференциальных уравнений, ассоциированная с сильношунтированной моделью Джозефсона [8]. Систему (4) можно получить из системы [9] двух дифференциальных уравнений (описывающей класс аксиально–симметричных стационарных решений уравнений Эйнштейна), если в ней выполнить масштабные преобразования неизвестных функций и независимой переменной.

Литература

1. Hisakado M. *Unitary matrix models and Painlevé III* // Mod. Phys. Lett. 1996. Vol. A11. P. 3001–3010.

2. Nijhoff F. W., Papageorgiu V. *Similarity reductions of integrable lattices and discrete Painlevé II equation* // Phys. Lett. 1991. Vol. 153A. P. 337–344.

3. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Zabrodin A. *Matrix models among integrable theories: Forced hierarchies and formalism operator* // Nucl. Phys. 1991. Vol. B336. P. 659–691.

4. Бордаг Л. А., Китаев А. В. *Об алгебраических и рациональных решениях пятого уравнения Пенлеве*. Дубна, 1986. 14 с. (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед.: P5-86-334).

5. Adler V. E. *Nonlinear chains and Painlevé equations* // Physica. 1994. Vol. 73D. P. 335–351.

6. Цегельник В. В. *О формулах взаимно однозначного соответствия между решениями системы двух дифференциальных уравнений* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 2. С. 50–53.

7. Clarkson P. A. *Open problems for Painlevé equations* // SIGMA. 2019. Vol. 15. Art. 006. 20 p.

8. Bibilo Y., Glutsyuk A. A. *On families on constructions in model of overdamped Josephson junstion and Painlevé 3 equation* // Nonlinearity. 2022. Vol. 35. P. 5427–5480.

9. Marek J. J. J. *Some solutions of Einstein's equations in general relativity* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. Vol. 64. P. 167–170.

GROUP CLASSIFICATION OF NEWTON'S EQUATIONS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM AND A POWER DISSIPATION FORCE

D.S. Zhalukevich[1]

[1]Physics Faculty, University of Bialystok, Bialystok, Poland,
den.zhal@yandex.by

Let's consider Newton's equations with one degree of freedom and a power dissipation force, which are often found in science and technology:

$$\ddot{x} + F_n(t,x)\dot{x}^n + F_0(t,x) = 0, \tag{1}$$

where $n \in \mathbb{N}$, $F_n(t,x)$, $F_0(t,x)$ - analytical functions based on their arguments.

We will look for infinitesimal transformations for equation (1) in the form [1-4]

$$\widetilde{t} = t + \varepsilon\tau(t,x) + \ldots, \quad \widetilde{x} = x + \varepsilon\xi(t,x) + \ldots, \tag{2}$$

and

$$\widetilde{F_n} = F_n + \varepsilon f_n + \ldots, \quad \widetilde{F_0} = F_0 + \varepsilon f_0 + \ldots. \tag{3}$$

Then the group generator for equation (1) has the form

$$X = \tau(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + f_0\frac{\partial}{\partial F_0} + f_n\frac{\partial}{\partial F_n}. \tag{4}$$

Based on the speed of movement, the following types are distinguished for equation (1):

$$\ddot{x} + F_1(t,x)\dot{x} + F_0(t,x) = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{x} + F_2(t,x)\dot{x}^2 + F_0(t,x) = 0, \tag{6}$$

$$\ddot{x} + F_n(t,x)\dot{x}^n + F_0(t,x) = 0, \quad n > 2. \tag{7}$$

Equation (5) is used at low speeds - the Stokes resistance force acts. Equation (6) is used at high speeds of motion – the Newton (Zhukovsky) resistance force acts. Equation (7) is used at very high speeds – the Bernoulli resistance force acts.

Refrences

1. Hydon P. E. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

2. Ibragimov N. H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Dordrecht: Reidel, 1985.

3. Ovsiannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York: Academic, 1982.

4. Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993,

СЕКЦИЯ «УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПЛОСКИМ РАЗРЕЗОМ

Н.Н. Агаркова[1], В.Б. Васильев[1], Х.Ф. Гебресласи[1]

[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы 85, 308015 Белгород, Россия,
agarkova_n@bsu.edu.ru, vbv57@inbox.ru, rhadishfe@gmail.com

Основной объект исследования в этой работе – модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в конусе евклидова пространства [1]. Модельный псевдодифференциальный оператор A в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$(Au)(x) = \int\limits_C \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\xi) u(y) e^{i(y-x)\xi} d\xi dy, \quad x \in C,$$

где заданная функция $A(\xi)$ называется символом оператора A.

Мы исследуем уравнение

$$(Au)(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+{}^a \times (0,+\infty)} \tag{1}$$

с интегральными условиями

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1,x_2,x_3) dx_2 = f(x_1,x_3), \tag{2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1,x_2,x_3) dx_3 = g(x_1,x_2), \tag{3}$$

где: $C_+{}^a \subset \mathbb{R}^2$, и

$$C_+{}^a \times (0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = (x_1,x_2,x_3), x_2 > a|x_1|, x_3 > 0, a > 0\},$$

f, g – заданные функции из $H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2$ [1], предполагается, что $A(\xi)$ удовлетворяет условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)|(1+|\xi|)^{-\alpha} \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

и допускает волновую факторизацию [1] относительно $-(C_+{}^a \times (0,+\infty))$

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \dot{A}_{=}(\xi),$$

с индексом æ , таким, что $æ - s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$.

Выбор интегральных условий (2),(3) при таком индексе волновой факторизации связан со структурой общего решения уравнения (1) и возможностью получения достаточно простой формулы решения задачи (1),(2),(3).

Введем два оператора

$$P = \frac{1}{2}(I+S), \qquad Q = \frac{1}{2}(I-S),$$

где I – единичный оператор, S – одномерный сингулярный интегральный оператор, действующий по формуле

$$(S\tilde{u})(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{i}{\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta,\xi_2,\xi_3) d\eta}{\xi_1 - \eta}, -$$

где знак "$\sim$"над функцией обозначает ее преобразование Фурье.

Если предположить, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+^a \times (0,+\infty))$ для всех достаточно малых a, то справедлив следующий результат.

Теорема. *Предположим, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+{}^a \times (0,+\infty)$ с индексом æ таким, что $æ - s = 1+\varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$. Если существует*

$$\lim_{a\to 0} A_{\neq}(\xi) = a_{\neq}(\xi),$$

то единственное решение задачи (1),(2),(3) можно записать в виде

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)((P\tilde{h})(\xi_1 + a\xi_2, \xi_2, \xi_3) + (Q\tilde{h})(\xi_1 - a\xi_2, \xi_2, \xi_3)), \tag{4}$$

где

$$\tilde{h}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = A_{\neq}(\xi_1,0,\xi_3)\tilde{f}(\xi_1,\xi_3)) + a_{\neq}(\xi_1,\xi_2,0)\tilde{g}(\xi_1,\xi_2) - A_{\neq}(\xi_1,0,0)\tilde{f}(\xi_1,0))$$

Вид решения (4) позволяет рассмотреть другую предельную ситуацию $a \to \infty$. Геометрически это означает, что трехгранный угол вырождается в плоский квадрант. Оказывается, что в этом случае решение (4) может иметь предел при $a \to \infty$, только если функции f, g удовлетворяют некоторому интегральному соотношению. Некоторые ситуации, связанные с подобным предельным переходом, рассмотрены в работах [2–4].

Литература

1. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* М.: УРСС, 2010.

2. Vasilyev V. B. *On certain 3-dimensional limit boundary value problems* // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, No 5. P. 917–925.

3. Vasilyev V., Kutaiba Sh. *Elliptic equations in domains with a cut: certain examples* // Int. J. Appl. Math. 2021. Vol. 34, No 2. P. 339–351.

4. Васильев В. Б. *О некоторых эллиптических краевых задачах в конических областях* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63, № 8. С. 1309–1315.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. Дайняк[1], К.В. Латушкин[1]

[1]Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
dvv162@tut.by, lat.kostyal90@gmail.com

В работе рассматривается следующее дифференциальное уравнения в частных производных

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^5} + a_1\frac{\partial^5 u}{\partial x_0^4 \partial x_1} + b_1\frac{\partial^5 u}{\partial x_0^3 \partial x_1^2} + c_1\frac{\partial^5 u}{\partial x_0^2 \partial x_1^3} + d_1\frac{\partial^5 u}{\partial x_0 \partial x_1^4} + e_1\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^5} +$$

$$+ a_2\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^4 \partial x_2} + b_2\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} + c_2\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} + d_2\frac{\partial^5 u}{\partial x_1 \partial x_2^4} + e_2\frac{\partial^5 u}{\partial x_2^5} +$$

$$+ a_3\frac{\partial^5 u}{\partial x_0^3 \partial x_2^2} + b_3\frac{\partial^5 u}{\partial x_0^2 \partial x_1 \partial x_2^2} + c_3\frac{\partial^5 u}{\partial x_0 \partial x_1^2 \partial x_2^2} + d_3\frac{\partial^5 u}{\partial x_0 \partial x_2^4} + \mathcal{L}_1(x,D)\,u = f(x),$$

$$\mathcal{L}_1(x,D)u = \sum_{i,j=0}^{2} p_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{2} p_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda(x)\,u. \tag{1}$$

Уравнение (1) задается в произвольной ограниченной области Ω 3-х мерного евклидова пространства с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Коэффициенты главной части a_i, b_i, c_i, d_i, e_i – постоянные, коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x,D)$ и их производные $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$ измеримы и ограничены.

Обозначим через $n=(n_0,n_1,n_2)$ единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$. Пусть $\mathcal{L}_0(n)=n_0^5+a_1n_0^4n_1+b_1n_0^3n_1^2+c_1n_0^2n_1^3+d_1n_0n_1^4+e_1n_1^5+a_2n_1^4n_2+b_2n_1^3n_2^2+c_2n_1^2n_2^3+d_2n_1n_2^4+$ $+e_2n_2^5+a_3n_0^3n_2^2+b_3n_0^2n_1n_2^2+c_3n_0n_1^2n_2^2+d_3n_0n_2^4$.

Уравнение (1) рассматривается в области Ω относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega^-}=0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(n)<0$.

Наряду с задачей (1)–(2) рассматривалась сопряженная задача

$$\mathcal{L}'(x,D)v=g(x), \tag{3}$$

$$v|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega^+}=0, \tag{4}$$

где $\partial\Omega^+$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(n)>0$, $\mathcal{L}'(x,D)$ – формально сопряженный к $\mathcal{L}(x,D)$ оператор, имеющий вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}'(x,D)=-\frac{\partial^5}{\partial x_0^5}-a_1\frac{\partial^5}{\partial x_0^4\partial x_1}-b_1\frac{\partial^5}{\partial x_0^3\partial x_1^2}-c_1\frac{\partial^5}{\partial x_0^2\partial x_1^3}-d_1\frac{\partial^5}{\partial x_0\partial x_1^4}-e_1\frac{\partial^5}{\partial x_1^5}-\\ -a_2\frac{\partial^5}{\partial x_1^4\partial x_2}-b_2\frac{\partial^5}{\partial x_1^3\partial x_2^2}-c_2\frac{\partial^5}{\partial x_1^2\partial x_2^3}-d_2\frac{\partial^5}{\partial x_1\partial x_2^4}-e_2\frac{\partial^5}{\partial x_2^5}-\\ -a_3\frac{\partial^5}{\partial x_0^3\partial x_2^2}-b_3\frac{\partial^5}{\partial x_0^2\partial x_1\partial x_2^2}-c_3\frac{\partial^5}{\partial x_0\partial x_1^2\partial x_2^2}-d_3\frac{\partial^5}{\partial x_0\partial x_2^4}+\mathcal{L}_1'(x,D),\end{gathered}$$

$$\mathcal{L}_1'(x,D)=\sum_{i,j=0}^{2}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\sum_{i=0}^{2}p_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}-\lambda(x)u.$$

Для исследования на разрешимость задач (1)–(2) ((3)–(4)) вводится пространство $H^2_{\text{гр}}(\Omega)$ – подпространство пространства Соболева $H^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют условию (2) ((4)) и пространство $H^{-2}_{\text{гр}}$ – сопряженное пространство по отношению к пространству $H^2_{\text{гр}}(\Omega)$. Строится расширение L (L^+) оператора $\mathcal{L}$ $(\mathcal{L}')$ из пространства $H^2_{\text{гр}}(\Omega)$ в $H^{-2}_{\text{гр}}$. Обобщенным решением задач (1)–(2) ((3)–(4)) назовем решение соответсвующих операторных уравнений

$$Lu=f,\ u\in D(L),\ f\in H^{-2}_{\text{гр}},$$

$$L^+v=g,\ v\in D\left(L^+\right),\ g\in H^{-2}_{\text{гр}}.$$

Методом энергетических неравенств и операторов осреднения [1] доказано существование и единственность обобщенного решения задач (1)–(2) ((3)–(4)). Аналогичные задачи для уравнений третьего и пятого порядков рассматривались в работах [2–4].

Условие 1. *Пусть коэффициенты главной части удовлетворяют условию*

$$d_1>0,\ 5c_1^2+4a_1^2d_1<15b_1d_1,\ a_3>0,\ d_3>0,\ 3a_3c_3>b_3^2.$$

Условие 2. *Пусть матрица $P(x)$, составленная из функций $p_{ij}(x)$, и коэффициенты $p_i(x)$, $\lambda(x)$ полинома $\mathcal{L}_1(x,D)$ таковы, что*

$$y^TP(x)y\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial p_i(x)}{\partial x_i}+\lambda(x)<0$$

для всех $x\in\overline{\Omega}$ и $y\in\mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *При выполнении условий 1 и 2 для любых u, v из* $H^2_{гр}(\Omega)$ *справедливы энергетические неравенства*

$$\|u\|_{H^2_{гр}(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H^{-2}_{гр}},$$

$$\|v\|_{H^2_{гр}(\Omega)} \leqslant c^*\|L^+v\|_{H^{-2}_{гр}},$$

где постоянные c, c^* *положительны и не зависят от выбора функций u, v.*

Теорема 2. *При выполнении условий 1 и 2 для любого* $f \in H^{-2}_{гр}$ $\left(g \in H^{-2}_{гр}\right)$ *существует и единственно обобщенное решение* $u \in H^2_{гр}(\Omega)$ $\left(v \in H^2_{гр}(\Omega)\right)$ *задач (1)–(2) ((3)–(4)) и справедливы оценки*

$$\|u\|_{H^2_{гр}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{H^{-2}_{гр}}, \ \|v\|_{H^2_{гр}(\Omega)} \leqslant c^*\|g\|_{H^{-2}_{гр}}.$$

Литература

1. Корзюк, В. И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Минск: БГУ, 2013. 368с.

2. Корзюк В. И., Дайняк В. В., Протько А. А. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник Белорусского государственного университета. Сер.1. 2012. № 3. С. 116–121.

3. Дайняк В. В., Корзюк В. И. *Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 867–872.

4. Дайняк В. В., Латушкин К. В. *Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка* // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXV: материалы Международной Воронежской весенней математической школы. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. С. 103–105.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБА НАНОПЛАСТИНЫ

О.В. Гермидер[1], В.В. Гришин[1], В.Н. Попов[1]

[1]Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,
Набережная Северной Двины 17, 163002 Архангельск, Россия
o.germider@narfu.ru, grishin.v@edu.narfu.ru, v.popov@narfu.ru

Введение. Математическое моделирование прогиба нанопластины с использованием нелокальной модели с отрицательным градиентом деформации второго порядка [1, 2] имеет важное значение при описании напряженно-деформированного состояния наноструктур [3]. Для вычисления малого прогиба защемленной по контуру поперечно нагруженной изотропной нанопластины в рамках этой модели необходима разработка эффективного численного метода решения неоднородного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка с граничными условиями защемления [4]. Одним из перспективных подходов к решению обозначенной проблемы моделирования изгиба и строгого удовлетворения граничным условиям является развитие методов полиномиальной аппроксимации и коллокациии.

В представленной работе в рамках теории отрицательного градиента деформации второго порядка для решения задачи моделирования прогиба защемленной по контуру тонкой ортотропной прямоугольной пластины, находящейся под воздействием нормально распределенной нагрузки по ее поверхности, предлагается новый подход, основанный на разложении решения неоднородного бигармонического уравнения для ортотропной пластины по многочленам Чебышева. Новизна предлагаемого подхода заключается в том, что для нахождения коэффициентов в этом разложении используются свойства многочленов Чебышева, бинарные операции над матрицами. Выбор в качестве узлов коллокации корней этих многочленов позволяет с малой чувствительностью по отношению к вычислительной погрешности находить значения коэффициентов в разложении, а полученное представление искомой функции в этом случае приближается к многочлену наилучшего равномерного приближения [5].

Постановка задачи и построение ее решения Защемленная по контуру прямоугольная изотропная нанопластина ($0 \leqslant x \leqslant d_1, 0 \leqslant y \leqslant d_2, -h/2 \leqslant z \leqslant h/2$) находится под действием распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $q(x,y)$. За срединную плоскость недеформированной нанопластины принимаем плоскость xy. В качестве основного уравнения для описания прогиба нанопластины $\omega(x,y)$ используем дифференциальное уравнение в частных производных, записанное на основе нелокальной теории отрицательного градиента деформации второго порядка в виде [1, 2]:

$$D\left(\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}\right)-l^2D\left(\frac{\partial^6\omega}{\partial x^6}+3\frac{\partial^6\omega}{\partial x^4\partial y^2}+3\frac{\partial^6\omega}{\partial y^4\partial x^2}+\frac{\partial^6\omega}{\partial y^6}\right)=q,$$

где $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость нанопластины при изгибе, h, E – толщина и модуль Юнга изотропной нанопластины, l – нелокальный параметр. Граничные условия для защемленной по контуру нанопластины, обобщающие классические [6], записываем в соответствии с вариационным принципом [2]

$$\omega=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\quad M_{nn}=l^2D\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}+\nu\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2}\right)=0,\quad x=0,d_1,$$

$$\omega=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\quad M_{nn}=l^2D\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial y^3}+\nu\frac{\partial^3\omega}{\partial y\partial x^2}\right)=0,\quad y=0,d_2.$$

Приводим краевую задачу к безразмерному виду и функцию, апроксимирующую решение, представляем в виде разложения в двойные ряды по системам ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Конечные суммы рядов записаны в матричном виде на основе определения тензорного произведения матриц. С использованием корней многочленов в качестве точек коллокаций, граничных условий, свойств многочленов Чебышева, краевую задачу приводим к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в этом разложении.

Заключение. В работе предложен новый подход к построению решения задачи моделирования изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной прямоугольной нанопластины в рамках теории отрицательного градиента деформации второго порядка с использованием многочленов Чебышева первого рода в качестве базисной системы функций при разложении решения краевой задачи и метода коллокации для нахождения коэффициентов в этом разложении. Реализация предложенного подхода сочетает в себе свойства многочленов Чебышева и применение операций над матрицами для достижения высокой точности решения рассматриваемой задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 24-21-00381.

Литература

1. Papargyri-Beskou S., Beskos D. E. *Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates* // Archive of Applied Mechanics. 2008. Vol. 78. P. 625–635.

2. Papargyri-Beskou S., Giannakopoulos A. E., Beskos D. E. *Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading* // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 20. P. 2755–2766.

3. Babu B., Patel B. P. *Analytical solution for strain gradient elastic Kirchhoff rectangular plates under transverse static loading* // European Journal of Mechanics / A Solids. 2019. Vol. 73. P. 101–111.

4. Babu B., Patel B. P. *A new computationally efficient finite element formulation for nanoplates using second-order strain gradient Kirchhoff's plate theory* // Composites Part B. 2019. Vol. 168. P. 302–311.

5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы: учебник*. 9-е изд. Москва: Лаборатория знаний, 2020.

6. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill Press, 1959.

ВАРИАНТЫ ДЕФОРМАЦИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

А.В. Иванов, Н.В. Харук

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, Россия, 191023,
{regul1, natakharuk}@mail.ru

Как известно, см. [1,2], использование пертурбативного подхода при изучении квантово-полевых моделей может приводить к появлению расходящихся величин. Это связано с тем фактом, что обобщенные функции, которые должны рассматриваться на некотором тестовом классе, в действительности действуют на другие обобщенные функции. В итоге, получающиеся комбинации могут содержать не только неинтегрируемые плотности, но и сингулярные функционалы в особых точках. Это приводит к необходимости вводить регуляризацию, которая, как правило, сводится к некоторой деформации функции Грина.

В настоящем исследовании, см. для примера [3-5], рассматривается серия примеров, содержащих «расходимости», изучаются методы их регуляризации, а также предлагается новая регуляризация обрезанием в координатном представлении, удовлетворяющая «условию применимости», которое гарантирует неотрицательность в импульсном представлении. В частности, исследуется семейство деформаций для фундаментального решения оператора Лапласа специального вида.

Работа финансово поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289, и фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

Литература

1. Collins J. C. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*. Cambridge University Press, 1984.
2. Zavialov O. I. *Renormalized quantum field theory*. Dodrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.
3. Ivanov A. V., Kharuk N. V. *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for* φ^3 *model* // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. Т. 487. С. 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.). 2021. Vol. 257, No 4. P. 526–536.
4. Ivanov A. V. *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation* // J. Phys. A: Math. Theor. 2022. Vol. 55. Art. 495401.
5. Ivanov A. V. *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization* // Nucl. Phys. B. 2024. Vol. 1006. Art. 116647. 10.1016/j.nuclphysb.2024.116647

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ИЗ 16-ТИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЧАСТИЦУ ДИРАКА-КЭЛЕРА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А.В. Ивашкевич[1], В.М. Редьков[1]

[1]Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, Пр. Незвисимости 68-2, 220072 Минск,
ivashkevich.alina@yandex.by, v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Исследована релятивистское матричное 16-компонентное уравнение, описывающее частицу Дирака – Кэлера [1, 2] в присутствие внешнего однородного электрического поля. Используется общековариантный тетрадный формализм и цилиндрическая система координат; на решениях диагонализируются операторы энергии, третей проекции полного углового момента γ^a – матрицы Дирака):

$$\Big[i\gamma^0(\partial_t + iEz) + (i\gamma^1\partial_r + \frac{1}{r}\gamma^2 \otimes \sigma^{12}) + \frac{\gamma^2}{r} i\partial_\varphi + i\gamma^3\partial_z - M\Big]\Psi(x) = 0; \qquad (1)$$

решения для волновой функции – биспинора 2-го ранга относительно группы Лоренца ищутся на основе подстановки

$$\Psi(t,r,\varphi,z)=e^{-i\varepsilon t}e^{im\varphi}\Phi(r),\quad \Phi(r)=\begin{vmatrix} f_{11}(r,z) & f_{12}(r,z) & f_{13}(r,z) & f_{14}(r,z)\\ f_{21}(r,z) & f_{22}(r,z) & f_{23}(r,z) & f_{24}(r,z)\\ f_{31}(r,z) & f_{32}(r,z) & f_{33}(r,z) & f_{34}(r,z)\\ f_{41}(r,z) & f_{42}(r,z) & f_{43}(r,z) & f_{44}(r,z)\end{vmatrix}. \tag{2}$$

После разделения переменных выведена система 16-ти уравнений в частных производных по переменным (r,z). Чтобы найти решения системы, используем обобщение метода Федорова – Гронского [3]. В соответствие с этим, полная волновая функция раскладывается в сумму трех составляющих, определяемых проективными оператора, строящимися из 16-мерного генератора третьей проекции спина частицы: $\Psi=\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3$. Зависимость каждой 16-мерной проективной составляющей от переменной r определяется одной соответствующей функцией $F_1(r),F_2(r),F_3(r)$3:

$$\Psi_1=\begin{vmatrix} f_{11}(z)\\ 0\\ A(z)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ C(z)\\ A(z)\\ 0\\ f_{33}(z)\\ 0\\ 0\\ -C(z)\\ 0\\ 0\end{vmatrix}F_1(r),\quad \Psi_2=\begin{vmatrix} 0\\ 0\\ -B(z)\\ 0\\ 0\\ f_{22}(z)\\ 0\\ D(z)\\ B(z)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ D(z)\\ 0\\ f_{44}(z)\end{vmatrix}F_2(r),\quad \Psi_3=\begin{vmatrix} 0\\ f_{21}(z)\\ 0\\ f_{41}(z)\\ f_{12}(z)\\ 0\\ f_{32}(z)\\ 0\\ 0\\ f_{23}(z)\\ 0\\ f_{43}(z)\\ f_{14}(z)\\ 0\\ f_{34}(z)\\ 0\end{vmatrix}F_3(r). \tag{3}$$

На функции $F_1(r),F_1(r),F_1(r)$ накладываются дифференциальные условия связи, которые позволяют результирующую систему уравнений в частных производных преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, зависящих от переменной z. Одновременные связи позволяют найти явный вид трех функций $F_1(r),F_1(r),F_1(r)$; они выражаются через функции Бесселя.

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{(m-1)^2-1/4}{r^2}-c^2\Big)F_1=0,\Big(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{(m+1)^2-1/4}{r^2}-c^2\Big)F_2=0,\Big(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{m^2-1/4}{r^2}-c^2\Big)F_3=0;$$

нужная асимптотика на бесконечности есть только при мнимом параметре: $e^{\pm Cr}\sim e^{\pm iXr}$. Смысл параметра C проясняется, если обратиться к разделению переменных для обычной скалярной частице в электрическом поле

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}-\lambda^2\Big)R(r)Z(z)+\Big(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\varepsilon-Ez)^2-M^2+\lambda^2\Big)R(r)Z(z)=0; \tag{4}$$

откуда заключаем, что что C^2 – это постоянная разделения. Вопрос об установлении оператора, ответственного за этот дополнительный параметр, присутствующий в решениях, требует дополнительного анализа.

Найденная система 16-ти дифференциальных уравнений по переменной z с использованием метода исключения решена точно; построены 4 линейно независимы решения (см. (3)), каждое из них определяется соответствующей основной функцией:

$\underline{f_{11}(z)}, A(z)=0, B(z)=0, C(z)=0, D(z)=0,$

$$f_{12}(z)=0,\quad f_{21}=-\frac{f'_{11}+i(\varepsilon-Ez)f_{11}}{c},\qquad f_{23}(z)=0,\quad f_{32}=0,$$

$$f_{14}(z)=0,\quad f_{41}=\frac{+iMf_{11}}{c},\qquad f_{34}(z)=0,\quad f_{43}=0. \tag{5a}$$

$\underline{f_{44}(z)}, A(z)=0, B(z)=0, C(z)=0, D(z)=0,$

$$f_{12}(z)=0, \quad f_{21}=0, \qquad f_{23}(z)=0, \quad f_{32}=0,$$
$$f_{14}(z)=\frac{-iMf_{44}}{c}, \quad f_{41}=0, \qquad f_{34}(z)=\frac{f_{44}'+i(\varepsilon-Ez)f_{44}}{c}, \quad f_{43}=0. \tag{5b}$$

$\underline{f_{22}(z)}, A(z)=0, B(z)=0, C(z)=0, D(z)=0,$

$$f_{12}(z)=\frac{f_{22}'-i(\varepsilon-Ez)f_{22}}{c}, \quad f_{21}=0, \qquad f_{23}(z)=0, \quad f_{32}=0,$$
$$f_{14}(z)=0, \quad f_{41}=0, \qquad f_{34}(z)=0, \quad f_{43}=0. \tag{5c}$$

$\underline{f_{33}(z)}, A(z)=0, B(z)=0, C(z)=0, D(z)=0,$

$$f_{12}(z)=0, \quad f_{21}=0, \qquad f_{23}(z)=0, \quad f_{32}=0,$$
$$f_{14}(z)=0, \quad f_{41}=0, \qquad f_{34}(z)=0, \quad f_{43}=-\frac{f_{33}'-i(\varepsilon-Ez)f_{33}}{C}. \tag{5d}$$

Основные функции удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{d^2}{dz^2}f_{11}+\Big((\varepsilon-Ez)^2-iE-M^2+C^2\Big)f_{11}=0,$$
$$\frac{6^2}{dz^2}f_{44}+\Big((\varepsilon-Ez)^2-iE-M^2+C^2\Big)f_{44}=0; \tag{7}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}f_{22}+\Big((\varepsilon-Ez)^2+iE-M^2+C^2\Big)f_{22}=0,$$
$$\frac{d^2}{dz^2}f_{33}+\Big((\varepsilon-Ez)^2+iE-M^2+C^2\Big)f_{33}=0/ \tag{7}$$

В переменной $Z=-i(\varepsilon-Ez)^2/E$ они сводятся к вырожденному гипергеометрическому типу.

Литература

1. Редьков В. М. *Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца*. Минск: Белорусская наука, 2009.

2. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Y. A., Balan V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory; Vol II. Physical Problems*. New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.

3. Гронский В. К., Федоров Ф. И. *Магнитные свойства частицы со спином 3/2* // Докл. АН БССР. 1960. Т. 4, № 7. С. 278–283.

ЗАДАЧИ ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк[1,2], О.А. Ковнацкая[1]

[1]Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
[2]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
{Korzyuk,Kovnatskaya}@bsu.by

Постановка задач. В некоторой неограниченной области Q плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ рассматривается полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{D})u(\boldsymbol{x})=a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2u(\boldsymbol{x})+2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(\boldsymbol{x})+c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2u(\boldsymbol{x})+$$
$$+\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x}),\partial_{x_1}u(\boldsymbol{x}),\partial_{x_2}u(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, где a, b, c, f – заданные функции на $\overline{Q}$, $\overline{Q}$ – замыкание области Q. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}\colon Q \ni \boldsymbol{x} \to$ $\to \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1(\boldsymbol{x}), \xi_2(\boldsymbol{x}), \xi_3(\boldsymbol{x}))$ от переменного вектора $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = (\xi_1(\boldsymbol{x}), \xi_2(\boldsymbol{x}), \xi_3(\boldsymbol{x}))$, которая удовлетворяет следующим условию 1 (условию Липшица) и условию 2.

Условие 1. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$ (не зависящая от $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$), для которой и любых векторов $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) = (\eta_1(\boldsymbol{x}), \eta_2(\boldsymbol{x}), \eta_3(\boldsymbol{x}))$ из $\mathbb{R}^3$ выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}))| \leqslant L \|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{R}^3} = L \left(\sum_{j=1}^{3} (\xi_j(\boldsymbol{x}) - \eta_j(\boldsymbol{x}))^2 \right)^{1/2}.$$

Условие 2. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$, не зависящая от $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$, для которой и любых векторов $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$ из $\mathbb{R}^3$ выполняются неравенства*

$$|\partial_{x_j} \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})) - \partial_{x_j} \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}))|,\ |\partial_{\xi_k} \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})) - \partial_{\eta_k} \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}))| \leqslant$$
$$\leqslant L \|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{R}^3},\ j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3.$$

Условие 3. *На замыкании $\overline{Q}$ области Q, на котором задано уравнение (1), уравнение (1) для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$ является строго гиперболическим.*

При выполнении условия 3 уравнение (1) имеет два семейства характеристик

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = const,\ \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = const,$$

т. е. через каждую точку $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$ проходят две характеристики из разных семейств (по одной из каждого семейства).

Условие 4. *Две произвольные характеристики $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C^{(1)}$ и $\psi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C^{(2)}$ из разных семейств могут пересекаться только в одной точке.*

Задача Гурса для уравнения (1) состоит в том, что границей ∂Q области Q является характеристика или две характеристики, части их. На границе и в некоторых случаях на характеристиках (частях их) внутри области задаются условия Дирихле.

С учетом условий 1–4 рассмотрим четыре вида заданных областей Q, представленных в заштрихованном виде на рисунках 1–4.

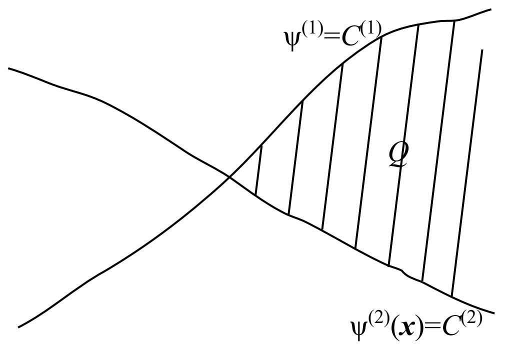

Рис. 1.

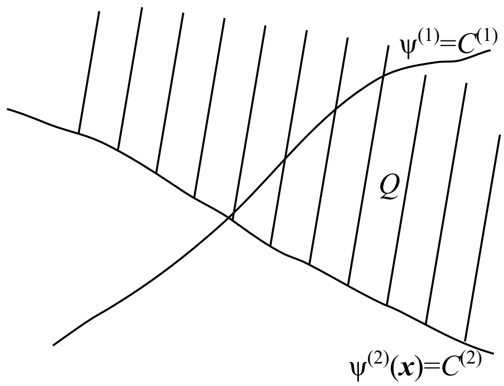

Рис. 2.

С учетом представленных на этих рисунках областей Q рассмотрим четыре вида условий Гурса

$$u|_{\psi^{(1)}(\boldsymbol{x})=C^{(1)}} = \mu^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \overline{Q},$$
$$u|_{\psi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C^{(2)}} = \mu^{(2)}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \overline{Q}. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{D}(\mu^{(j)}) \subset \overline{Q}$, $j = 1, 2$, области определения функций $\mu^{(j)}$, через $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ точку пересечения характеристик $\psi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = C^{(j)}$, $j = 1, 2$, т. е. $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)})$ и $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \overline{Q}$.

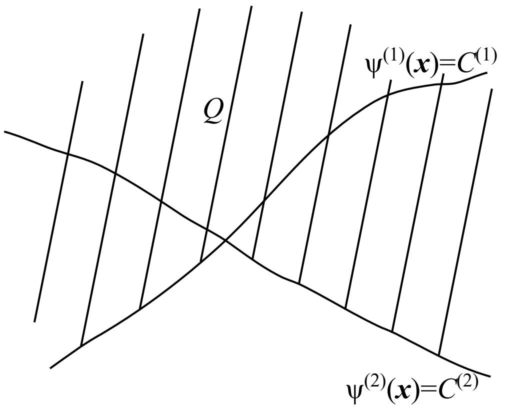

Рис. 3.

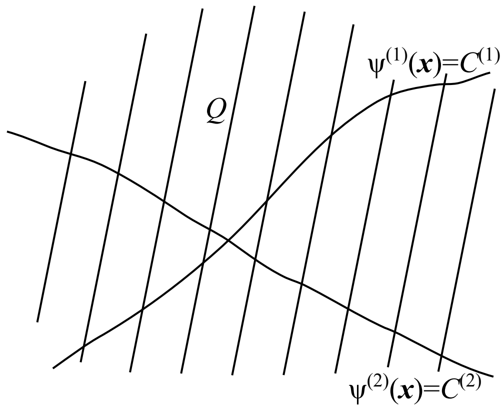

Рис. 4.

Условие 5. *Заданные функции* $\mu^{(j)}$, $j=1,2$, *таковы, что их значения в общей точке совпадают, т. е.*

$$\mu^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)})=\mu^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{3}$$

Определение 1. *Функцию и из класса* $C^2(\overline{Q})$ *назовем классическим решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2).*

Теорема 1. *Пусть функции a, b, c уравнения (1) принадлежат множеству* $C^2(\overline{Q})$; $f,\mathcal{L}^{(1)}\in$ $\in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(j)}\in C^2(\mathcal{D}(\mu^{(j)}))$, $j=1,2$ *и выполняются условия 1–5. Тогда классическое решение и задачи (1), (2) из класса* $C^2(\overline{Q})$ *функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых на замыкании* $\overline{Q}$ *области Q, существует и единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования (3).*

Для доказательства теоремы 1 задача (1), (2) сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором и решение *u* строится методом последовательных приближений. Проводятся все необходимые обоснования.

Задача в области Q, представленной на рис. 4, подробно рассмотрена в статье [1].

Литература

1. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А. *Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 4. С. 391–396.

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦЕ

Ф.Е. Ломовцев[1], **В.В. Лысенко**[1]

[2]Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
lomovcev@bsu.by, valery.sholomitskaya@gmail.com

Физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательных смешанных (начально-граничных) задач проводится с целью поиска их множества зависимости, т.е. множества изменения независимых переменных в исходных данных задач и коэффициентах уравнения и краевых условий. В ней определяющей составляющей является геометрическая интерпретация решений, в которой нуждается решение и исследование смешанных задач о колебаниях ограниченной струны с помощью результатов исследования вспомогательных смешанных задач о колебаниях полуограниченной струны. Физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны неявно всегда присутствует в указанных множествах существования и единственности классических решениях основных смешанных задач для ограниченной струны, если даже она не называется физико-геометрической. В процессе поиска классических решений смешанных задач для ограниченной струны методом Ломовцева Ф.Е. вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны неизбежно проводится физико-геометрическая интерпретация, потому что в этом новом методе правые части волновых уравнений и начальные данные основных смешанных задач никак не продолжаются по x с отрезка $[0,d]$ на всю вещественную ось Ox. Вспомогательная смешанная задача для двухскоростного волнового уравнения с $a_1 \neq a_2$ при нестационарных нехарактеристических вторых частных производных на конце полуограниченной струны и глобальная теорема её корректности по Адамару с явными формулами классического решения приведены в [1]. Эта глобальная теорема корректности с полными, окончательными и не улучшаемыми требованиями гладкости и условиями согласования нашей вспомогательной смешанной задачи доказана в [2] при $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$ и цитируется в [3] при $b_1 = b_2 = 0$. Физико-геометрическая интерпретация классического решения вспомогательной смешанной задачи для односкоростного волнового уравнения с $a_1 = a_2 = a > 0$ при нестационарной нехарактеристической первой косой производной на конце полуограниченной струны установлена в [4, с. 55–60]. Физико-геометрическая интерпретация классического решения задачи Коши для односкоростного волнового уравнения с $a_1 = a_2 = a > 0$ нам известна из учебника [5]. В случае нехарактеристических первых и вторых косых производных в граничных условиях на конце полуограниченной струны критерии корректности смешанных задач не зависят от младшей части общего двухскоростного волнового уравнения, т.е. от коэффициентов b_1 и b_2 волновых уравнений соответственно из [4] и [1; 2]. Поэтому можно давать физико-геометрическую интерпретацию классических решений этих нехарактеристических смешанных задач только для главной части волнового уравнения, так как из неё легко выводится аналогичная физико-геометрическая интерпретация классических решений нехарактеристических смешанных задач для волнового уравнения с младшей частью.

В теоремах 1 и 2 настоящей работы изложена физико-геометрическая интерпретация классического решения вспомогательной смешанной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных нехарактеристических вторых частных производных в граничном режиме. Для классического решения $u_-(x,t)$ этой вспомогательной нехарактеристической смешанной задачи на замыкании $\overline{G_-}$ множества $G_- \subset G_\infty$ из [1] она характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 из [2]. Произведение значения решения $u_-(M)$ в вершине $M = M(x_0,t_0) \in \overline{G_-}$ характеристического треугольника ΔMPQ на сумму скоростей $a_1 + a_2$ прямой и обратной волн равно сумме произведений начального смещения $\varphi(x)$ в точке $Q(x_0 + a_2t_0, 0)$ на a_1 и в точке $P(x_0 - a_1t_0, 0)$ на a_2, плюс криволинейный интеграл вдоль основания PQ этого характеристического треугольника от начальной скорости $\psi(x)$ и плюс двойной интеграл по характеристическому треугольнику ΔMPQ от плотности вынуждающей силы $f(x,t)$.*

Физико-геометрические интерпретации классических решений $u_+(M)$ и $u_-(M)$ вспомогательной нехарактеристической смешанной из [1] для вершин $M = M(x_0,t_0) \in G_+$ на критической характеристике $x = a_1t$ совпадают, так как эти решения равны на $x = a_1t$.

Физико-геометрическую интерпретацию решения $u_+(x,t)$ вспомогательной нехарактеристической смешанной задачи во внутренних точках $\dot{G}_+$ множества $G_+ \subset G_\infty$ из [1] дает

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 из [2]. В каждой точке $M = M(x_0,t_0) \in \dot{G}_+$ классическое решение нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) полностью и однозначно определяется начальным смещением $\varphi(x)$ и ее первыми двумя производными $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, начальной скоростью $\psi(x)$ и ее первой производной $\psi'(x)$ для $x \in [0, a_2t_0']$, плотностью вынуждающей силы $f(x,t)$ на четырехугольнике $MQ'OQ$ первой четверти плоскости G_∞, граничным данным $\mu(t)$ и коэффициентами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\zeta(t)$, $\xi(t)$, $\theta(t)$ для времени $t \in$ $\in [0,t_0']$, $t_0' = t_0 - (x_0/a_1)$.*

Теорема 2 следует из указанных ниже двух утверждений, так как $MQ'Q_1Q \subset MQ'OQ$.

Утверждение 1. *Пусть верны предположения теоремы 1 из [2]. Произведение значения* $\Phi(M)+F_2(M)$ *из [1] в вершине* $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ *характеристического треугольника* $\triangle MPQ$ *на сумму скоростей* a_1+a_2 *прямой и обратной волн равно сумме произведений начального смещения* $\varphi(x)$ *в точках* $Q(x_0+a_2t_0,0)$ *и* $O(0,0)$ *соответственно на* a_1 *и* a_2, *плюс криволинейный интеграл вдоль отрезка* OQ *от начальной скорости* $\psi(x)$ *и плюс двойной интеграл по трапеции* $MQ'Q_1Q$ *от плотности вынуждающей силы* $f(x,t)$.

Утверждение 2. *Пусть верны предположения теоремы 1 из [2]. Значение оставшегося слагаемого в* $u_+(M)$ *из [1] в вершине* $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ *характеристического треугольника* $\triangle MPQ$ *полностью и однозначно определяется начальным смещением* $\varphi(x)$ *и ее первыми двумя производными* $\varphi'(x),\varphi''(x)$, *начальной скоростью* $\psi(x)$ *и ее первой производной* $\psi'(x)$ *для* $x\in\in[0,a_2t_0']$, *плотностью вынуждающей силы* $f(x,t)$ *на четырехугольнике* $MQ'OQ$ *первой четверти плоскости* G_∞, *граничным данным* $\mu(t)$ *и коэффициентами* $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t),\ \zeta(t),\xi(t),\theta(t)$ *для времени* $t\in[0,t_0']$, $t_0'=t_0-(x_0/a_1)$.

Литература

1. Лысенко В. В., Ломовцев Ф. Е. *Физико-геометрическая интерпретация классических решений смешанной задачи для волнового уравнения с нехарактеристическими вторыми производными на конце полуограниченной струны* // Современные методы теории краевых задач / Материалы Международной Воронежской весенней математической школы: XXXV ВВМШ «Понтрягинские чтения - XXXV». (26–30 апреля 2024г., Воронеж, ВГУ). / ВГУ, МГУ им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова, АО «Концерн «Созвездие». Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. С. 233–238.

2. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. *Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2019. № 3(104). С. 5–17.

3. Lomovtsev F. E., Lysenko V. V. *Mixed Problem for Inhomogeneous Wave Equation of Bounded String with Noncharacteristic Second Derivatives in Non-Stationary Boundary Modes* // Journal of Applied Mathematics and Computation. 2023. Vol. 7(1). P. 65–82. DOI: 10.26855/jamc.2023.03.007

4. Новиков Е. Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук (01.01.02). Институт математики НАН Беларуси. Минск, 2017. 258 с.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 2004. 798 с.

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

А.Н. Миронов

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Казанская 89, 423600 Елабуга, Россия,
miro73@mail.ru

Уравнением Бианки назовем уравнение

$$L(u)\equiv\frac{\partial^n u(x)}{\partial x_1\dots\partial x_n}+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant n-1,\\ \alpha_s\leqslant 1,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}=f(x), \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ — длина мультииндекса, $u(x)$ — искомая функция, a_α, f — заданные функции.

В статьях [1], [2] для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка исследованы существование и единственность решения задачи Дарбу, построены решения задач Дарбу в терминах функций Римана — Адамара.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями X_i: $x_i=0$, S: $x_n=x_1$, $i=\overline{2,n-1}$, и плоскостями $x_j=x_j^0>0$, $j=\overline{1,n}$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_\alpha\in C^\alpha(\overline{D})$, $f\in C$ в замыкании рассматриваемой области D. Класс $C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}(\overline{D})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_n}/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\ldots\partial x_n^{l_n}$, $l_i=\overline{0,q_i}$, $i=\overline{1,n}$, на множестве $\overline{D}$.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_{\overline{X}_i}=\varphi_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n-1}, u|_{\overline{S}}=\psi(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$
$$\varphi_i\in C^{(1,1,\ldots,1)}(\overline{X}_i),\quad \psi\in C^{(1,1,\ldots,1)}(\overline{S}). \tag{1}$$

При этом должны выполняться условия согласования $\varphi_i|_{x_j=0}=\varphi_j|_{x_i=0}=$ *по всем* $i,j=\overline{1,n-1}$*;* $\varphi_i|_{x_n=x_1}=\psi|_{x_i=0}$, $i=\overline{2,n-1}$*;* $\varphi_1|_{x_n=0}=\psi|_{x_1=0}$.

Следуя идее из [3, гл. 3, § 1, пункт 2°], докажем существование и единственность решения задачи Дарбу. Формула решения задачи Гурса [4, § 3, пункт 2, с. 73–79] рассматривается как представление произвольного регулярного решения уравнения (1). Из указанной формулы выводится интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n^0)$ на плоскости $x_n=x_n^0$, из существования и единственности решения которого следует существование и единственность решения задачи Дарбу.

Определена функция Римана — Адамара задачи Дарбу. В терминах функции Римана — Адамара построено решение указанной задачи.

Литература

1. Миронов А. Н. *Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 1. С. 64–71.

2. Миронов А. Н. *Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 3. С. 349–363.

3. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981.

4. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001.

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И ДВУМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТР ЭНЕРГИИ

Е.М. Овсиюк

Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Студенческая 28, 247760, Мозырь, Беларусь, e.ovsiyuk@mail.ru

В работах [1, 2] было предложено релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами. Было показано, что в отсутствие внешних полей такое обобщенное уравнение для фермиона распадается на два обычных уравнения Дирака. В присутствии внешних электромагнитных полей происходит смешивание двух биспинорных компонент Ψ_1 и Ψ_2 в едином уравнении. Цель настоящего сообщения – исследовать такую частицу во внешнем кулоновском поле, найти волновые функции и спектр энергии.

Обобщенное уравнение в кулоновском поле имеет вид (используются сферические координаты)

$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t-\frac{\alpha}{r}\right)+i\gamma^3\partial_r+\frac{1}{r}\Sigma_{\theta\varphi}-M_1+i\frac{\beta_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_1-i\frac{\alpha_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\Psi_2=0,$$

$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t-\frac{\alpha}{r}\right)+i\gamma^3\partial_r+\frac{1}{r}\Sigma_{\theta\varphi}-M_2-i\frac{\alpha_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_2+i\frac{\beta_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\Psi_1=0,$$

$$\Sigma_{\theta,\varphi}=i\gamma^1\partial_\theta+\gamma^2\frac{i\partial_\varphi+i\sigma^{12}\cos\theta}{\sin\theta}\ .$$

Строим решения с квантовыми числами ε, j, m ($D^{j}_{-m,\sigma}(\varphi,\theta,0)$ – функции Вигнера; $j = 1/2, 3/2, ...; m = -j, ..., +j$)

$$\Psi_1(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1/2} \\ f_2(r)D_{+1/2} \\ f_3(r)D_{-1/2} \\ f_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_2(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} g_1(r)D_{-1/2} \\ g_2(r)D_{+1/2} \\ g_3(r)D_{-1/2} \\ g_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

После разделения переменных получаем систему из 8 радиальных уравнений. Она допускает ограничения, соответствующие диагонализации оператора пространственного отражения: $f_3 = \delta f_2$, $f_4 = \delta f_1$, $g_3 = \delta g_2$, $g_4 = \delta g_1$, $\delta = \pm 1$; таким образом, находим две системы по 4 уравнения. Достаточно исследовать детально только случай $\delta = +1$. В переменных $f = (f_2 + f_1)$, $F = i(f_2 - f_1)$, $g = (g_2 + g_1)$, $G = i(g_2 - g_1)$ имеем ($\nu = j + 1/2$)

$$\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\Big)F - \Big(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} - M_1\Big)f - \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0, \ \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\Big)f + \Big(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} + M_1\Big)F + \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0,$$

$$\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)G - \Big(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} - M_2\Big)g + \frac{\beta_2}{r^2}F = 0, \ \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)g + \Big(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} + M_2\Big)G - \frac{\beta_2}{r^2}f = 0.$$

С помощью первых двух уравнений исключаем переменные $G(r)$ и $g(r)$; в результате получаем уравнения для функций f, F; приводим только их общий вид

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} + \Big(\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr} + b + \frac{b_1}{r} + ... + \frac{b_4}{r^4}\Big]f + \Big(M\frac{d}{dr} + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3}\Big)F = 0,$$

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} + \Big(\frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr} + B + \frac{B_1}{r} + ... + \frac{B_4}{r^4}\Big]F + \Big(M\frac{d}{dr}f + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3}{r^3}\Big)f = 0.$$

Из этой системы получаем уравнения 4-го порядка со следующей структурой:

$$\frac{d^4F}{dr^4} + \Big(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r^2} + \frac{m_3r^5 + m_4r^4 + m_5r^3 + m_6r^2 + m_7r + m_8}{P}\Big)\frac{d^3F}{dr^3} +$$
$$+ \Big(n_0 + \frac{n_1}{r} + \frac{n_2}{r^2} + \frac{n_3}{r^3} + \frac{n_4}{r^4} + \frac{n_5r^5 + n_6r^4 + n_7r^3 + n_8r^2 + n_9r + n_{10}}{P}\Big)\frac{d^2F}{dr^2} +$$
$$+ \Big(\frac{p_1}{r} + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_3}{r^3} + \frac{p_4}{r^4} + \frac{p_5}{r^5} + \frac{p_6r^5 + p_7r^4 + p_8r^3 + p_9r^2 + p_{10}r + p_{11}}{P}\Big)\frac{dF}{dr} +$$
$$+ \Big(q_0 + \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r^2} + \frac{q_3}{r^3} + \frac{q_4}{r^4} + \frac{q_5}{r^5} + \frac{q_6}{r^6} + \frac{q_7\, r^5 + q_8\, r^4 + q_9\, r^3 + q_{10}\, r^2 + q_{11}\, r + q_{12}}{P}\Big)F = 0,$$

где P – полином 6-й степени; все коэффициенты сложные, их явный вид опускается.

Дальше ищем решения на основе подстановки $F = e^{Kr} r^H e^{L/r} \tilde{F}$; для K находим выражения

$$K_1 = \pm\sqrt{{M_1}^2 - \varepsilon^2} < 0, \quad K_2 = \pm\sqrt{{M_2}^2 - \varepsilon^2} < 0;$$

используем только отрицательные значения для K, которые могут соответствовать связанным состояниям. Накладывая дополнительные ограничения, фиксируем остальные параметры подстановки: $L = 0$, $H = +\sqrt{\nu^2 - \alpha^2} > 0$. Уравнение для $\tilde{F}$ имеет вид

$$\big(P_{11}r^{11} + P_{10}r^{10} + P_9r^9 + P_8r^8 + P_7r^7 + P_6r^6 + P_5r^5\big)\,\tilde{F}'''' +$$
$$+ \big(Q_{11}r^{11} + Q_{10}r^{10} + Q_9r^9 + Q_8r^8 + Q_7r^7 + Q_6r^6 + Q_5r^5 + Q_4r^4 + Q_3r^3\big)\,\tilde{F}''' +$$
$$+ \Big(M_{11}r^{11} + M_{10}r^{10} + M_9r^9 + M_8r^8 + M_7r^7 + M_6r^6 + M_5r^5 + M_4r^4 + M_3r^3 + M_2r^2 + M_1r\Big)\tilde{F}'' +$$
$$+ \Big(N_{11}r^{11} + N_{10}r^{10} + N_9r^9 + N_8r^8 + N_7r^7 + N_6r^6 + N_5r^5 + N_4r^4 + N_3r^3 + N_2r^2 + N_1r + N_0\Big)\tilde{F}' +$$
$$+ \Big(L_{10}r^{10} + L_9r^9 + L_8r^8 + L_7r^7 + L_6r^6 + L_5r^5 + L_4r^4 + L_3r^3 + L_2r^2 + L_1r + L_0\Big)\tilde{F} = 0.$$

Решения строятся в виде степенных рядов с 12-членными рекуррентными соотношениями

$$Q_{k-10}d_{k-10} + Q_{k-9}d_{k-9} + ... + Q_kd_k + Q_{k+1}d_{k+1} = 0.$$

Условие трансцендентности [3, 4] $Q_{k-10} = 0$ дает

$$L_{10} + N_{11}(k-10) = 0, \quad k - 10 = n = 1, 2, \ldots > 0 \quad \Longrightarrow$$

$$-4(M_1 - \varepsilon)(M_2 + \varepsilon)(M_1 - M_2)^2\{(k - 9 + H)K^3 + \alpha\varepsilon K^2 +$$

$$+[(k-9+H)\varepsilon^2 + (4 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}H)M_1{}^2 - \frac{1}{2}(k - 10 + H)M_2{}^2]K - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon(M_1{}^2 + M_2{}^2 - 2\varepsilon^2)\} = 0,$$

полученное уравнение приводит к спектрам

$$I. \quad K = -\sqrt{M_1^2 - \varepsilon^2}, \, H = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}, \quad \varepsilon = \pm \frac{M_1}{\sqrt{1 + \alpha^2/(k - 10 + \sqrt{\nu^2 - \alpha^2})^2}};$$

$$II. \quad K = -\sqrt{M_2^2 - \varepsilon^2}, \, H = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}, \quad \varepsilon = \pm \frac{M_2}{\sqrt{1 + \alpha^2/(k - 8 + \sqrt{\nu^2 - \alpha^2})^2}};$$

они являются типичными для кулоновской задачи, и могут рассматриваться как физические спектры для частицы с двумя массовыми параметрами.

Литература

1. Kisel V. V., Pletyukhov V. A., Gilewsky V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. *Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20, No 4. P. 404–423.
2. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Ya. A., Red'kov V. M., Kisel V. V., Samsonenko N. V. *Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field* // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. 2019. No 1. P. 651–660.
3. Ronveaux A. *Heun's differential equation*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
4. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special functions. A unified theory based on singularities*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСШИРЕННО НЕЙТРАЛЬНОГО ПО ХИКСУ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А.Ф. Проневич[1], Г.А. Хацкевич[2]

[1]Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, pranevich@grsu.by
[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. П.Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь, g.a.khatskevich@gmail.com

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t), \tag{1}$$

где y — выпуск продукции, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t — параметр времени из полуоткрытого числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n\}$.

Цель данной работы — предложить концепцию расширенной нейтральности по Хиксу в многофакторном случае (для случая $n = 2$ см., например, [1, с. 121–122; 2 – 4]) и установить аналитические виды динамических многофакторных ПФ, учитывающих расширенно нейтральный по Хиксу НТП. Способ построения динамических многофакторных ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Статья продолжает исследования авторов [3 – 7] по изучению аналитических форм динамических ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками [8, с. 47–77]: средние и предельные производительности факторов производства, эластичности по факторам производства, предельная норма технического замещения, эластичность замещения.

Будем говорить, что НТП является *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* x_i и x_j, $i, j \in \{1,\ldots,k\}$, $i \neq j$, $k \leqslant n$, если предельная норма технического замещения $MRTS_{ij}(f)$ фактора производства x_i фактором x_j не зависит от параметра t НТП, т.е.

$$MRTS_{ij}(f) = \frac{\partial_{x_i} f(x,t)}{\partial_{x_j} f(x,t)} = h_{ij}(x), \tag{2}$$

где h_{ij} — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на экономической области G.

Если условие нейтральности (2) выполняется при всех индексах $i, j = 1,\ldots,k$, $i \neq j$, $k \leqslant n$, то скажем, что НТП является *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k$, а при $k = n$ — просто *расширенно нейтральным по Хиксу*.

Основные результаты работы выражают следующие утверждения.

Теорема 1 (критерий НТП, расширенно нейтрального по Хиксу). *Динамическая многофакторная ПФ* (1) *учитывает расширенно нейтральный НТП по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k$, $k \leqslant n$, *если и только если верны тождества*

$$\partial_t MRTS_{ij}(f) = 0 \quad \forall (x,t) \in G \times T, \quad i, j = 1,\ldots,k, \ i < j, \ k \leqslant n.$$

Теорема 2 (аналитический вид ПФ, учитывающий расширенно нейтральный по Хиксу НТП). *Динамическая многофакторная ПФ* (1) *учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства* $x_1,\ldots,x_k$, $k \leqslant n$, *НТП тогда и только тогда, когда многофакторную ПФ* (1) *можно представить в аналитической форме*

$$f(x,t) = \Phi\big(\Psi(x), x_{k+1},\ldots,x_n,t\big) \quad \forall (x,t) \in G \times T,$$

где функции Φ (*неотрицательная*) *и* Ψ *являются непрерывно дифференцируемыми.*

Следствие 1 [2]. *Для того, чтобы динамическая многофакторная ПФ* (1) *учитывала расширенно нейтральный по Хиксу НТП необходимо и достаточно, чтобы она имела форму*

$$f(x,t) = \Phi\big(\Psi(x),t\big) \quad \forall (x,t) \in G \times T.$$

Теорема 3. *Однородная степени* $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ПФ* (1) *учитывает расширенно нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме*

$$f(x,t) = A(t)\,\Theta(x) \quad \forall (x,t) \in G \times T,$$

где Θ *— некоторая неотрицательная однородная степени* q *непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающая функция* A *такая, что* $A(0) = 1$, *есть индекс НТП.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (НИР «*Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь*», договор с БРФФИ № Г23-089 от 02.05.2023 г., № ГР 20221093).

Литература

1. Hicks J. R. *The theory of wages*. London: Macmillan, 1932.

2. Blackorby Ch., Lovell C. A. K., Thursby M. C. *Extended Hicks neutral technical change* // The Economic Journal. 1976. Vol. 35, No 344. P. 845–852.

3. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение* // Белорусский экономический журнал. 2020. № 3. С. 87–105.

4. Проневич А. Ф. *Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу* // Вестник ЦЭМИ РАН. 2020. № 3. С. 4–27.

5. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс* // Вестник ин-та экономики НАН Беларуси. 2022. Вып. 4. С. 9–27.

6. Проневич А. Ф. *О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс* // Экономика и математические методы. 2023. Т. 59, № 1. С. 23–28.

7. Проневич А. Ф., Хацкевич Г. А. *Концепция нейтральности научно-технического прогресса по Хиксу для многофакторных производственных функций* // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2023. Вып. 17. С. 84–93.

8. Клейнер Г. Б. *Производственные функции: теория, методы, применение*. М.: Финансы и статистика, 1986.

О НОВЫХ ТИПАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ МЕЛЛИНА-БАРНСА

С.В. Рогозин[1], **М.В. Дубатовская**[1]

[1]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {rogosinsv,marina.dubatovskaya}@gmail.com

Введение. В настоящей работе обсуждаются определения и свойства специальных функций, обобщающих функции гипергеометрического типа. Общим для этого нового семейства специальных функций является возможность их представления интегралом Меллина-Барнса.

Одно из возможных определений функций гипергеометрического типа - их задание в виде степенных рядов, коэффициенты которых представляют собой отношения Гамма-функций Эйлера. Таким способом задаются, например, функция Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{1}$$

и ее много-параметрические обобщения $E_{(\alpha_j,\beta_j)_n}(z)$, гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a,b,c;z)={}_2F_1(a,b,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!}z^k$$

и обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q\left(\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{array};z\right)$, функция Райта

$$\varphi(\alpha,\beta;z)={}_0\Psi_1\left[\begin{array}{c}\ldots\ldots\\(\beta,\alpha)\end{array}\Big|z\right]={}_0W_1\left[\begin{array}{c}\ldots\ldots\\(\beta,\alpha)\end{array}\Big|z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!}$$

и обобщенная функция Райта ${}_pW_q\left[\begin{array}{c}(a_j,\alpha_j)_{1,q}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\Big|z\right]$, а также многие другие более общие специальные функции (см., например, [1, App. F]).

Указанные выше функции допускают также представления в виде интегралов Меллина-Барнса. Так для функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $\alpha>0,\beta\geq 0$ такое представление имеет вид

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_{-\infty}}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}ds,\ |\arg z|<\pi, \tag{2}$$

где контур интегрирования $\mathcal{L}_{-\infty}$ это кривая, которая начинается в точке $-\infty-i\varphi$ и оканчивается в точке $\infty+i\varphi$ с дотаточно малым $\varphi>0$, пересекая вещественную ось в точке $c, 0<c<1$. Однозначная ветвь функции $(-z)^{-s}$ определяется в плоскости с разрезом вдоль отрицательной полу-оси и

$$(-z)^{-s}=\exp\{-s[\log|z|+i\arg(-z)]\},$$

где $\arg(-z)$ - произвольная фикированная ветвь функции $\operatorname{Arg}(-z)$.

В начале XX века наряду с функцией Миттаг-Леффлера (1) Эдмундом Ле Руа при исследовании вопроса о поведении аналитического продолжения степенных рядов была введена следующая функция (позднее названная функцией Ле Руа)

$$R_\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{[(k+1)!]^\gamma},\quad z\in\mathbb{C}.$$

В последние годы в связи с исследованием ряда вопросов (в частности, при анализе распределения Конвея-Максвела-Пуассона) была введена более общая функция типа Ле Руа (см., например, [1, Sec. 5.3], [2] и приведенный там обзор работ других авторов)

$$F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{[\Gamma(\alpha k+\beta)]^{\gamma}},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

Формально говоря, функция типа Ле Руа (3) не относится к функциям гипергеометрического типа поскольку при нецелом значении параметра γ коэффициенты ряда (3) содержат не отношения Гамма-функций, а их нецелые степени. Тем не менее, функция типа Ле Руа допускает представление интегралом Меллина-Барнса следующего вида

$$F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\beta+\alpha s)]^{\gamma}}(-z)^s ds+\frac{1}{[\Gamma(\beta)]^{\gamma}},\ |\arg z|<\pi, \tag{4}$$

при специально выбранном контуре $\mathcal{L}$ (см. [3]). Подынтегральная функция в (4) содержит не только отношение/произведение Гамма-функций, но и их степени.

Другой тип новых специальных функций возникает при дифференцировании функции типа Ле Руа $F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ по параметру γ. Соответствующее представление задает следующая

Лемма. *Функция типа Ле Руа (3) дифференцируема по параметру* γ *для всех* $\alpha, \mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{C},\gamma>0$ *и имеет место следующее равенство*

$$\frac{\partial F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}(z)}{\partial\gamma}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln\Gamma(\alpha k+\beta)}{[\Gamma(\alpha k+\beta)]^{\gamma}}z^k. \tag{5}$$

Для доказательства формулы (5) устанавливается равномерная сходимость ряда в правой части (5) относительно всех параметров в соответсвтующих областях.

В работе исследуются (следуя схеме [4]) свойства много-параметрических функций, представимых степенным рядом, коэффициенты которого - отношение произведений Гамма-функций, степеней Гамма-функций и логарифмов Гамма-функций (или, что равносильно - представимых интегралом Меллина-Барнса, подынтегральная функция которого содержит отношение произведений Гамма-функций, степеней Гамма-функций и логарифмов Гамма-функций).

Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2025 № 1.7.01.4.

Литература

1. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, 2nd ed. Berlin: Springer, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8

2. Garrappa R., Rogosin S., Mainardi F. *On a Generalized Three-Parameter Wright Function of Le Roy Type* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20, No 5. C. 1196–1215. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0063.

3. Rogosin S., Dubatovskaya M. *Multi-Parametric Le Roy Function* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2023. Vol. 26, No 1. C. 54–69. https://doi.org/10.1007/s13540-022-00119-y.

4. Rogosin S., Dubatovskaya M. *Multi-Parametric Le Roy Function Revisited* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2024. Vol. 27, No 1. C. 64–81. https://doi.org/10.1007/s13540-023-00221-9.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ОПУХОЛЬ-ИММУНИТЕТ

Ж.О.Тахиров[1]

[1]Институт математики АН РУз, Университетская 9, 100174 Ташкент, Узбекистан,
prof.takhirov@gmail.com

Введение. Некоторые локальные тканевые клетки биологической системы теряют свою нормальную регуляцию или во время роста заражаются определенными вирусами и затем становятся опухолевыми клетками

Математические модели, состоящие из ОДУ [1] и УЧП [2], широко использовались для изучения сложной динамики опухолей и иммунной системы. Были достигнуты различные ценные результаты, и эти результаты имеют важные теоретические и клинические последствия в исследовании опухолей. Например, в [3] авторы представляют аналитический подход для описания и установления решений системы уравнений пористой среды, показывая приложения в инвазивной биологической динамике. Кроме того, представлены интересные аналитические результаты, касающиеся инвазивных систем с нелинейной диффузией и адвекцией.

Предварительные результаты. Математические модели опухолево-иммунных взаимодействий обеспечивают аналитическую основу для изучения опухолево-иммунной динамики. В работе [4] авторы представляют математическую модель трех обыкновенных дифференциальных уравнений для описания взаимодействий опухолевых иммунных клеток, уделяя особое внимание роли естественных клеток-киллеров (NK) и CD8+ цитотоксических T-лимфоцитов (CTL) в иммунном надзоре.

Предлагаемая в [4] модель основана на следующих основных предположениях:

1) NK-клетки присутствуют и активны в организме хозяина постоянно, даже при отсутствии опухолевых клеток;

2) В рамках адаптивного иммунитета ЦТЛ встречаются в больших количествах только тогда, когда опухолевые клетки присутствуют в организме хозяина;

4) NK-клетки и CTL способны убивать опухолевые клетки. Но ЦТЛ играют ведущую роль в уничтожении опухоли как часть адаптивного иммунитета;

5) Когда иммунная система сталкивается с опухолевыми клетками, некоторое количество NK-клеток и CTL становятся неактивными, но не наносят повреждения клеткам.

Использованы $N(t), L(t)$ и $T(t)$ для обозначения количества NK-клеток, CTL и опухолевых клеток. Модель, описывающих рост, смерть и взаимодействие этих популяций, определяется следующим образом:

$$N'(t) = aN(t)(1-bN(t)) - \alpha_1 N(t)T(t),$$
$$L'(t) = rN(t)T(t) - \mu L(t) - \beta_1 L(t)T(t),$$
$$T'(t) = cT(t)(1-dT(t)) - \alpha_2 N(t)T(t) - \beta_2 L(t)T(t),$$

с начальными условиями $N(0) = N_0 \geqslant 0$, $L(0) = L_0 \geqslant 0$ и $T(0) = T_0 \geqslant 0$.

Все параметры $a, b, c, d, r, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ являются положительными константами.

Модель со свободной границей. На основе (1) мы предлагаем следующую модель, которая контролирует пространственно-временную эволюцию системы, а также свободные границы.Мы используем $u(t,x), v(t,x)$ и $w(t,x)$ для обозначения количества NK-клеток, CTL и опухолевых клеток в момент времени t соответственно. Модель со свободной границей для систем параболических уравнений, определяется следующим образом:

$$u_t - (d_1(u)u_x)_x = au(t,x)(1-bu(t,x)) - \alpha_1 u(t,x)w(t,x), \quad (t,x) \in Q,$$
$$vt - (d_2(v)v_x)_x = rv(t)w(t,x) - \mu v(t,x) - \beta_1 v(t,x)w(t,x), \quad (t,x) \in D,$$
$$wt - (d_3(w)w_x)_x = cw(t,x)(1-dw(t,x)) - \alpha_2 u(t,x)w(t,x) - \beta_2 v(t,x)w(t,x), \quad (t,x) \in D,$$
$$v(t,x) = w(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \notin (g(t) < x < h(t)),$$
$$g'(t) = -\mu wx(t,g(t)), \quad h'(t) = -\mu wx(t,h(t)), \quad t > 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x), -l < x < l, v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), -h_0 < x < h_0, h(0) = -g(0) = h_0.$$

Здесь $Q = \{(t,x) : 0 < t, -l < x < l\}, D = \{(t,x) : 0 < t, g(t) < x < h(t)\}$, все начальные функции и параметры положительны; $x = g(t)$ и $x = h(t)$ — движущиеся неизвестные границы, представляющие фронты распространения опухоли и определяемые совместно с $u(t,x)$, $v(t,x)$, $w(t,x)$.

Доказано существование, единственность и равномерные оценки глобального решения, а также поведение компонент решения и неизвестной границы на больших интервалах времени. С использованием базового репродуктивного числа R_0 исследованы условия распространения или исчезновения опухоли.

Литература

1. Lai X., Friedman A. *Combination therapy of cancer with cancer vaccine and immune checkpoint inhibitors: A mathematical model* // PLoS ONE. 2017. Vol. 12, No 5. doi: 10.1371/journal.pone.0178479

2. Lopez A. G., Seoane J. M, Sanjuan M. A.F. *Dynamics of the cell-mediated immune response to tumour growth* // Phil. Trans. R. Soc. A. 2017. No 375. doi: 10.1098/rsta.2016.0291

3. Palencia J., Gonzalez J., Rahman S. U., Redondo A. N. *Regularity, Asymptotic Solutions and Travelling Waves Analysis in a Porous Medium System to Model the Interaction between Invasive and Invaded Species* // Mathematics. 2022. Vol. 10, No 7. doi: 10.3390/math10071186

4. Song G., Tian T., Zhang X. *A mathematical model of cell-mediated immune response to tumor* // Mathematical Biosciences and Engineering. 2020. Vol. 18, No 1. P. 373–385. doi: 10.3934/mbe.2021020

ИЗОСПЕКТРАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА И БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ КВАНТОВЫХ БИЛЛИАРДОВ

С.А. Титаренко

Санкт-Петербургская торгово-промышленная палата, Чайковского 46, 191123 Санкт-Петербург, Россия,
titarenko.sa@gmail.com

В 90-х гг. в матфизике были найдены важные примеры **неизометричных** областей $\Omega \not\approx \widetilde{\Omega}$, у которых спектры лапласиана $-\Delta W_n = E_n W_n, W_n\mid_{\partial\Omega} = 0, Spec(\Omega) = \{0 < E_1 < E_2 \leq \ldots\}$ **совпадают** как счетные множества $Spec(\Omega) = Spec(\widetilde{\Omega})$. На рис.1 приведены такие изоспектральные многоугольники из [1], целая галерея примеров дана в [2]. Эта спектральная задача есть уравнение Шрёдингера для квантового биллиарда: частица перемещается в Ω как бильярдный шар, отражаясь от стенок $\partial\Omega$, $W_n =$ волновые функции, $E_n =$ энергии частицы. Обзор [3] стал для автора первым шагом в многолетней разработке общего метода для неизометричных $\Omega \not\approx \widetilde{\Omega}$, но изоспектральных $\Omega \sim \widetilde{\Omega}$ биллиардов (см. полные доказательства в [4]). Подытожим его основные результаты:

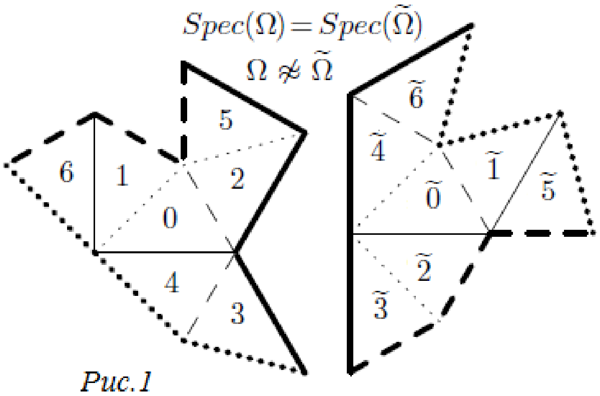

Рис.1

Теорема. *Существует ровно 2 реализации изоспектральности $\Omega \sim \widetilde{\Omega}$: I) изометрия $\Omega \approx \widetilde{\Omega}$; II) многозначная изометрия $\mathbf{T}$: тогда Ω и $\widetilde{\Omega} = \mathbf{T}\Omega$ — m-клеточные области из m изометричных клеток Φ и все подобласти $\omega = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\omega, \omega \subset \Omega$ имеют изоспектральный образ $\omega \sim \mathbf{T}\omega$.*

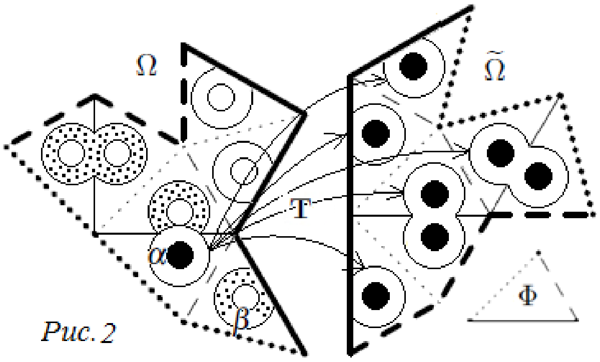

Рис. 2

Случай II охватывает любые примеры, включая [1-2]. 7 черных кругов в $\widetilde{\Omega}$ на рис.2 есть несвязный образ $\mathbf{T}\alpha$ черного круга $\alpha \subset \Omega$. Он найден переносом α в клетки $\widetilde{\Omega}$ и размножением отражениями, ибо многозначная $\mathbf{T}$ на каждой паре клеток есть обычная изометрия. Аналогично находится изоспектральный $\mathbf{T}\alpha$ биллиард $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\alpha$ =6 белых и 1 черный круг в Ω. Так неограниченно генерируются новые примеры: в биллиардах, вынесенных на рис.3, в качестве α взята новая подобласть Φ внутри треугольной клетки. Распространяя изоспектральность на все подмножества $\omega = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\omega$, к которым относятся и их пересечения, объединения, дополнения и замыкания, получаем алгебру $\mathbf{S}$ открыто-замкнутых подмножеств с единицей Ω. Например, на рис.2 изоспектральны и несвязные биллиарды из 7 кругов (либо из 2 очков и 3 обрезанных кругов), и их дополнения – многоугольники с 7 (либо с 5) дырками. Алгебра $\mathbf{S}$ для несвязной топологии согласно теореме Стоуна [5] изоморфна полной булевой алгебре. Тогда подмножества $\mathbf{T}\alpha \subset \widetilde{\Omega}$ трактуются как представления подмножеств-высказываний $\alpha \subset \Omega$, заменяя логические операции на операции с множествами: конъюнкция $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \mathbf{T}\alpha_1 \cap \mathbf{T}\alpha_2$; отрицание $A\alpha \to \widetilde{\Omega} \backslash \mathbf{T}\alpha$ и т.д. Для двойного отрицания $D\alpha =$ $= \Omega \backslash (\mathbf{T}^{-1} A\alpha) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\alpha$ получаем $\alpha \subseteq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\alpha = D\alpha$, где «=» дает закон исключенного третьего. Это обобщение соответствует корпускулярно-волновому дуализму в квантовой теории: «частица есть корпускула» «И» «частица есть волна» $= \alpha \wedge \beta$ (α и β на рис.2 представлены в Ω кругами из 7-кругового биллиарда). Эти высказывания несовместны $\alpha \wedge \beta = \emptyset$ для исключенного третьего, но совместны для обобщения: $\alpha \wedge \beta \to \mathbf{T}\alpha \cap \mathbf{T}\beta = \mathbf{T}\alpha \cap \mathbf{T}\alpha = \mathbf{T}\alpha \neq \emptyset$. Расширение черного круга α до большого белого круга дает модель диалектического перехода количества в качество: топология несвязного образа $\mathbf{T}\alpha$ в $\widetilde{\Omega}$ скачком изменяется с 7- на 5-компонентную.

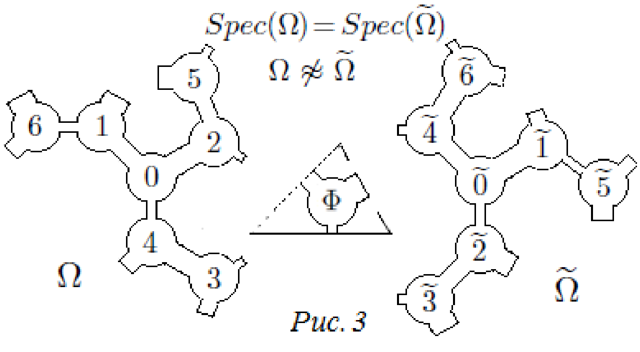

Рис. 3

Литература

1. Buser P. *Some planar isospectral domains* // Int. Math. Res. Notices. 1994. Vol. 9. P. 391–400.

2. Giraud O., Thas K. *Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality* // Reviews of Modern Physics. 2010. Vol. 82. P. 2213–2255.

3. Титаренко С. А. *Теорема Сунады и последние продвижения в обратной задаче спектральной геометрии* // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. С. 14–38.

4. Титаренко С. А. *Можно услышать форму почти любого барабана!* // Препринт С.-Петербургского Матем. Общ., 2020. № 04.

5. Владимиров Д. А. *Булевы алгебры*. М.: Наука, 1969.

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОСЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦАХ

Е.В. Устилко[1], **Ф.Е. Ломовцев**[2].

[1]Белорусский государственный технологический университет,
Свердлова 13а, 220006 Минск, Беларусь, ustilko@tut.by
[2]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, lomovtsev23@mail.ru

Смешанная (начально-граничная) задача (1)–(3), гладкость коэффициентов и входных данных задачи указаны в [1]. В настоящей работе даны классические решения этой смешанной задачи для двухскоростного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных режимах с характеристическими первыми частными производными:

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k)+a_2\varphi_k(x-a_1t_k)+\int\limits_{x-a_1t_k}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu+\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\right],$$

$$u_{3k-1}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k)-a_1\varphi_k\left(a_2\left(t_k-\frac{x}{a_1}\right)\right)+\int\limits_{a_2(t_k-x/a_1)}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu\right]+$$

$$+\frac{1}{\gamma_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)}\left[\mu_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-a_1\Phi_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\Psi_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\mathfrak{F}_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right]+F_{1,k}(x,t),$$

$$u_{3k}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\varphi_k(x-a_1t_k)-a_2\varphi_k\left(d-a_1\left(t_k-\frac{d-x}{a_2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-a_1t_k}^{d-a_1(t_k-(d-x)/a_2)}\psi_k(\nu)d\nu\right]+\frac{1}{\gamma_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)}\left[\mu_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)+a_2\Phi_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\Psi_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\mathfrak{F}_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)\right]+F_{2,k}(x,t),\ t_k=t-d_k,\ k=\overline{1,n},\ n=1,\ 2,...,$$

в которых используются частные классические решения $F_{i,k}(x,t)$ неоднородного двухскоростного ($a_1\neq a_2$) волнового уравнения без младшей части (1) и следующие функции

$$F_{i,k}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[(-1)^i\int\limits_{d_k}^{t_i^*(x)}\int\limits_{x-(-1)^ia_{3-i}(t-\tau)}^{\hat{d}_i-(-1)^ia_{3-i}[t_i^*(x)-\tau]}f(s,\tau)dsd\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_i^*(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\right],i=1,2,\ t_1^*(x)=t_2(x),\ t_2^*(x)=t-\frac{d-x}{a_2},$$

$$\Phi_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\varphi'\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}t_k\right),\ \Psi_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\psi\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}t_k\right),$$

$$\mathfrak{F}_{i,k}(t)\equiv\alpha_i(t)\int\limits_{d_k}^{t}f\left(\hat{d}_i+(-1)^{i+1}a_{3-i}(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}].$$

Здесь u_{3k-2}, u_{3k-1}, u_{3k} – сужения решения u соответственно на Δ_{3k-2}, Δ_{3k-1}, Δ_{3k} вида

$$\Delta_{3k-2} = \{(x,t) \in G_k :\ x \geqslant a_1 t_k,\ x + a_2 t_k \leqslant d,\ x \in [0,d]\},$$
$$\Delta_{3k-1} = \{(x,t) \in G_k :\ x \leqslant a_1 t_k,\ x \in [0, a_1 d_2]\},$$
$$\Delta_{3k} = \{(x,t) \in G_k :\ x + a_2 t_k \geqslant d,\ x \in [a_1 d_2, d]\},$$
$$G_k = [0,d] \times [d_k, d_{k+1}], d_k = (k-1)d/(a_1+a_2), t_k = t - d_k,\ k = \overline{1,\ n},$$

с рекуррентными начальными данными:

$$\varphi_k(x) = u_{3k+j-4}|_{t=d_k}, \psi_k(x) = \partial_t u_{3k+j-4}|_{t=d_k}, x \in [a_1 j d_2,\ (a_1 + a_2 j)d_2],\ j = 0,1,\ k = \overline{2,n},$$
$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \ \psi_1(x) = \psi(x),\ \ x \in [0,\ d].$$

Разработанным методом в статьях [2] и [3] выведены условия согласования данных задачи:

$$J_{i,1} \equiv \alpha_i(0)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i(0),$$
$$J_{i,2} \equiv \alpha_i'(t)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \alpha_i(0)\{a_2[\psi'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi''(\hat{d}_i)] + f(\hat{d}_i, 0)\} +$$
$$+ \gamma_i'(0)\varphi(\hat{d}_i) + \gamma_i(0)\psi(\hat{d}_i) = \mu_i'(0),$$
$$J_{i,q+1} \equiv \Big\langle \alpha_i^{(q)}(0)[\psi(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi'(\hat{d}_i)] + \gamma_i^{(q)}(0)\varphi(\hat{d}_i) \Big\rangle +$$
$$+ q\Big\langle \alpha_i^{(q-1)}(0)\left\{(-1)^{i+1} a_{3-i}[\psi'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi''(\hat{d}_i)] + f(\hat{d}_i, 0)\right\} + \gamma_i^{(q-1)}(0)\psi(\hat{d}_i) \Big\rangle +$$
$$+ \sum_{s=2}^{q} C_q^s \Big\langle \alpha_i^{(q-s)}(0) \Big\{ ((-1)^{i+1} a_{3-i})^s [\psi^{(s)}(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi^{(s+1)}(\hat{d}_i)] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-1} ((-1)^{i+1} a_{3-i})^j f^{(j;s-j-1)}(\hat{d}_i, 0) \Big\} +$$
$$+ \gamma_i^{(q-s)}(0) \Big\{ \frac{a_{3-i}^s - (-a_i)^s}{a_1 + a_2} \psi^{(s-1)}(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \frac{a_{3-i}^{s-1} - (-a_i)^{s-1}}{a_1 + a_2} \varphi^{(s)}(\hat{d}_i) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-2} \frac{a_{3-i}^{j+1} - (-a_i)^{j+1}}{a_1 + a_2} f^{(j;s-j-2)}(\hat{d}_i, 0) \Big\} \Big\rangle = \mu_i^{(q)}(0), q = 2,3,\ldots,n-1.$$
$$J_{i,n+1} \equiv a_i \Phi_{i,k}^{(n)}(0) + \Psi_{i,k}^{(n)}(0) + \mathfrak{F}_{i,k}^{(n)}(0) + \gamma_i^{(n)}(0)\varphi(\hat{d}_i) + n\gamma_i^{(n-1)}(0)\psi(\hat{d}_i) +$$
$$+ \sum_{s=2}^{n} C_n^s \gamma_i^{(n-s)} \Big\langle \frac{a_{3-i}^s - (-a_i)^s}{a_1 + a_2} \psi^{(s-1)}(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \frac{a_{3-i}^{s-1} - (-a_i)^{s-1}}{a_1 + a_2} \varphi^{(s)}(\hat{d}_i) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-2} \frac{a_{3-i}^{j+1} - (-a_i)^{j+1}}{a_1 + a_2} f^{(j;s-j-2)}(\hat{d}_i, 0) \Big\rangle = \mu_i^{(n)}(0), \hat{d}_1 = 0, \hat{d}_2 = d, i = 1,2.$$

Замечание. Впервые получены необходимые и достаточные гладкость и согласование правых частей уравнения (1) при $a_1 \neq a_2$, начальных (2) и граничных (3) условий для классических решений задачи (1)–(3) с характеристическими косыми производными.

Литература

1. Устилко Е. В., Ломовцев Ф. Е. *Глобальная теорема корректности смешанной задачи для классических решений волнового уравнения с нестационарными характеристическими косыми производными ограниченной струны* // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV : материалы Международной Воронежской весенней математической школы (26–30 апреля 2024 г.). Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. С. 353 – 354.

2. Устилко Е. В., Ломовцев Ф. Е. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. Т. 1. С. 30–37.

3. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Смешанная задача для двухскоростного волнового уравнения с характеристической косой производной на конце полуограниченной струны* // Математические заметки. 2024. Т. 116, № 3, С. 411–429.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.В. Филиновский[1,2]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул, 5, 105005 Москва, Российская Федерация,
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ул. Колмогорова, 1, Москва, 119991 Москва, Российская Федерация, flnv@yandex.ru

В неограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей Γ рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega), \quad u_t(x,0) = g \in L_2(\Omega), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Для решений задачи (1) — (3) из "энергетического класса" ($u \in C([0,+\infty) \to \overset{0}{H}{}^1(\Omega))$, $u_t \in \in C([0,+\infty) \to L_2(\Omega))$) справедливо представление в виде интеграла Бохнера-Стилтьеса (см. [1], п. 3.1, лемма 3.1, [2], лемма 1):

$$u = \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{\lambda}t)dE(\lambda)f + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}dE(\lambda)g, \tag{4}$$

где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, соответствующее оператору $L = -\Delta$ с граничным условием Дирихле в $L_2(\Omega)$.

Определим для задачи (1) — (3) функционал энергии $\mathcal{E}(t) = |||\mathrm{grad}_{n+1}u|||^2_{L_2(\Omega)}$, $\mathrm{grad}_{n+1}u = = (\nabla_x u, u_t)$, для которого выполняется "закон сохранения энергии" $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$, а также функционал локальной энергии $\mathcal{E}_{\Omega'}(t) = |||\mathrm{grad}_{n+1}u|||^2_{L_2(\Omega')}$, где $\Omega' \subset \Omega$.

В нашем случае спектр оператора $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \subset [0,+\infty)$, где $\sigma_p(L)$ — точечный, а $\sigma_c(L)$ — непрерывный спектр. В ([3], глава 5, лемма 2.4) было показано, что при $\sigma_p(L) = \emptyset$ для любой ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ найдется последовательность $\{t_k\}$, такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\Omega'}(t_k) = 0. \tag{5}$$

Из представления (4) и тауберовых теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.([1] п. 3.4, теорема 3.2, [2], теорема 5) *Если оператор L не имеет точечного спектра, то для всех ограниченных областей* $\Omega' \subset \Omega$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{E}_{\Omega'}(\tau)d\tau = 0. \tag{6}$$

Можно показать, что из равенства (6) следует (5).

Спектр самосопряженного оператора L называется *абсолютно непрерывным* $\sigma(L) = \sigma_{ac}(L)$, если для любого $h \in L_2(\Omega)$ функция $(E(\lambda)h, h)$ абсолютно непрерывна по λ (см. [1]).

Теорема 2. ([1] п. 3.5, теорема 3.4, [2], теорема 6) *Если спектр оператора L абсолютно непрерывен, то для всех ограниченных областей* $\Omega' \subset \Omega$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}_{\Omega'}(\tau) = 0.$$

Для того, чтобы получить оценки при $t \to +\infty$ скорости убывания функции $\mathcal{E}_{\Omega'}$, удобно перейти при помощи преобразования Лапласа

$$v(x,k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(x,t)dt, \quad \Im k > 0,$$

к стационарной задаче для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = ikg - f, \quad x \in \Omega,$$

$$v|_\Gamma = 0.$$

Для исследования поведения функции $\mathcal{E}_{\Omega'}$ при $t \to \infty$ чаще всего используют свойства аналитического продолжения функции v в нижнюю полуплоскость $\{\Im k < 0\}$. Однако, во многих задачах (особенно в случае некомпактных границ) вопрос о существовании такого продолжения остается открытым. Одним из утверждений, позволяющих получать оценки u при $t \to \infty$ на основании свойств функции v в верхней полуплоскости $\{\Im k > 0\}$ является классическая теорема Пэли-Винера.

Будем предполагать, что поверхность Γ "звездна относительно начала координат", то есть $(\nu, x) \leqslant 0$ на Γ. Будем также считать, что начальные функции f и g гладкие и имеют ограниченный носитель.

Теорема 3. ([4]) *Если $n \geqslant 6$ и поверхность Γ звездна относительно начала координат, то для решения задачи (1) — (3) справедлива оценка*

$$\int_0^{+\infty} t^2 dt \int_\Omega \frac{|\mathrm{grad}_{n+1} u|^2}{|x|^4} dx \leqslant C_1, \tag{6}$$

где постоянная C_1 зависит от f и g.

Из (6), в частности, следует, что для ограниченных областей $\Omega' \subset \Omega$

$$\mathcal{E}_{\Omega'}(t) \leqslant \frac{C_2}{t^2}.$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РНФ в рамках научного пректа 20-11-20272.

Литература

1. Филиновский А.В. *Стабилизация и спектр в задачах распространения волн* // В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа, под ред. И.В. Асташовой. Москва: Юнити-Дана, 2012. С. 280–463.

2. Filinovskiy A.V. *Stabilization and spectrum in operator differential equations* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. Вып 3(60). С. 3–19.

3. Лакс П., Филлипс Р. *Теория рассеяния*. Москва: Мир, 1971.

4. Филиновский А. В. *О скорости убывания решений волнового уравнения в области со звездной границей* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2007. Вып. 26. С. 391–407.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ РОСТА ЕГО РЕШЕНИЯ

М.В.Фролова[1], Е.А.Михайлов[1], Ю.А.Тихонов[1]

[1] Московский государственный университет,Ленинские горы, д. 1, 119991 , Москва, Российская Федерация
pashentceva.mv17@physics.msu.ru

Крупномасштабные магнитные поля астрофизических объектов описываются с помощью усредненных уравнений магнитной гидродинамики [1]. Как их разрешимость, так и оценка поведения поля представляют собой важную задачу как с точки зрения математической физики, так и для астрономических приложений. В настоящей работе рассмотрена задача о генерации магнитных полей в дисках большой толщины [2]. Предполагается, что она должна существенно более точно описывать поведение магнитного поля в галактиках и аккреционных дисках, чем широко применяемое в настоящее время планарное приближение [3], построенное на основе предположения о малой толщине диска.

Поведение магнитного поля $\mathfrak{B}(t,r,z)$ при $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $-\lambda \leqslant z \leqslant \lambda$ описывается с помощью эволюционного уравнения [4]:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \widehat{L}_{r,z}\mathfrak{B}, \tag{1}$$

с условиями

$$\mathfrak{B}|_{r=0} = \mathfrak{B}|_{r=1} = \mathfrak{B}|_{z=-\lambda} = \mathfrak{B}|_{z=\lambda} = 0;\ \mathfrak{B}|_{t=0} = \varphi(r,z) \tag{2}$$

Оператор $\widehat{L}_{r,z}$ имеет вид:

$$\widehat{L}_{r,z} = D^{1/2} + hD^{1/2}z\frac{\partial}{\partial z} + \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda^2}{r^2}; \tag{3}$$

где D – так называемое динамо-число, описывающее соотношение между крупномасштабным вращением диска и турбулентными движениями.

С целью исследования поведения магнитного поля необходимо решить задачу на собственные значения [4] для оператора $\widehat{L}_{r,z}$:

$$\gamma B = \widehat{L}_{r,z}B;\ 0 < r < 1;\ -\lambda < z < +\lambda;$$

$$B|_{r=0} = B|_{r=1} = B|_{z=-\lambda} = B|_{z=\lambda} = 0.$$

Нами было получено, что спектр оператора лежит в области $\gamma < \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \frac{D^{1/2}(4-2h) - \pi^2}{4} + \frac{h^2D}{2\sqrt{10}} - \lambda^2\mu_{1,1}; \tag{4}$$

также были получены асимптотики для собственных значений. Кроме того, проведена численная верификация данных оценок: решена спектральная задача для разностного аналога данного оператора, получены собственные значения и отвечающие им собственные функции.

Исследование свойств данного дифференциального оператора позволило нам показать, что исходная задача является равномерно корректной по Крейну [5], а также сформулировать и доказать теорему, описывающую эволюционные свойства магнитного поля.

Теорема Решение нестационарной задачи (1)-(3) существует, единственно, а его норма при любом фиксированном t удовлетворяет условию:

$$||\mathfrak{B}(t,r,z)|| \leqslant C\exp(\gamma_0 t),$$

где γ_0 определяется выражением (4), а C – константа, определяемая начальными условиями.

С точки зрения приложений это означает, что в случае, когда $\omega > 0$, можно ожидать экспоненциального роста магнитного поля. В противном случае спектр оператора $\widehat{L}_{r,z}$ лежит в левой полуплоскости, а крупномасштабные структуры поля могут лишь разрушаться.

Литература

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике.* Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт космических исследований, 2006.

2. Михайлов Е.А., Пашенцева М.В. *Задача на собственные значения для динамо в толстом диске и порог генерации магнитного поля* // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2022. № 5. С. 65–69.

3. Moss D. *On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions*// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1995. Vol. 275, No 1. P. 191–194.

4. Mikhailov E., Pashentseva M. *Eigenvalue problem for a reduced dynamo model in thick astrophysical discs*// Mathematics. 2023. Vol. 11, No 14. Art. 3106.

5. Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1967.

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ ДЛЯ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА И СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МАКСВЕЛЛА

В.В. Шумилова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, пр. Вернадского 101-1, 119526 Москва, Россия,
v.v.shumilova@mail.com

Введение. Усреднению уравнений акустики для двухфазных сред, состоящих из твердого материала и вязкой ньютоновской жидкости, посвящено довольно большое число работ (см., например, [1–4] и ссылки в них). Однако с точки зрения практических приложений наибольший интерес представляют твердо-жидкие среды, у которых жидкая часть состоит из неньютоновской жидкости. К числу наиболее изученных линейных моделей неньютоновских вязкоупругих жидкостей относятся модели Кельвина-Фойгта и Максвелла. Усредненные уравнения динамики для сред, состоящих из упругого материала и несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта, были выведены в [5], а для среды, состоящей из упругого материала и слабосжимаемой жидкости Максвелла – в [6].

В данной работе рассматривается начально-краевая задача, описывающей колебания двухфазной среды с ε-периодической структурой. Одна фаза такой среды состоит из изотропного упругого материала, а другая фаза — из сжимаемой вязкоупругой жидкости Максвелла. Для данной задачи при $\varepsilon \to 0$ выводится соответствующая ей усредненная задача — начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений находятся с помощью решений вспомогательных периодических задач на единичном кубе.

Исходная и усредненная модели двухфазной среды. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненную двухфазной средой с периодической структурой. Периодом этой среды является куб $Y_\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω. Разобьем Y на два открытых подмножества Y_1 и Y_2 с гладкой общей границей Γ: $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Введем множества

$$E_s = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} (Y_s \cup (\partial Y_s \cap \partial Y) + k), \quad s = 1,2.$$

Обозначим $\Omega_{s\varepsilon} = \Omega \cap \varepsilon E_s$ и считаем, что множество $\Omega_{1\varepsilon}$ занято изотропным упругим материалом, а множество $\Omega_{2\varepsilon}$ — сжимаемой вязкоупругой жидкостью Максвелла.

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в области Ω, имеют вид

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon), \quad a_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad x \in \Omega_{1\varepsilon},$$

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = -\delta_{ij} p^\varepsilon + S^\varepsilon_{ij}, \quad \tau\partial_t S^\varepsilon_{ij} + S^\varepsilon_{ij} = 2\eta e_{ij}(\partial_t u^\varepsilon), \quad x \in \Omega_{2\varepsilon},$$

где $u^\varepsilon(x,t)$ – вектор перемещений; σ^ε – тензор напряжений; $e(u^\varepsilon)$ – тензор малых деформаций: $e_{kh}(u^\varepsilon) = e^x_{kh}(u^\varepsilon) = (\partial u^\varepsilon_k/\partial x_h + \partial u^\varepsilon_h/\partial x_k)/2$; a – тензор модулей упругости; λ и μ – параметры Ламе; $\mu > 0$; $3\lambda + 2\mu > 0$; S^ε – девиатор тензора напряжений; $p^\varepsilon(x,t)$ – давление; $p^\varepsilon = -\gamma \operatorname{div} u^\varepsilon$; γ – объемный модуль упругости; τ – время релаксации; η – коэффициент вязкости; δ_{ij} – символ Кронекера. Отметим, что везде предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а индексы i,j,k,h принимают значения от 1 до 3.

Начально-краевая задача, описывающая движение двухфазной среды в Ω, имеет вид

$$\rho_s \partial_{tt} u^\varepsilon_i = \frac{\partial \sigma^\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t) \ \text{ в } \ \Omega_{s\varepsilon} \times (0,T), \quad s = 1,2,$$

$$[u^\varepsilon]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma^\varepsilon_{ij} n_j]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad u^\varepsilon(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon(x,0) = \partial_t u^\varepsilon(x,0) = 0,$$

где $\rho_s = \text{const} > 0$ – плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$; $f(x,t) \in H^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ – вектор объемной силы; $[g]|_{\Gamma_\varepsilon}$ – скачок функции g при переходе через поверхность $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$; $n = (n_1,n_2,n_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности Γ_ε.

С помощью метода преобразования Лапласа доказывается, что $u^\varepsilon(x,t) \to u(x,t)$ в $(L^2(\Omega))^3$ для всех $t \in [0,T]$, где $u(x,t)$ – решение усредненной задачи

$$\rho_0 \partial_{tt} u_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t) \ \text{ в } \ \Omega \times (0,T), \ \ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0,$$

в которой $\rho_0 = |Y_1|\rho_1 + |Y_2|\rho_2$, $\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(u) - g_{ijkh}(t) * e_{kh}(u)$, через $*$ обозначена операция свертки по переменной t, а компоненты тензоров α и $g(t)$ находятся по формулам

$$\alpha_{ijkh} = |Y_1| a_{ijkh} + \gamma |Y_2| \delta_{ij}\delta_{kh} + \frac{\eta|Y_2|}{\tau}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) +$$
$$+ \int_{Y_1} a_{ijlm} e^y_{lm}(Z^{kh})\, dy + \int_{Y_2} \left(\gamma \delta_{ij} \operatorname{div}_y Z^{kh} + \frac{2\eta}{\tau} e^y_{ij}(Z^{kh}) \right) dy,$$

$$g_{ijkh}(t) = \frac{\eta|Y_2|}{\tau^2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \int_{Y_1} a_{ijlm} e^y_{lm}(W^{kh})\, dy - \gamma\delta_{ij} \int_{Y_2} \operatorname{div}_y W^{kh}\, dy +$$
$$+ \frac{2\eta}{\tau} \int_{Y_2} \left(-e^y_{ij}(W^{kh}) + \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) * e^y_{ij}(W^{kh}) + \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) e^y_{ij}(Z^{kh}) \right) dy.$$

Здесь $Z^{kh}(y) \in (H^1_{\text{per}}(Y))^3$ и $W^{kh}(y,t) \in L^\infty(0,T;(H^1_{\text{per}}(Y))^3)$ – решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma^{(1)}_{ij}(Z^{kh})\right) = 0 \quad \text{в } \ Y, \ \ \int_Y Z^{kh}\, dy = 0, \ \ [\sigma^{(1)}_{ij}(Z^{kh})\nu_j]|_\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma^{(2)}_{ij}(W^{kh})\right) = 0 \ \text{ в } \ Y \times (0,T), \ \ \int_Y W^{kh}\, dy = 0, \ \ [\sigma^{(2)}_{ij}(W^{kh})\nu_j]|_\Gamma = 0,$$

где ν_j – компоненты единичного вектора нормали к поверхности Γ,

$$\sigma^{(1)}_{ij}(Z^{kh}) = a_{ijkh} + a_{ijlm} e^y_{lm}(Z^{kh}), \ \ \sigma^{(2)}_{ij}(W^{kh}) = a_{ijlm} e^y_{lm}(W^{kh}), \ \ y \in Y_1,$$

$$\sigma^{(1)}_{ij}(Z^{kh}) = \gamma\delta_{ij}(\delta_{kh} + \operatorname{div}_y Z^{kh}) + \frac{\eta}{\tau}(2e^y_{ij}(Z^{kh}) + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \ \ y \in Y_2,$$

$$\sigma^{(2)}_{ij}(W^{kh}) = -\frac{\eta}{\tau^2}\left(2e^y_{ij}(Z^{kh}) + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) +$$
$$+ \gamma\delta_{ij} \operatorname{div}_y W^{kh} + \frac{2\eta}{\tau} e^y_{ij}(W^{kh}) - \frac{2\eta}{\tau^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) * e^y_{ij}(W^{kh}), \ \ y \in Y_2.$$

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

Литература

1. Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний.* М.: Мир, 1984.

2. Gilbert R. P., Mikelić A. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I* // Nonlinear Analysis. 2000. Vol. 40, No 1. P. 185–212.

3. Clopeau Th., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II* // Math. and Comput. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 821–841.

4. Мейрманов А. М. *Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсента в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористывх средах* // Сиб. мат. журнал. 2007. Т. 48, № 3. С. 645–667.

5. Шамаев А. С., Шумилова В. В. *Усреднение уравнений движения среды, состоящей из упругого материала и несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта* // Уфимский матем. журнал. 2024. Т. 16, № 1. С. 99–110.

6. Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. *Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла* // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 3. С. 170–188.

ЭКРАНИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТЕННЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, gsys@grsu.by

В условиях массового использования электротехнических, электронных и радиоэлектронных приборов и оборудования во всех сферах человеческой деятельности актуальной проблемой является электромагнитная безопасность окружающей среды и жизнедеятельности человека [1]. Для обеспечения благоприятной электромагнитной обстановки производится электромагнитное экранирование [2–5]. Под экранированием понимается защита от воздействия внешних полей, локализация излучения каких-либо объектов с целью уменьшения его проявления в окружающей среде.

Пусть в пространстве R^3 находится тонкостенный круговой цилиндрический экран Γ толщиной Δ и вытянутый эллипсоид, ограниченный поверхностью S. Область пространства между экраном Γ и поверхностью S обозначим через D_1, D_2 – внешняя область по отношению к экрану Γ.

Тонкостенный экран Γ выполнен из материала с электромагнитными параметрами ε, μ, γ: ε – диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость, γ – удельная электрическая проводимость. Область D_m, $m = 1, 2$, заполнена средой с магнитной проницаемостью μ_m.

В точке O_1, которая находится в области D_2, расположен источник поля – тонкая нить с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток I. Для постановки граничной задачи в точках O, O_1 введем соответственно декартовы координаты $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ с одинаково направленными осями координат. Точка O – центр вытянутого эллипсоида S.

Декартовы координаты $Oxyz$, введенные в точке O, связаны с вытянутыми вырожденными эллипсоидальными координатами $O\alpha\beta\varphi$ соотношением

$$x = csh\alpha\sin\beta\cos\varphi, \quad y = csh\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z = cch\alpha\cos\beta,$$

где $0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, c - масштабный множитель, $c > 0$,
и с цилиндрическими координатами $O\rho\varphi z$ –

$$x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi, \; z = z,$$

где $0 \leqslant \rho < \infty, \; -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \; -\infty < z < \infty.$
а декартовы координаты $O_1x_1y_1z_1$, введенные в точке O_1, связаны со сферическими координатами $O_1r_1\theta_1\varphi_1$ соотношением

$$x_1 = r_1\cos\varphi_1\sin\theta_1, \;\; y_1 = r_1\sin\varphi_1\sin\theta_1, \;\; z_1 = r_1\cos\theta_1,$$

где $0 \leqslant r_1 < \infty, \;\; 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi, \;\; 0 \leq \varphi_1 \leqslant 2\pi.$

В результате взаимодействия исходного магнитного поля с экраном Γ образуются вторичные магнитные поля. Обозначим потенциал вторичного поля в области D_2 через U_2, в области D_1 – U_1. Потенциал исходного магнитного поля обозначим через U_0.

В случае тонкостенных экранов магнитное поле внутри экрана не исследуется, а сшивается с помощью специальных граничных условий на срединной поверхности экрана Γ_c [3–5].

Срединная поверхность цилиндрического экрана Γ_c и поверхность эллипсоида S в вытянутой вырожденной эллипсоидальной системе координат $O\alpha\beta\varphi$ описываются следующим образом:

$$\Gamma_c, = \{\, \rho = d, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\infty < z < \infty \,\},$$

$$S = \{\alpha = \alpha_0 = Arch(b/c), \; 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\},$$

где b, a – большая и малая полуоси эллипса соответственно, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, d – радиус срединного цилиндра, $d > b$.

Постановка задачи. Требуется найти скалярные магнитные потенциалы U_m в области D_m, m = 1, 2, которые удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta U_m \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_m + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U_m + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U_m = 0,$$

граничным условиям на срединной поверхности Γ_c [3–5]

$$\mu_2 \frac{\partial (U_0 + U_2)}{\partial \rho} - \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = -pF(U_0 + U_1 + U_2), \tag{6}$$

$$\mu_2 \frac{\partial (U_0 + U_2)}{\partial \rho} + \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = qF(U_0 + U_2 - U_1), \tag{7}$$

где

$$p = \mu\delta/2, \quad q = 2/i\omega\delta\gamma, \quad \delta = 2tg(k\Delta/2)/k, \quad k = \omega\sqrt{i\omega\mu\gamma}, \quad 0 \leqslant \arg k < \pi,$$

граничному условию на поверхности S:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \vec{n}}U_1(M)\right|_{M \in S} = 0, \tag{8}$$

и условию на бесконечности

$$U_2(M) \to 0, \quad M \to \infty, \tag{9}$$

где M – произвольная точка пространства.

Граничный оператор в цилиндрических координатах имеет вид [3–5]

$$F(u) = (\vec{n},\ rot[\vec{n}, grad\, u]) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Решение поставленной граничной задачи (1) - (4) ищем в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы выполнялось условие на бесконечности.

Используя соответствующие теоремы сложения, показано, что решение поставленной граничной задачи сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представления вторичных потенциалов.

Вычислен коэффициент экранирования исходного низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Ковергенция - 2025"(подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Задоя Н. И. *Электромагнитная безопасность*. Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт, 2014.

2. Кечиев Л. Н. *Экранирование радиоэлектронной аппаратуры. Инженерное пособие*. М.: Грифон, 2019.

3. Шушкевич Г. Ч. *Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра* // Информатика. 2021. Т. 18, № 3. С. 45–55.

4. Шушкевич Г. Ч.*Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном с шаровым включением* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2023. Т. 13, № 1. С. 64–72.

5. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S., Shushkevich G. Ch.*Screening of low–frequency magnetic fields by an open thin–wall spherical shell* // Technical Physics. 2010. Vol. 55, Issue 9, P. 1240–1247.

MIXED PROBLEM FROM THE THEORY OF LONGITUDINAL IMPACT ON AN ELASTIC SEMI-INFINITE ROD IN THE CASE OF SEPARATION OF THE IMPACTING BODY AFTER THE COLLISION

V.I. Korzyuk[1], **J.V. Rudzko**[2]

[1]Belarussian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030,
korzyuk@bsu.by
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surganov St., Minsk, 220072,
janycz@yahoo.com

Statement of the problem. Suppose that an elastic semi-infinite homogeneous rod of constant cross-section, whose end $x = 0$ is elastically fixed, is subjected at the initial moment $t = 0$ to an impact on the end $x = 0$ by a load that sticks to the rod and separates from the rod at the moment $t = T$. We also assume that an external volumetric force acts on the rod and that the displacements of the rod and the rate of their change at the initial moment $t = 0$ are not equal to zero. Then, neglecting both the weight of the rod as a force and its possible vertical displacements, to study the vibrations of the rod, we have to find solutions to two coupled mixed problems:

$$(\partial_t^2 - a_1^2\partial_x^2)u_1(t,x) = f_1(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,T), \tag{1}$$

$$u_1(0,x) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0, \quad \partial_t u_1(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$(\partial_t^2 - b^2\partial_x + c^2)u_1(t,0) = \begin{cases} \mu_0, & t = 0, \\ \mu_1(x), & 0 < t \leqslant T, \end{cases} \tag{3}$$

and

$$(\partial_t^2 - a_2^2\partial_x^2)u_2(t,x) = f_2(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times(T,\infty), \tag{4}$$

$$u_2(t = T,x) = u_1(T,x), \quad \partial_t u_2(t = T,x) = \partial_t u_1(T,x), \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

$$(h - \partial_x)u_2(t,0) = \mu_2(t), \quad t > T. \tag{6}$$

The expressions (1) – (6) use the following notation: $a_1^2 = a_2^2 = E/\rho$, $b^2 = SE/M$, $c^2 = k/M$, $h = k/ES$, where $E > 0$ is Young's modulus of the rod material, $\rho = 0$ is the density of the rod material, $S > 0$ is the cross-sectional area of the rod, $M > 0$ is the mass of the impacted load, $k > 0$ is the stiffness coefficient of the linear elastic element to which the end $x = 0$ of the rod is attached. The quantity $\psi_1 - \psi_2(0+)$ has a physical meaning of the velocity of the impacting load, $\mu_1(t)$ has a physical meaning of the external force acting on the end of the rod, divided by the mass of the impacting load, and $\mu_2(t)$ has a physical meaning of the external force acting on the end of the rod, divided by ES. The value μ_0 is not an arbitrary preset constant [1], but it depends on the functions f, φ, ψ and will be determined later.

We will assume that $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$ for definiteness. We also note that mathematically, the signs of h, b^2, and c^2 do not affect the correctness of the problem. And despite that $h > 0$, $b^2 > 0$, and c^2 from physical assumptions, we will consider the problems in a general form, regardless of the signs of h, b^2, and c^2. Also, without loss of generality, we will assume that the numbers a_1 and a_2 are not necessarily equal.

Definition of the solution. Due to the discontinuous initial condition for the time derivative, the problem (1) – (3) has no classical solution defined on the set $\overline{Q_1}$, where $Q_1 = (0,T)\times(0,\infty)$. However, we can define a classical solution to the problem (1) – (3) on a smaller set $\overline{Q_1}\setminus\Gamma$ such that it belongs to the class $C^2(\overline{Q_1}\setminus\Gamma)$ and satisfies Eq. (1), the initial conditions (2), the boundary condition (3), and additional matching conditions given on the set Γ.

Definition 1. Let the matching condition

$$f_1(0,0) - \mu_0 + c^2\varphi(0) + a_1^2\varphi''(0) + b^2\varphi'(0) = 0 \tag{7}$$

be satisfied. Then a function u_1 belonging to the class $C(\overline{Q_1}) \cap C^2(\overline{Q_1^-}) \cap C^2(\overline{Q_1^+})$, where $Q_1^- = Q_1 \cap \cap \{(t,x) \mid x - a_1 t > 0\}$ and $Q_1^+ = Q_1 \cap \{(t,x) \mid x - a_1 t < 0\}$, is called a classical solution to the problem (1) – (3) if it satisfies Eq. (1) on the sets Q_1^- and Q_1^-, the initial conditions (2), the boundary condition (3) on the open half-line $(0,\infty)$, and the conjugation conditions

$$[(u_1)^+ - (u_1)^-](t, a_1 t) = 0,$$
$$[(\partial_x u_1)^+ - (\partial_x u_1)^-](t, a_1 t) = \frac{\dfrac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \dfrac{\psi_2(0+)}{2}}{a}, \tag{8}$$

where $C^{(1)}$ is an arbitrary real preset constant.

We derive the necessary and sufficient conditions (7) and (8) by passing to the limit. The paper [2] proves that condition (7) is necessary and sufficient, i. e., the quantity μ_0 is uniquely determined, and, otherwise, it is not possible to introduce a definition of the solution.

Definition 2. A function u_2 is called a classical solution to the problem (4) – (6) if the following conditions are fulfilled: 1) the function u_2 is twice continuously differentiable and satisfies Eq. (4) everywhere, except the characteristics $x - a_2 t = a_2 T$, $x - a_2 t = \pm a_1 T - a_2 T$, and $x + a_2 t = a_1 T + a_2 T$; 2) the first initial condition $u_2(t = T, x) = u_1(T, x)$ is satisfied on the entire half-line $x \geqslant 0$; 3) the second initial condition $\partial_t u_2(t = T, x) = \partial_t u_1(T, x)$ is satisfied on the set $[0,\infty) \setminus \{a_1 T\}$; 4) the boundary condition (5) holds on the set $[T,\infty) \setminus \{(a_1 + a_2)T/a_2\}$; 5) the function u_2 satisfies the following conjugation conditions:

$$[(u_2)^+ - (u_2)^-](t, a_2 t \pm a_1 T - a_2 T) = 0,$$

$$[(u_2)^+ - (u_2)^-](t, a_2 t + a_2 T) = 0,$$

$$[(u_2)^+ - (u_2)^-](t, a_1 T + a_2 T - a_2 t) = 0,$$

on the characteristics $x - a_2 t = a_2 T$, $x - a_2 t = \pm a_1 T - a_2 T$, and $x + a_2 t = a_1 T + a_2 T$.

Main results. We present our main results as two following theorems.

Theorem 1. *Let the smoothness conditions* $f_1 \in C^1([0,T] \times [0,\infty))$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi_2 \in C^1([0,\infty))$, *and* $\mu_1 \in C^1([0,T])$ *be satisfied. The mixed problem* (1) – (3) *has a unique solution* u_1 *in the sense of Definition 1.*

Theorem 2. *Let the smoothness conditions* $f_1 \in C^1([0,T] \times [0,\infty))$, $f_2 \in C^1([T,\infty) \times [0,\infty))$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi_2 \in C^1([0,\infty))$, $\mu_1 \in C^1([0,T])$, *and* $\mu_2 \in C^1([T,\infty))$ *be satisfied. The third mixed problem* (4) – (6) *has a unique solution* u_2 *in the sense of Definition 2.*

This talk is based on the recent paper [3].

Acknowledgements. The report was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics by Agreement no. 075-15-2022-284.

References

1. Gaiduk S. I. *A mathematical investigation of the problem of longitudinal impact on a relaxing rod* // Differential Equations. 1976. Vol. 12. P. 472–483.

2. Korzyuk V. I., Rudzko J. V., Kolyachko V. V. *Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2023. Vol. 3. P. 6–18.

3. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. *Classical solution to mixed problems from the theory of longitudinal impact on an elastic semi-infinite rod in the case of separation of the impacting body after the collision* // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. 2024. Vol. 60. P. 95–105.

CLASSICAL SOLUTION OF A PROBLEM OF THE LONGITUDINAL IMPACT ON A FINITE ROD WITH A FREE END

V.I. Korzyuk[1], **J.V. Rudzko**[2], **V.V. Kolyachko**[2]

[1]Belarussian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030,
korzyuk@bsu.by
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surganov St., Minsk, 220072,
janycz@yahoo.com, vladislav.kolyachko@gmail.com

Suppose that an elastic finite homogeneous rod of constant cross-section, whose left moving boundary $x = \gamma(t)$ is free, is subjected at the initial moment $t = 0$ to an impact on the end $x = l$ by a load that sticks to the rod. We also assume that an external volumetric force acts on the rod, that the displacements of the rod and the rate of their change at the initial moment $t = 0$ are not equal to zero, and that there are no shock waves in the rod. Then, neglecting both the weight of the rod as a force and its possible vertical displacements, to study the vibrations of the rod, we have to find a solution to the following mixed problem:

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = f(t,x), \quad t \in (0,\infty), \quad x \in (\gamma(t),l), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x) - \begin{cases} 0, & x \in [0,l), \\ v, & x = l, \end{cases} \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$\alpha(t)\partial_t u(t,\gamma(t)) + \beta\partial_x u(t,\gamma(t)) = \mu_1(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

$$(\partial_t^2 + b\partial_x)u(t,l) = \mu_2(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{4}$$

where $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$, $b = SEM^{-1}$, $\alpha(t) = S\rho\gamma'(t)$, $\beta = SE$ [1], where $E > 0$ is Young's modulus of the rod material, $\rho > 0$ is the density of the rod material, $S > 0$ is the cross-sectional area of the rod, $M > 0$ is the mass of the impacting load, v is the velocity of the impacting load, μ_2 is the external force acting on the end of the rod, divided by the mass of the impacting load. The quantity $-\mu_1(t)$ has a physical meaning of the external force acting on the end of the rod, $\mu_2(t)$ has a physical meaning of the external force acting on the end of the rod, divided by the mass of the impacting load. The function f is the external volumetric force divided by ρ.

We also assume that $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(t) \in (-a,a)$, $t \in [0,\infty)$, the curves $x = \gamma(t)$ and $x = l$ do not intersect, the boundary condition (3) is nowhere characteristic, i.e., $a\alpha(t) \neq \beta$, $t \in [0,\infty)$.

Similar problems in curvilinear domains have been considered in the works [2–4].

Definition 1. A function u is a classical solution of the problem (1) – (4) if it is representable in the form $u = u_1 + u_2$, where u_1 is a classical solution of the problem (1) – (3) with $v = 0$ and u_2 satisfies Eq. (1) with $f \equiv 0$, the initial conditions $u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$, $x \in [0,l]$, the boundary conditions (3) and (4) with $\mu_1 = \mu_2 \equiv 0$, and the following matching conditions

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = \gamma_-(r_i) + at) = 0, \tag{5}$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = l + al_i - at) = 0, \quad i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = l + al_i - at) = -v\left|\cos\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right|, \quad i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{7}$$

where $r_0 = l_0 = 0$, $l_i = r_{i-1} + a^{-1}(l - \gamma(r_i))$, $r_i = \Phi_+(l + al_{i-1})$, $\gamma_\pm(t) = \gamma(t) \pm at$, and Φ_+ is the inverse of γ_+.

Here $(\cdot)^\pm$ are the limit values of the function u and its partial derivatives on different sides on the characteristic $x = r(t)$, i.e.,

$$(\partial_t^p u)^\pm(t, r(t)) = \lim_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, r(t) \pm \delta).$$

The conditions (5) and (6) follow from the continuity, and the condition (7) is derived from the physical assumptions [5, 6]. Note that Definition 1 gives a physically correct solution only under the additional condition $\gamma'(r_{2i-1}) = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Let $Q = \{(t,x) \mid t \in (0,\infty) \wedge x \in (\gamma(t),l)\}$. The following theorem holds.

Theorem 1. *Let the smoothness conditions*

$$f\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,l]),\quad \psi\in C^1([0,l]),$$
$$\mu_1\in C^1([0,\infty)),\quad \mu_2\in C([0,\infty)),\quad \alpha\in C^1([0,\infty)),\quad \gamma\in C^2([0,\infty))$$

be satisfied. The mixed problem (1) – (4) has a unique classical solution u in the sense of Definition 1 if and only if the following conditions are satisfied:

$$\mu_1(0)=\alpha(0)\psi(0)+\beta\varphi'(0),$$
$$\mu_1'(0)=\alpha(0)\left(f(0,0)+a^2\varphi''(0)+\gamma'(0)\psi'(0)\right)+\psi(0)\alpha'(0)+\beta\left(\gamma'(0)\varphi''(0)+\psi'(0)\right),$$
$$\mu_2(0)=f(0,l)+a^2\varphi''(l)+b\varphi'(l).$$

Note that the mathematical results of this report remain valid even if $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, and the function α does not depend on γ'.

Acknowledgements. The report was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics by Agreement no. 075-15-2022-284.

References

1. Anisimov V. N., Litvinov V. L. *Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders* // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2015. Vol. 19, No 2, P. 382–397.

2. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. *Classical Solution of the First Mixed Problem for the Wave Equation in a Curvilinear Half-Strip* // Differential Equations. 2020. Vol. 56. P. 98–108.

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. *Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients* // Differential Equations. 2017. Vol. 53. P. 74–85.

4. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. *Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant* // Differential Equations. 2023, Vol. 59. P. 1075–1089.

5. Korzyuk V. I., Rudzko J. V., Kolyachko V. V. *Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2023. Vol. 3. P. 6–18.

6. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B. *Differential Equations of Mathematical Physics*. North-Holland, 1964.

7. Baranovskaya S. N., Novikov E. N., Yurchuk N. I. *Directional Derivative Problem for the Telegraph Equation with a Dirac Potential* // Differential Equations. 2018. Vol. 54. P. 1147–1155.

ON SOME SHARP CONDITIONS IN THE EXISTENCE THEORY FOR NONLINEAR DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS WITH L^1-DATA

A.A. Kovalevsky[1,2]

[1]Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, The Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 Sofia Kovalevskaya str., Yekaterinburg, 620108,
[2]Ural Federal University, 51 Lenina pr., Yekaterinburg, 620083,
alexkvl71@mail.ru

In this talk, we present some results on the existence and nonexistence of weak solutions of the Dirichlet problem for a class of second-order nonlinear degenerate elliptic equations with L^1-right-hand side.

Let Ω be a nonempty bounded open set in $\mathbb{R}^n$ ($n\geqslant 2$), and let $\mu\in L^\infty(\Omega)$ be a nonnegative function such that $\mu>0$ a.e. in Ω. Let $p\in(1,n)$, and let $c_1,c_2>0$. In addition, let $g,h\in L^1(\Omega)$, $g,h\geqslant 0$ in Ω, and let $\mu g^p\in L^1(\Omega)$. For every $i\in\{1,\dots,n\}$, let $a_i:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ be a Carathéodory function. We assume that, for almost all $x\in\Omega$ and any $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n|a_i(x,\xi)|\leqslant c_1\mu(x)|\xi|^{p-1}+\mu(x)g^{p-1}(x),\sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\xi_i\geqslant c_2\mu(x)|\xi|^p-h(x).$$

We also assume that the functions a_i satisfy the standard strong monotonicity condition.

Definition. If $f\in L^1(\Omega)$, then $\mathcal{D}(f)$ is the set of all functions $u\in W_0^{1,1}(\Omega)$ such that:

(i) for any $i \in \{1,\dots,n\}$, $a_i(x,\nabla u) \in L^1(\Omega)$;

(ii) for any function $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla u)D_i v\right\}dx = \int_\Omega f v\,dx.$

If $f \in L^1(\Omega)$, we call a function $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ satisfying conditions (i) and (ii) in the above definition a weak solution of the Dirichlet problem

$$-\sum_{i=1}^n D_i a_i(x,\nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{D_f}$$

This agrees with the definition of weak solution of the Dirichlet problem for second-order nondegenerate elliptic equations with L^1-data or measures as data (see., e.g., [1]).

Thus, if $f \in L^1(\Omega)$, then the nonemptiness of the set $\mathcal{D}(f)$ is equivalent to the existence of a weak solution of problem (D_f). Therefore, results on the existence or nonexistence of a weak solution of problem (D_f) with $f \in L^1(\Omega)$ can be stated in terms of the nonemptiness or emptiness of the set $\mathcal{D}(f)$. To do this, we assume that the set $\{t>0 : 1/\mu \in L^t(\Omega)\}$ is nonempty and define $t_\mu = \sup\{t>0 : 1/\mu \in L^t(\Omega)\}$. Then we define

$$s_\mu = \begin{cases} \infty & \text{if } t_\mu \leqslant n, \\ \dfrac{n t_\mu}{t_\mu - n} & \text{if } n < t_\mu < \infty, \\ n & \text{if } t_\mu = \infty. \end{cases}$$

In addition, for any $y \in \Omega$, let $J_y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ be the function such that

$$J_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|}\left[\ln\left(e + \dfrac{1}{|x-y|}\right)\right]^{-1} & \text{if } x \in \Omega\setminus\{y\}, \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

One of the results we discuss in the talk is the following theorem stated in [2].

Theorem. *Let $t_\mu > n$. Assume that there exists a point $y \in \Omega$ such that $\mu J_y \in L^{s_\mu}(\Omega)$. Then the inequality $p > 2 - 1/n + 1/t_\mu$ is necessary and sufficient for the fact that, for any function $f \in L^1(\Omega)$, the set $\mathcal{D}(f)$ is nonempty.*

This theorem implies that if $t_\mu = \infty$, then the inequality $p > 2 - 1/n$ is necessary and sufficient for the fact that, for any function $f \in L^1(\Omega)$, the set $\mathcal{D}(f)$ is nonempty. The latter result includes the known results concerning conditions on p for the existence or nonexistence of weak solutions of the Dirichlet problem for nondegenerate elliptic equations with L^1-data (see [1,3]).

In the talk, we also discuss a result of [2] similar to the above theorem but corresponding to the case $t_\mu = n$.

The proof of the results presented in the talk is based on the use of an existence result of [4] and obtaining conditions under which a weighted Sobolev space depending on μ and p contains unbounded functions.

Finally, we note that in the special case where μ is a power weight, the presented results give the same conditions on p for the existence or nonexistence of weak solutions as those established in [5].

The research funding from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Ural Federal University Program of Development within the Priority-2030 Program) is gratefully acknowledged.

References

1. Boccardo L., Gallouët T. *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures* // Comm. Partial Differential Equations. 1992. Vol. 17, No 3-4. P. 641–655.

2. Kovalevsky A. A. *Criteria for the existence of weak solutions of the Dirichlet problem for nonlinear degenerate elliptic equations for any L^1-right-hand side* // Mat. Zametki. 2024. Vol. 116, No 3. P. 482–485.

3. Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1995. Vol. 22, No 2. P. 241–273.

4. Kovalevsky A. A., Gorban Yu. S. *Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1-data* // Electron. J. Differ. Equ. 2013. Paper No. 167, 17 p.

5. Kovalevsky A. A., Nicolosi F. *On a sharp condition for the existence of weak solutions to the Dirichlet problem for degenerate nonlinear elliptic equations with power weights and L^1-data* // Electron. J. Differ. Equ. 2015. Paper No. 52, 12 p.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LAPLACE EQUATION WITH A DIVERGING ARGUMENT

O. Kurbanbaev

Karakalpak State University named after Berdakh, Ch.Abdirov St. 1, Nukus city, Uzbekistan, kurbanbaevotebay@gmail.com

Advances in fundamental science make it necessary to investigate new boundary value problems for various classes of differential equations. One of such problems is the boundary value problems for differential equations of particular derivatives with a divergent argument, and later there are several works dedicated to such problems [1,2].

This article has a deviating argument

$$u_{x_1x_1}(x_1,-x_2,-x_3)+u_{x_2x_2}(-x_1,x_2,-x_3)+u_{x_3x_3}(-x_1,-x_2,x_3)=0 \tag{1}$$

Homogeneity of the Laplace equation

$$\begin{cases} u_{x_1=p}=u_{x_1=-p}=0, \\ u_{x_2=q}=u_{x_2=-q}=0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u_{x_3=r}=u_{x_3=-r}=\varphi_1(x_1,x_2) \tag{3}$$

the problem of finding a solution that satisfies one of the boundary conditions is considered, where the function $\varphi(x_1,x_2)$ is defined in a right-angled parallelogram $[-p,p]\times[-q,q]$, a continuous function.

We will solve this problem using Fure's method and the solution

$$u(x_1,x_2,x_3)=X(x_1)Y(x_2)Z(x_3)$$

Let's define in appearance, in relation to the unknown $X(x_1)$, $Y(x_2)$ and $Z(x_3)$functions

$$X''(x_1)+\lambda_1^2X(-x_1)=0,\ X(-p)=X(p)=0,$$

$$Y''(x_2)+\lambda_2^2Y(-x_2)=0,\ Y(-q)=Y(q)=0,$$

we get Sturm-Liouville problems of the form. From this

$$\lambda_{1m}=\frac{\pi(2m+1)}{2p},\ \lambda_{2n}=\frac{\pi(2n+1)}{2q},\ \ m,n=0,1,2,...,$$

$$X_m(x_1)=\cos\frac{\pi(2m+1)}{2p}x_1,\ Y_n(x_2)=\cos\frac{\pi(2n+1)}{2q}x_2,\ \ m,n=0,1,2,...$$

function $Z(x_3)$

$$Z''(x_3)-(\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2)Z(-x_3)=0$$

from equation

$$Z_{mn}(x_3)=C_{mn}\left(e^{\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}x_3}+e^{-\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}x_3}\right)$$

we will determine in appearance.

Thus, $(1)-(3)$ is the solution of the boundary value problem

$$u(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{mn}\left(e^{\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}x_3}+e^{-\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}x_3}\right)\cos\frac{\pi(2m+1)}{2p}x_1\cos\frac{\pi(2n+1)}{2q}x_2$$

will have an appearance, here
$C_{mn} == \frac{4}{pq\left(e^{\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}r}+e^{-\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}r}\right)}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}\varphi(x_1,x_2)\cos\frac{\pi(2m+1)}{2p}x_1\cos\frac{\pi(2n+1)}{2q}x_2dx_1dx_2$. If (3) is the boundary condition

$$u_{x_3=r} = -u_{x_3=-r} = \varphi_2(x_1,x_2) \tag{4}$$

If it has a look, then a function $Z(x_3)$

$$Z''(x_3) + (\lambda_{1m}^2 + \lambda_{2n}^2)Z(x_3) = 0$$

From equation

$$Z_{mn}(x_3) = C_{mn}\sin\sqrt{\lambda_{1m}^2 + \lambda_{2n}^2}x_3$$

we will determine in appearance. Thus, $(1),(2),(4)$ are solutions of the boundary value problem

$$u(x_1,x_2,x_3) = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{mn}\sin\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}x_3\cos\frac{\pi(2m+1)}{2p}x_1\cos\frac{\pi(2n+1)}{2q}x_2$$

will have an appearance, here

$$C_{mn} = \frac{4}{pq\sin\sqrt{\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2}r}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}\varphi_2(x_1,x_2)\cos\frac{\pi(2m+1)}{2p}x_1\cos\frac{\pi(2n+1)}{2q}x_2dx_1dx_2.$$

Литература

1. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. М.: Наука, 1972. 351 с.

2. Лесев В. Н., Бжеумихова О. И. *Применение метода Фурье к исследованию задачи Дирихле для уравнения с отклоняющимся аргументом и оператором Лапласа в главной части* // КубГАУ. 2012. № 81 (07).

DIRECT SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATIONS

S. Rabinovich[1], **V. Malyutin**[2]

[1]Ichilov Medical Center, Nephrology Department, Tel Aviv, Israel,
shaul.rabinovich@gmail.com
[2]The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surganov str., Minsk, 220072,
malyutin@im.bas-net.by

Maxwell's equations for the electromagnetic field

$$\mathrm{div}\underline{\mathbf{E}} = 4\pi i_0, \quad \mathrm{div}\underline{\mathbf{H}} = 0,$$
$$\frac{1}{c}\partial_0\underline{\mathbf{E}} - \mathrm{rot}\underline{\mathbf{H}} = -\frac{4\pi}{c}\underline{\mathbf{I}}, \quad \frac{1}{c}\partial_0\underline{\mathbf{H}} + \mathrm{rot}\underline{\mathbf{E}} = 0,$$

where $\underline{\mathbf{E}} = (E_1,E_2,E_3)$, $\underline{\mathbf{H}} = (H_1,H_2,H_3)$, $\underline{\mathbf{I}} = (i_1,i_2,i_3)$, are the most famous equations of physics.

Over the course of a century and a half, many approaches and refinements have been proposed for solutions to these equations.

In this note, we propose a new approach for writing solutions to these equations, which does not use potentials. The approach under consideration uses quaternions, which widely used in physics and mathematics [1], [2]. We will show how nonconventional notation leads directly to finding the Green's function for these equations.

The starting point for this approach is Kuni Imaeda's paper [3]

$$\mathbf{DF}^*(X) = -4\pi\mathbf{I}, \tag{1}$$

where $\mathbf{D} = \frac{1}{c}\partial_0 - e_1\partial_1 - e_2\partial_2 - e_3\partial_3$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{3} e_j(E_j + iH_j)$, $E_0 = H_0 = 0$, $\mathbf{I} = \sum_{j=0}^{3} e_j i_j$, $e_0 = 1$, $e_j^2 = 1$, $e_1e_2 = -e_2e_1 = ie_3$ and so on.

In our case formal notation (1) breaks down into four equations, which are exactly Maxwell's equations. Equations with the right side equals zero (that represents Maxwell equations in vacuum) are an exact analogue of Cauchy-Riemann Equations. It is known that Caucy-Riemann equations are the definition of analytic or regular functions. Solution for such equations are written in the form of Further polynomials [4].

It is clear that (1) is partial differential equation of first order.

As is customary in such cases, we will look for a solution to the equation for the Green's function

$$\mathbf{D}G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

with the right side in the form of delta function.

We offer solution by noting that operator $\mathbf{D}$ factorizes d'Alembert operator $\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Exactly,

$$-\mathbf{D}\mathbf{D}^{\dagger} = -\mathbf{D}^{\dagger}\mathbf{D} = \Box,$$

where

$$\mathbf{D}^{\dagger} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x_0} + e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Since, by definition, the Green's function $G_{\Box}$ is a solution to the equation

$$-\mathbf{D}\mathbf{D}^{\dagger}G_{\Box} = \delta(\mathbf{x}),$$

then for $G = -\mathbf{D}^{\dagger}G_{\Box}$ is true $\mathbf{D}G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$. Thus, the solution to Maxwell's equations will take form

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = 4\pi \int \mathbf{D}^{\dagger}G_{\Box}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{I}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'. \quad (2)$$

In general, the function $G_{\Box}$ can be chosen as a linear combination

$$G_{\Box} = -c_1\frac{\delta(cx_0 + r)}{4\pi r} - c_2\frac{\delta(-cx_0 + r)}{4\pi r},$$

where $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $c_1 + c_2 = 1$.

By calculating the operator $\mathbf{D}^{\dagger}$ from the function $-G_{\Box}$ we obtain the Green's function G for our problem.

$$G = -\mathbf{D}^{\dagger}G_{\Box} = c_1\frac{\delta'(cx_0 + r)}{4\pi r} - c_2\frac{\delta'(-cx_0 + r)}{4\pi r} +$$
$$+ \left[-c_1\frac{\delta(cx_0 + r)}{4\pi r^2} - c_2\frac{\delta(-cx_0 + r)}{4\pi r^2} + c_1\frac{\delta'(cx_0 + r)}{4\pi r} + c_2\frac{\delta'(-cx_0 + r)}{4\pi r}\right] \times$$
$$\times \frac{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}{r}. \quad (3)$$

So far we proved the following:

Statement *The solution to Maxwell equations (1) can be formulated as equation (2) where* $\mathbf{D}^{\dagger}G_{\Box}$ *is determined by formula (3).*

Three examples of determining the electromagnetic field strength using formula (2) and the Green's function G defined by equation (3) were considered. The example of finding the strength of the electromagnetic field created by the charge q moving with constant speed v along the axis x_1. The example of finding the electric field strength created by a uniformly charged thin rod at a point perpendicular to the rod at a distance R from the rod. The example of finding the electric field strength created by a dipole at a point located perpendicular to the middle of the dipole at a distance R from the middle of the dipole.

References

1. Girard P. R. *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. Basel, 2007.
2. Berezin A. V., Kurochkin Yu. A., Tolkachev E. A. *Quaternions in Relativistic Physics*. Moscow, 2003.

3. Imaeda K. *Quaternionic Formulation of Classical Electrodynamics and Theory of Functions of a Biquaternion Variable* // Nuovo Cimento. 1976. Vol. 32B. P. 138–162.

4. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Comm. Math. Helv. 1934-1935. Vol. B7. P. 307–330.

ASYMPTOTIC SPECTRAL SERIES OF SHRÖDINGER OPERATOR WITH DELTA-POTENTIAL AT THE POLES OF SURFACES OF REVOLUTION

V.V. Rykhlov[1,*], **A.I. Shafarevich**[1,**]

[1]Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991
[*]vladderq@gmail.com
[**]shafarev@yahoo.com

Numerous physical and mathematical papers study Schrödinger operators with delta potentials, also referred to as point potentials or zero-range potentials. Such potentials, often used in physics to model impurities or localized interactions, introduce nontrivial mathematical difficulties while offering insights into the behavior of quantum particles in the presence of singularities. These point potentials have garnered significant attention since their initial application in the analysis of band spectra in periodic systems. Subsequently, they have found wide usage in fields such as atomic and nuclear physics.

This talk discusses the spectral problem for the Schrödinger operator

$$H\psi = E\psi + o(h), \quad H = -\frac{h^2}{2}\Delta + \delta_{x_1}(x) + \delta_{x_2}(x), \quad x \in M,$$

where $h \to +0$, x_j are the poles of M, M is a two-dimensional ($M^2 \subset \mathbb{R}^3$) or three-dimensional ($M^3 \subset \mathbb{R}^4$) surface of revolution:

$$M^2 = \{(v(s)\cos\varphi, v(s)\sin\varphi, w(s)) \,|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1\} \quad \text{and}$$

$$M^3 = \{(v(s)\cos\theta\cos\varphi, v(s)\cos\theta\sin\varphi, v(s)\sin\theta, w(s)) \,|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\},$$

$s \in [s_1, s_2]$ is the arc-length parameter of the curve $(v(s), w(s)) \subset \mathbb{R}^2$, and the values s_j correspond to the points x_j.

The operator H is densely defined in $L^2(M)$ as a self-adjoint extension of the operator Δ acting on the functions $\psi_0 \in W_2^2(M)$ that vanish at the poles x_j. The domain of H consists of the functions with singularities at the points x_j, namely, for $\psi \in D(H)$, there is an asymptotic expansion [1] as $x \to x_j$:

$$\psi(x) = -\frac{a_j}{2\pi}\ln d(x, x_j) + b_j + o(1) \text{ for } M^2, \quad \psi(x) = \frac{a_j}{4\pi}\frac{1}{d(x, x_j)} + b_j + o(1) \text{ for } M^3,$$

where $d(x, x_j)$ is the geodesic distance on M between the points x and x_j. The coefficients a_j at the singular component and b_j at the regular component are related by

$$i(\mathbf{I} + U)a + \frac{2}{h^2}(\mathbf{I} - U)b = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix, and U is some unitary operator.

We provide explicit expressions for the Bohr–Sommerfeld–Maslov quantization conditions, which allow one to study the asymptotic behavior of the spectrum. Asymptotic eigenfunctions are expressed in terms of Bessel and Neumann functions.

References

1. Brüning J., Geyler V. A. *Scattering on Compact Manifolds with Infinitely Thin Horns* // J. Math. Phys., 2003. Vol. 44, No 2. P. 371–405.

2. Maslov V. P., Fedoryuk M. V. *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics*. Springer Dordrecht, 1981.

3. Wasow W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. New York–London–Sydney: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1965.

GROUP CLASSIFICATION OF SOME SECOND-ORDER QUASI-LINEAR EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

D.S. Zhalukevich

Physics Faculty, University of Bialystok, Bialystok, Poland, den.zhal@yandex.byy

Consider second-order quasi-linear equations with two independent variables, which are often found in science and technology:

$$A_{11}(t,x)u_{tt}+2A_{12}(t,x)u_{tx}+A_{22}(t,x)u_{xx}+A_1(t,x)u_t+A_2(t,x)u_x+\lambda A_0(t,x)f(u)=0, \tag{1}$$

where $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, $A_i(t,x)$, $A_{ij}(t,x)$, $f(u)$ - analytical functions based on their arguments.

This quasi-linear equation has the following classification:
1) $A_{12}^2-A_{11}A_{22}>0$ - hyperbolic type,
2) $A_{12}^2-A_{11}A_{22}<0$ - elliptical type,
3) $A_{12}^2-A_{11}A_{22}=0$ - parabolic type.

We will look for infinitesimal transformations for equation (1) in the form [1-4]

$$\widetilde{t}=t+\varepsilon\tau(t,x,u)+\ldots,\quad \widetilde{x}=x+\varepsilon\xi(t,x,u)+\ldots,\quad \widetilde{u}=u+\varepsilon\eta(t,x,u)+\ldots, \tag{2}$$

and

$$\widetilde{A}_i=A_i+\varepsilon a_i+\ldots,\quad \widetilde{A}_{ij}=A_{ij}+\varepsilon a_{ij}+\ldots,\quad \widetilde{f}(\widetilde{u})=f(u)+\varepsilon f^{(1)}(u)\eta+\ldots. \tag{3}$$

Then the group generator for equation (1) has the form

$$X=\tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial A_i}+\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial}{\partial A_{ij}}. \tag{4}$$

By some transformations, equation (1) is reduced to the following four types of equations:

$$u_{tx}+A_1(t,x)u_t+A_2(t,x)u_x+\lambda A_0(t,x)f(u)=0, \tag{5}$$

$$u_{tt}-u_{xx}+A_1(t,x)u_t+A_2(t,x)u_x+\lambda A_0(t,x)f(u)=0, \tag{6}$$

$$u_{tt}+u_{xx}+A_1(t,x)u_t+A_2(t,x)u_x+\lambda A_0(t,x)f(u)=0, \tag{7}$$

$$u_t+A_{22}(t,x)u_{xx}+A_2(t,x)u_x+\lambda A_0(t,x)f(u)=0. \tag{8}$$

Equation (5) is a hyperbolic nonlinear Klein-Gordon equation in the first form. Equation (6) is a hyperbolic nonlinear Klein-Gordon equation in the second form. Equation (7) is an elliptic nonlinear Klein-Gordon equation. Equation (8) is a nonlinear convection-diffusion equation.

Refrences

1. Hydon P. E. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge University Press, 2000.
2. Ibragimov N. H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Dordrecht: Reidel, 1985.
3. Ovsiannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York: Academic, 1982.
4. Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107. New York: Springer-Verlag, 1993.

СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДОКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ЧАСТИЦАМИ ОБОИХ ПОЛОВ С БОЛЬШОЙ НАЧАЛЬНОЙ ПОПУЛЯЦИЕЙ

М.Р. Абдюшев[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
marat.abdushev@math.msu.ru

Доклад посвящена докритическим ветвящимся процессам с частицами обоих полов с большой начальной популяцией. Исследовано распределение времени вырождения T такого рода процессов. Показано, что T имеет логарифмический порядок роста по отношению к количеству начальных частиц.

Пусть $(X_{n,i}, Y_{n,i}), i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы с неотрицательными целочисленными компонентами. Будем использовать общее обозначение (X,Y) для вектора с тем же распределением. Назовем ветвящимся процессом с частицами обоих полов с функцией паросочетаний $L(x,y)$ и N начальными парами частиц последовательность $\{N_n\}$:

$$N_0 = N, \quad N_{n+1} = L\left(\sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}, \sum_{j=1}^{N_n} Y_{n,j}\right), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Здесь функция $L : \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ такова, что при любых $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\} : L(x,0) = L(0,y) = 0$. Для краткости будем называть такой процесс двуполым ветвящимся процессом.

Двуполый ветвящийся процесс (ДВП) является модификацией стандартного процесса Гальтона-Ватсона и был введен D.J. Daley в 1968 году в статье [1]. В этой работе были даны определения ДВП для двух функций паросочетаний, которые являются наиболее естественными:

- $L(x,y) := \min(x, dy), \quad d \in \mathbb{N}$,
- $L(x,y) := x\min(1,y)$.

Также в своей работе D.J. Daley привел необходимые и достаточные условия для вырождения ДВП с указанными выше функциями паросочетаний с вероятностью единица.

В 1982 году была опубликована статья [2], в которой изучались ДВП при других функциях паросочетаний. В частности, в указанной работе был введен класс супераддитивных функций паросочетаний. Функция f называется супераддитивной, если для любых пар $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ целых неотрицательных чисел выполняется неравенство

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) \geqslant f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2).$$

Основной акцент в упомянутой статье был сделан на изучение условий, связанных с вырождением ДВП.

Как правило, в качестве функций паросочетаний рассматривают произвольные супераддитивные функции, однако, в столь слабых предположениях не удается получить предельных теорем. Поэтому в докладе будут рассматриваться супераддитивные функции паросочетаний, удовлетворяющие аналогу условия, которое было предложено в статье [3] для ДВП в случайной среде: при некотором $\delta' \in (0,1]$

$$|L(x,y) - g(x,y)| \leqslant C_1(x^{1/(1+\delta')} + y^{1/(1+\delta')}), \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, \tag{11}$$

для некоторой функции $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, обладающей следующими свойствами:

- $g(\alpha x, \alpha y) = \alpha g(x,y), \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $|g(x',y') - g(x,y)| \leqslant C_2(|x'-x| + |y'-y|), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^+$,

где C_1, C_2 — некоторые константы.

Основным результатом доклада является доказательство следующей предельной теоремы для распределения времени вырождения докритического ДВП с большим числом начальных пар частиц.

Теорема. *Пусть N_n — ДВП с функцией паросочетаний $L(x,y)$, удовлетворяющей условию (11), и начальным числом пар $N_0 = N$, T_N — время вырождения процесса.*
Предположим, что $A := g(\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y) < 1, \mathbf{E}X^{1+\delta} < \infty, \mathbf{E}Y^{1+\delta} < \infty$. Тогда для любой стремящейся к $+\infty$ последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ выполнено соотношение:

$$\frac{T_N - \log_{1/A} N}{a_N} \xrightarrow{d} 0, \quad N \to \infty.$$

Замечание. *Условие $A < 1$ в случае ДВП является аналогом условия докритичности в случае ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, поэтому соответствующий ДВП будем называть докритическим.*

Литература

1. Daley D. J. *Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1968. Vol. 9, No 4. P. 315–322.

2. Hull D. M. *A necessary condition for extinction in those bisexual Galton-Watson branching processes governed by superadditive mating functions* // Journal of Applied Probability. 1982. Vol. 19, No 4. P. 847–850.

3. Шкляев А. В. *Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде* // Дискретная математика. 2023. Т. 35, № 3. С. 125–142.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ К ЛОКАЛЬНОМУ ВРЕМЕНИ БРОУНОВСКОГО МОСТА

В.И. Афанасьев[1]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991 Россия, Москва, Губкина 8
viafan@mi-ras.ru

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим *случайное блуждание* $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$, $i \in \mathbf{N}$.

Предположение A. Случайная величина X_1 имеет арифметическое распределение с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{P}(X_1 = 0) > 0$.

Предположение B. Справедливы равенства

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2, \ 0 < \sigma^2 < +\infty.$$

Определим *локальное время* случайного блуждания $\{S_i,\ i \geqslant 0\}$ в точке k за время n:

$$\xi(k,n) = |\{i : 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i = k\}|.$$

Введем случайный процесс

$$Z_n(u) = \frac{\sigma\xi\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor, n\right)}{\sqrt{n}}, \ \ u \in \mathbf{R}.$$

Пусть $\{W_0(t),\ t \in [0,1]\}$ – стандартный броуновский мост. Определим его локальное время $l_0^{(t)}(u)$ точке $u \in \mathbf{R}$ за время $t \in [0,1]$:

$$l_0^{(t)}(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[u-\varepsilon, u+\varepsilon]}(W_0(s))\, ds.$$

Пусть символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость случайных процессов по распределению в том или ином функциональном пространстве.

Теорема 1. *Если выполнены предположения* A *и* B, *то при* $n \to \infty$

$$\{Z_n(u),\ u \in \mathbf{R} \mid S_n = 0\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{(1)}(u),\ u \in \mathbf{R}\right\}.$$

Определим локальное время *отраженного случайного блуждания* $\{|S_i|,\ i \geqslant 0\}$:

$$\widehat{\xi}(0,n) = 2\,|\{i : 0 \leqslant i \leqslant n,\ |S_i| = 0\}|,$$

$$\widehat{\xi}(k,n) = |\{i : 0 \leqslant i \leqslant n,\ |S_i| = k\}|,\ \ k \in \mathbf{N}.$$

Введем случайный процесс

$$\widehat{Z}_n(u) = \frac{\sigma\widehat{\xi}(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor, n)}{\sqrt{n}},\ \ u \geqslant 0.$$

Определим локальное время *отраженного броуновского моста* $\{|W_0(s)|,\ s \in [0,1]\}$: при $u \geqslant 0$ и $t \in [0,1]$

$$\widehat{l}_0^{(t)}(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{[u,u+\varepsilon]}(|W_0(s)|)\,ds.$$

Теорема 2. *Если выполнены предположения*A *и* B, *то при* $n \to \infty$

$$\left\{\widehat{Z}_n(u),\ u \geqslant 0 \,\middle|\, S_n = 0\right\} \xrightarrow{D} \left\{\widehat{l}_0^{(1)}(u),\ u \geqslant 0\right\}.$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *для каждого* $u \in \mathbf{R}$ *при всех* $x \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n(u) \leqslant x \mid S_n = 0) = 1 - \exp\left(-\frac{(2|u| + x)^2}{2}\right).$$

Положим $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ при $x \in \mathbf{R}$. Напомним, что *функцией распределением Колмогорова* называется функция

$$K(x) = 1 + 2\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-2k^2x^2\right),\ \ x > 0.$$

Введем для каждого $u > 0$ функцию распределения

$$T_u(x) = 1 - 2\sqrt{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{l-1} C_{l-1}^j \frac{(-1)^{l-1} x^j}{j!} n^{(j)}(2lu + x),\ \ x \geqslant 0.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы* 2 *для каждого* $u > 0$ *при всех* $x \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\widehat{Z}_n(u) \leqslant x \,\middle|\, S_n = 0\right) = T_u(x).$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\widehat{Z}_n(u) = 0 \,\middle|\, S_n = 0\right) = K(u).$$

Теорема 5. *В условиях теоремы* 2 *при всех* $x \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{u \geq 0} \widehat{Z}_n(u) \leqslant x \,\middle|\, S_n = 0\right) = K\left(\frac{x}{4}\right).$$

Указанные результаты опубликованны в [1].

Литература

1. Афанасьев В. И., *Предельная теорема о сходимости к локальному времени броуновского моста* // Матем. заметки. 2024. Т. 116, № 5. С. 647–666.

ОБ АСИМПТОТИКАХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С “ПЕЧЕНЬЕМ”

Г.А. Бакай[1]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991 Россия, Москва, Губкина 8
gavrik_lur_bakay@mail.ru

В докладе будут представлены новые результаты об асимптотиках вероятностей больших уклонений для *случайного блуждания в случайной среде с печеньем*. Определим указанный случайный процесс. Пусть

$$\vec{p} = \{p(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \vec{p}_1 = \{p_1(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

являются независимыми последовательностями независимых и одинаково распределенных случайных величин со значениями в $(0,1)$. Пусть случайная последовательность $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{n+1} = 1|\vec{p},\vec{p}_1,X_1,\ldots,X_n,S_n = i,D_n(i) = 0) = p_1(i),\\
&\mathbf{P}(X_{n+1} = -1|\vec{p},\vec{p}_1,X_1,\ldots,X_n,S_n = i,D_n(i) = 0) = 1-p_1(i),\\
&\mathbf{P}(X_{n+1} = 1|\vec{p},\vec{p}_1,X_1,\ldots,X_n,S_n = i,D_n(i) > 0) = p(i),\\
&\mathbf{P}(X_{n+1} = -1|\vec{p},\vec{p}_1,X_1,\ldots,X_n,S_n = i,D_n(i) > 0) = 1-p(i).
\end{aligned}$$

Здесь

$$S_0 := 0,\ S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad D_n(i) := \sum_{j=1}^{n} I(S_{j-1} = i,\ X_j = -1), \quad n\in\mathbb{N},\ i\in\mathbb{Z}.$$

Случайный процесс $\{S_n\}_{n\geq 0}$ называют случайным блужданием в случайной среде с печеньем. Данная модель обобщает модель классического случайного блуждания в случайной среде (RWRE), введенного в работе F. Solomon [1], которая соответствует случаю, когда случайные величины $p_1(0)$ и $p(0)$ равны по распределению. Предельные теоремы для RWRE получены в работе [2]. Автором в работе [3] получены асимптотики вероятностей больших уклонений в локальной форме для первого момента достижения уровня n.

Положим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \min\{k\in\mathbb{N}:\ S_k = n\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

В докладе будут представлены результаты об асимптотиках вероятностей $\mathbf{P}(T_n = k)$ для модели случайного блуждания в случайной среде с печеньем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-11-00037, https://rscf.ru/project/24-11-00037/ в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Литература

1. Solomon F. *Random walks in a random environment* // The Annals of Probability. 1975. Vol. 3, No 1. P. 1–31.
2. Kesten H., Kozlov M., Spitzer F. *A limit law for random walk in a random environment* // Compositio mathematica. 1975. Vol. 30, No 2. P. 145–168.
3. Бакай Г. А. *О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде* // Дискретная математика. 2022. Т. 34, № 4. Р. 3–13.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СУММЫ ОБЪЕМОВ ЗАПРОСОВ ПО ИНФОРМАЦИИ ЗА ПРОШЛЫЕ ЭТАПЫ

М.С. Баркетов[1]

[1]Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
220012 Беларусь, Минск, Сурганова 6
barketau@mail.com

Введение. В данном докладе рассматривается задача оценивания суммы объемов запросов за данный этап на основе статистической информации за предыдущие этапы работы производственной системы. При этом в наличии есть статистическая информация о N входах за предыдущие этапы работы производственной системы, т. е. для каждого предыдущего этапа $j, 1 \leqslant j \leqslant N$, дано количество запросов n_j и их объемы $p_1^j, p_2^j, \ldots, p_{n_j}^j$. Данные входы можно рассматривать как некоторый тип спроса за предыдущие этапы. Оценивается сумма объемов запросов за данный этап. При этом полагается, что информация о запросах за данный этап еще не известна.

В данной работе используется параметрический подход. Предполагается, что коли-чество запросов для каждого этапа n_j распределено как Пуассоновская случайная величина с параметром λ: $P(n_j = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i \geqslant 0$. Объем же каждого запроса для одного этапа распределен как равномерная случайная величина на отрезке $[\theta - a/2, \theta + a/2]$, где θ и a – неизвестные величины, причем эти неизвестные величины также могут быть случайными.

Сначала предполагается двухуровневая модель, в которой a – это неизвестный фиксированный параметр, а θ – это равномерная на отрезке $[\mu - \tau/2, \mu + \tau/2]$ случайная величина, где μ и τ– неизвестные фиксированные параметры. Значение случайной величины θ генерируется один раз для одного этапа. Для байесовского подхода предполагается, что θ и a – случайные величины, распределенные равномерно на некотором многограннике, и генерируются один раз для одного этапа.

Задача состоит в том, чтобы оценить математическое ожидание и построить доверительный интервал для суммарного объема запросов. Предлагаются несколько подходов для разных вариантов задачи. Первый подход – это с помощью точечных оценок оценить неизвестные параметры распределений. Далее применяются байесовские подходы (подробнее см. [1]) и предлагается способ определения апостериорной плотности распределения некоторых неизвестных параметров, учитывающий статистическую информацию о входах на предыдущих этапах. Зная суммы объемов запросов на предыдущих этапах, относительно легко построить оценку математического ожидания суммарного объема запросов для рассматриваемого этапа. Для этого достаточно подсчитать среднее всех сумм. Построение доверительного интервала требует больше информации о распределении сумм запросов.

Точечные оценки. Неизвестный параметр Пуассоновского распределения количества запросов на этапе предлагается оценивать как $\hat{n} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n_j$. Эта оценка, как известно, является несмещенной оценкой математического ожидания Пуассоновского распределения (подробнее см. работу [2]). В качестве оценок параметра a на каждом этапе используем точечные оценки $\hat{a}_j = \max_{1\leqslant i\leqslant n_j} p_i^j - \min_{1\leqslant i\leqslant n_j} p_i^j$, $\hat{\theta}_j = (\max_{1\leqslant i\leqslant n_j} p_i^j + \min_{1\leqslant i\leqslant n_j} p_i^j)/2$. Описание свойств этих оценок можно найти в работе [2]. Далее, на следующем уровне, похожим образом оцениваются параметры μ и τ: $\hat{\tau}_j = \max_{1\leqslant j\leqslant N} \hat{\theta}_j - \min_{1\leqslant j\leqslant N} \hat{\theta}_j$, $\hat{\mu} = (\max_{1\leqslant j\leqslant N} \hat{\theta}_j + \min_{1\leqslant j\leqslant N} \hat{\theta}_j)/2$. В качестве оценки параметра a, в общем, используется точечная статистика $\hat{a} = \max_{1\leqslant j\leqslant N} \hat{a}_j$. После построения данных оценок можно генерировать из распределений входы и подсчитывать суммы объемов запросов. После этого возможно воспользоваться методом Монте-Карло для подсчета оценки математического ожидания и доверительного интервала для суммы объемов запросов. Отметим, что сумма объемов запросов является измеримой случайной величиной в данном случае, как сумма измеримого случайного количества измеримых случайных величин, подробнее см. [3].

Байесовский подход. Генерирование параметров один раз для одного этапа. Для применения байесовского подхода определяется априорное распределение вектора неизвестных параметров (θ, a) . Сначала рассматривается многогранник $A = \{(\theta, a) | \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\hat{\mu}, \varepsilon \leqslant a \leqslant 2\hat{\tau}\}$, где ε - некоторое достаточно малое положительное число. Предполагается равномерное априорное распределение вектора $\alpha = (\theta, a)$ на многограннике A.

Далее, принимаются во внимание статистические данные, т.е. объемы запросов прошедшего этапа и строится функция плотности условного распределения вектора объемов запросов в зависимости от параметров. И, наконец, с помощью формул Байеса, определяется условное распределение параметров в зависимости от вектора объемов запросов. В данном случае апостериорная плотность распределения неизвестных параметров в зависимости от данных объемов запросов определяется как:

$$f(\alpha|x) = \frac{1}{Ra^m(2\hat{\mu}-\varepsilon)(2\hat{\tau}-\varepsilon/2)}, \text{ если } \alpha \in A\bigcap C(x) \tag{1}$$

$$f(\alpha|x) = 0, \text{ иначе.}$$

В формуле (1) $C(x) = \{(\theta, a), -\frac{a}{2}+x_i \leqslant \theta \leqslant \frac{a}{2}+x_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ и $R = \int_{A\bigcap C(x)} \frac{1}{a^m(2\hat{\mu}-\varepsilon)(2\hat{\tau}-\varepsilon/2)} d\theta da$. m - это количество запросов рассматриваего этапа, а x_i их объемы запросов.

Отметим, что при таком подходе апостериорное распределение неизвестных параметров не остается равномерным и функция его плотности не равна нулю на многограннике $A\bigcap C(x)$. Т.к. предполагается генерирование параметров на каждом этапе, можно подсчитать апостериорную плотность распределения параметров для каждого этапа на основе объемов запросов за данный этап, а потом использовать усредненную апостериорную плотность за все этапы. Далее, когда подсчитана апостериорная плотность неизвестных параметров, можно генерировать параметры с этой апостериорной плотностью и генерировать объемы запросов. Используя метод Монте-Карло возможно построение оценок математического ожидания и доверительного интервала для суммы объемов запросов.

Байесовские подходы. Генерирование параметров для каждого запроса. Сейчас рассматривается случай, когда вектор параметров $\alpha = (\theta, a)$ генерируется для каждого запроса отдельно. Рассмотрим все объемы запросов из статистической информации: $x_1, x_2, \ldots, x_m, m = \sum_{j=1}^{N} n_j$. Выделим из них какое-то количество первых k объемов, и, используя вышеприведенную технику, построим для этих первых k длительностей апостериорные распределения параметров $f_l(\alpha_l|x_l)$. Далее, мы предполагаем, что с вероятностью r_l неизвестные параметры распределены с плотностью $f_l(\alpha_l|x_l)$, Соответствующее событие, состоящее в том, что неизвестные параметры распределены с плотностью $f_l(\alpha_l|x_l)$, обозначим за M_l.

Воспользуемся байесовским подходом, чтобы получить апостериорную плотность события $M_l : \tau(M_l|x)$, при условии обьема запроса x.

Для каждого события M_l подсчитаем количество оставшихся требований t_l, для которых $\tau(M_l|x) = \max\{\tau(M_h|x), 1 \leqslant h \leqslant k\}$, при этом, если максимум достигается на нескольких индексах, выбираем только один произвольный из них. Тогда оценка для неизвестной вероятности r_l равна: $\hat{r}_l = t_l/(m-k)$.

В завершение отметим, что есть еще один способ определения апостериорной плотности распределения параметров $\alpha = (\theta, a)$. Для этого для всех данных объемов заказов построим апостериорные распределения параметров $f_l(\alpha_l|x_l), 1 \leqslant l \leqslant m$. На их основе определим апостериорное распределения как $g(\alpha) = \sum_{l=1}^{m} r_l f(\alpha|x_l)$, где $\sum_{l=1}^{m} r_l = 1$. Далее с помощью метода максимального правдоподобия определяются оптимальные значения коэффициентов $r_l, 1 \leqslant l \leqslant m$.

Литература

1. Carlin B. P. *Bayes and empirical Bayes methods for data analysis*. New York : Chapman and Hall/CRC, 2nd edition, 2000.

2. Боровков А. А. *Математическая статистика*. СПб.: издательство «Лань», 2010.

3. Боровков А. А., *Теория вероятностей*. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ ХЕЛЛЕРА-ГОРФИНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ

А.П. Бузин[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
aleksei.buzin@math.msu.ru

В работе [1] Кресси и Рид ввели общий критерий, обобщающий хорошо известные критерии отношения правдоподобий (likelihood ratio test) и критерий хи-квадрат. Однако, при применении подобного подхода к данным общего вида существенным аспектом, влияющим на качество критерия, является выбор отрезков разбиения. Эта проблема остается актуальной для всех видов модификаций критериев Кресси-Рида, однако, нас она будет интересовать применительно к задаче однородности. Для простоты опишем следующую проблематику в терминах критерия хи-квадрат.

Один из вариантов решения данной проблемы, значительно повышающих мощность, для критериев проверки однородности и независимости был предложен в работе [2], где было предложено рассматривать всевозможные разбиения и суммировать или брать максимум у соответствующих разбиениям статистик критериев Кресси-Рида (в оригинальной работе рассматривались лишь два упомянутых частных случая).

Схожие подходы к гипотезе независимости, основанные на переборе различных разбиений, были рассмотрены в работах [3] и [4].

Однако, в подходе HHG, как и подходе Reshef, не удается описать предельное распределение статистики, что приводит к большим вычислительным затратам. В настоящей работе приводится модификация критерия, в которой удается найти предельное распределение статистики для гипотезы однородности.

Рассматриваем задачу проверки гипотезы однородности двух независимых выборок из независимых наблюдений:
$X_1,\dots X_{n_1} \sim P_1$ н.о.р., $Y_1,\dots Y_{n_1} \sim P_2$ н.о.р.
с непрерывными функциями распределения.

Мы рассматриваем статистики:

$$D = \sup_{T:\widehat{R}_n(\Delta_i(T))>\varepsilon} \chi^2(T),$$

или

$$D' = \frac{1}{\{\{\Delta\} : \widehat{R}_n(\Delta_i(T)) > \varepsilon\}} \sum_{T:\widehat{R}_n(\Delta_i(T))>\varepsilon} \chi^2(T),$$

где $\widehat{R}_n$ — совместное эмпиричекое распределение выборок, $n = n_1 + n_2$,
$\lim_{n\to\infty} n_1/n =: \alpha_1,\ \lim_{n\to\infty} n_2/n =: \alpha_2,\ R(\cdot) := \alpha_1 F_1(\cdot) + \alpha_2 F_2(\cdot)$,

$$\chi^2(T) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\nu_{i,j} - n_j\frac{\nu_{i,1}+\nu_{i,2}}{n}\right)^2}{n_j\frac{\nu_{i,1}+\nu_{i,2}}{n}} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\widehat{P}_{j,n_j}(\Delta_i) - \widehat{R}_n(\Delta_i)\right)^2 n_j}{\widehat{R}_n(\Delta_i)}.$$

Теорема.

- *При гипотезе D имеет невырожденное предельное распределение, для которого получено явное выражение.*
- *При гипотезе распределение D не зависит от распределения $P_1 = P_2$.*
- *При $H_0 : F_1 = F_2$ с $H_1 : \exists x : F_1(x) \neq F_2(x)$, такое что $F_1(x)$ или $F_2(x)$ лежат в $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ критерий, построенный по статистике D, будет состоятельными.*

- *При общей альтернативе выражение:*

$$\left(D-\sup_{T:R(\Delta_i(T))>\varepsilon}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{(F_j(\Delta_i)-R(\Delta_i))^2\alpha_j}{R(\Delta_i)}\right)\sqrt{n}$$

имеет невырожденное предельное распределение.

В докладе будет обсуждаться поведение статистики в случае $\varepsilon=\varepsilon(n)\to 0$ (при $n\to\infty$). Также в докладе будут рассмотрены свойства статистики D'.

Литература

1. Cressie N., Read T. R. C. *Multinomial goodness-of-fit tests* //Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1984. Vol. 46, No 3. P. 440–464.

2. Heller R. et al. *Consistent distribution-free K-sample and independence tests for univariate random variables* //Journal of Machine Learning Research. 2016. Vol. 17, No 29. P. 1–54.

3. Ma L., Mao J. *Fisher exact scanning for dependency* //Journal of the American Statistical Association. 2019. Vol. 114, No 525. P. 245–258.

4. Reshef D. N. et al. *Detecting novel associations in large data sets* // Science. 2011. Vol. 334, No 6062. P. 1518–1524.

PQ-PQ КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

У.И. Буялова[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
buyalova@yandex.ru

Введение. В работе рассматривается критерий однородности двух одномерных выборок из независимых одинаково распределенных (н.о.р.) величин. Рассматриваются две выборки: $X_1,\dots,X_n, X_i\sim F, \forall i\in\{1,\dots,n\}$; $Y_1,\dots,Y_m, Y_j\sim G, \forall j\in\{1,\dots,m\}$, $F(x), G(x)$ – непрерывные функции распределения. Мы хотим получить критерий однородности: $H_0: F(x)=G(x)$, $H_1: F(x)\neq G(x)$. В данной работе все сходимости рассматриваются в метрическом пространстве $(D[0,1],\rho)$, где ρ – равномерная метрика. В статистике широко распространен способ измерения расстояний между одномерными распределениями, основанный на разности между эмпирическими функциями распределения (ЭФР). Примерами такого рода служат критерий Смирнова ([1]) , Крамера-фон Мизеса ([2]) и Андерсона-Дарлинга ([3]) и родственный им критерий Баумгартнера-Вейсса-Шиндлера ([4]). Помимо указанных критериев существует широкий спектр критериев однородности, не использующий расстояние между эмпирическими функциями распределения, один из современных обзоров можно найти во введении работы [5].

Интересным и красивым инструментом для сравнения распределений является $p-$расстояние Вассерштейна между вероятностными мерами ([6]). Например, в одномерном случае $p-$расстояние Вассерштейна использует разницу между квантильными (то есть обратными к функции распределения) функциями.

В работе [6] предлагается называть $PP-$ критериями те, который основаны на различии между эмпирическими функциями распределения, а $QQ-$ критериями – основанные на различиях между эмпирическими квантильными функциями.

Преимущества $PP-$ подхода в том, что в отличие от QQ, в случае выполнения гипотезы о равенстве распределений и их непрерывности, предельное распределение инвариантно относительно рассматриваемых распределений.

Рассмотрим статистику критерия, которая названа нами $PQ-PQ$ подходом и обладает свойством инвариантности:

$$\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right)-\hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right).$$

Теоремы о предельном распределении. Введем теоретические характеристики, на основе которых далее будут построены статистики критериев:

$$d_K(F,G) = \sup_{x\in[0,1]} \left|F\left(G^{-1}(x)\right) - G\left(F^{-1}(x)\right)\right|, \tag{12}$$

$$d_{CM}(F,G) = \int_0^1 \left(F\left(G^{-1}(x)\right) - G\left(F^{-1}(x)\right)\right)^2 dx, \tag{13}$$

$$d_{AD}(F,G) = \int_0^1 \frac{\left(F\left(G^{-1}(x)\right) - G\left(F^{-1}(x)\right)\right)^2}{x(1-x)} dx. \tag{14}$$

Лемма. *Каждая из описанных в (1)-(3) характеристик равна нулю тогда и только тогда, когда соответствующие распределения совпадают.*

Таким образом, критерии со статистиками, которые будут построены на основе характеристик d_K, d_{CM}, d_{AD} должны будут работать для общей альтернативы.

Введем статистики на основе характеристик (1)-(3):

$$\hat{d}_K\left(\hat{F}_n,\hat{G}_m\right) = \sup_{x\in[0,1]} \left|\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right|, \tag{15}$$

$$\hat{d}_{CM}\left(\hat{F}_n,\hat{G}_m\right) = \int_0^1 \left(\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right)^2 dx, \tag{16}$$

$$\hat{d}_{AD}\left(\hat{F}_n,\hat{G}_m\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\left(\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right)^2}{x(1-x)} dx, \tag{17}$$

где $\hat{F}_n(x)-$ эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1,\ldots,X_n$, $\hat{G}_m(x)-$ эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $Y_1,\ldots,Y_m$.

Теорема. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – непрерывные функции распределения. Тогда*

$$\hat{d}_K \xrightarrow{\mathbb{P}} d_K,$$
$$\hat{d}_{CM} \xrightarrow{\mathbb{P}} d_{CM},$$
$$\hat{d}_{AD} \to \widetilde{d},$$

где $\widetilde{d} = +\infty$, если выполнена альтернатива и 0, если верна гипотеза.

Заметим, что получили сходимость по вероятности построенных статистик (4), (5) к соответствующим характеристикам (1), (2). Таким образом, при верной гипотезе все три статистики стремятся к нулевым, а при верной альтернативе – к ненулевым величинам. Значит, критерии, основанные на данных статистиках будут состоятельными.

Теорема. *Предположим, что $n/(n+m) \to p$, при $n,m \to \infty$. Тогда*

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\left(\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right) \xrightarrow{D} 2W_x^0.$$

Следствие. *Предположим, что $n/(n+m) \to p$, при $n,m \to \infty$. Тогда*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_{x\in[0,1]} \left|\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right| \xrightarrow{D} \sup_{x\in[0,1]} \left|W_x^0\right|,$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\left(\hat{F}_n\left(\hat{G}_m^{-1}(x)\right) - \hat{G}_m\left(\hat{F}_n^{-1}(x)\right)\right)\right)^2 dx \xrightarrow{D} \int_0^1 \left(W_t^0\right)^2 dt.$$

Теорема. *Предположим, что $n/(n+m) \to p$, при $n,m \to \infty$. Тогда при $n,m \to \infty$*

$$\frac{nm}{n+m}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\left(\hat{F}_{n,1}\left(\hat{G}_{m,2}^{-1}(x)\right) - \hat{G}_{m,2}\left(\hat{F}_{n,1}^{-1}(x)\right)\right)^2}{x(1-x)} dx \xrightarrow{D} 4\int_0^1 \frac{\left(W_x^0\right)^2}{x(1-x)} dx. \tag{18}$$

Литература

1. Smirnov N. *Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions* // Ann. Math. Stat. 1948. Vol. 19. P. 279–281.

2. Anderson T. W. *On the Distribution of the Two-Sample Cramér-von Mises Criterion* // The Annals of Mathematical Statistics. 1962. Vol. 33, No 3. P. 1148–1159.

3. Scholz F. W., Stephens M. A. *K-Sample Anderson-Darling Tests* // Journal of the American Statistical Association. Vol. 82, No 399. P. 918–924.

4. Baumgartner W., Weib P., Schindlerl H. *A Nonparametric Test for the General Two-Sample Problem* // Biometrics. Vol. 54, No 3. P. 1129–1135.

5. Heller R., Heller Y., Kaufman S., Brill B., Gorfine M. *Consistent Distribution-Free K-Sample and Independence Tests for Univariate Random Variables* // Journal of Machine Learning Research. 2016. Vol. 17. P. 1–54.

6. Ramdas A., Trillos N. G., Cuturi M. *On Wasserstein Two-Sample Testing and Related Families of Nonparametric Tests* // Entropy. 2015. Vol. 19. 47p.

МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

В.А. Волошко[1,2,a], **Ю.С. Харин**[1,2,b]

[1]НИИ прикладных проблем математики и информатики
[2]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
[a]valoshka@bsu.by, [b]kharin@bsu.by

В докладе строится новый класс малопараметрических Марковских моделей высокого порядка для дискретных временных рядов и вероятностно-статистический анализ на их основе. Предлагаемые модели определяются специальными базисными функциями от $(s+1)$-грамм, где s – порядок цепи Маркова. Усреднение этих базисных функций по $(s+1)$-граммам наблюдаемого временного ряда вместе с частотами встречаемости s-грамм составляют достаточные статистики. Логарифмическая функция правдоподобия при этом строго вогнута при выполнении мягких условий регулярности, и оценка максимального правдоподобия (ОМП) единственна и вычисляется методом градиентного подъёма с любой нужной точностью.

Вид достаточных статистик позволяет интерпретировать базисные функции как некоторые содержательные информативные признаки. Поиск таких информативных признаков, таким образом, может рассматриваться как один из способов построения адекватных решаемой задаче малопараметрических моделей. Если полносвязная цепь Маркова порядка s использует всю статистическую информацию о частотах встречаемости $(s+1)$-грамм, то построенная новая модель использует малую долю этой информации, определяемую базисными функциями (информативными признаками).

В докладе описываются всевозможные частные случаи моделей из построенного класса и их связь с известными в литературе моделями [1]. Строится альтернативная ОМП асимптотически состоятельная и эффективная статистическая оценка параметров модели на основе частот [2]. Эта оценка применима для некоторого специального подкласса построенного класса моделей. В отличие от ОМП, она имеет явный вид, однако медленнее сходится к границе Крамера-Рао с ростом длины наблюдаемого временного ряда. Описывается алгоритм статистического прогнозирования дискретных временных рядов на основе построенных моделей. Оценивается вычислительная сложность алгоритмов статистической оценки параметров и прогнозирования. Полученные теоретические выводы проиллюстрированы компьютерными экспериментами на модельных и реальных данных.

Литература

1. Fokianos K., Fried R., Kharin Yu., Voloshko V. *Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series* // Journal of Multivariate Analysis. 2022. Vol. 188. Art. 104805.

2. Kharin Yu., Voloshko V. *Robust estimation for Binomial conditionally nonlinear autoregressive time series based on multivariate conditional frequencies* // Journal of Multivariate Analysis. 2021. Vol. 185, No 2. P. 11–27.

СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ МАРКОВСКИМ ОПИСАНИЕМ ПРОЦЕССА СОВМЕСТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАПРОСОВ

А.Н. Дудин[1], **С.А. Дудин**[1], **О.С. Дудина**[1]

[1]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
{dudin,dudins,dudina}@bsu.by

Введение. Наибольшее внимание в теории систем массового обслуживания (СМО) получили однолинейные системы, в которых запросы обслуживаются по одному. Однако, во многих реальных системах возможно одновременное обслуживание нескольких запросов и исследование таких систем является актуальным. Простейшим случаем таких систем являются стандартные многолинейные СМО, в которых системный ресурс разделен на фиксированное количество, скажем, N, частей (приборов), каждый из которых производит обслуживание независимо от других приборов. Такой тип систем исследован в литературе, начиная с пионерских работ А.К. Эрланга в начале 1900-х годов.

Недостатком такой схемы является недостаточное использование ресурса, поскольку часть приборов может простаивать. Прогресс в развитии телекоммуникационных технологий привел к возможности использования более эффективных механизмов разделения ресурсов для одновременного обслуживания нескольких запросов, например, дисциплины разделения процессора (*PS*), см., например, [1,2]. Этот механизм предполагает, что все имеющиеся запросы обслуживаются одновременно со скоростью, обратно пропорциональной их числу. Однако, классический механизм *PS* не подходит для многих реальных систем, где обслуживание на слишком низкой скорости может быть неприемлемо для запросов. Поэтому количество одновременно обслуживаемых запросов должно быть ограничено. Таким образом, была введена дисциплина ограниченного разделения процессора (*LPS*). Эта дисциплина предполагает, что не более N запросов могут получить обслуживание одновременно. Для ссылок см., например, [3-5].

Во многих системах неприемлемо и слишком быстрое обслуживание. Это учитывает смешанная дисциплина обслуживания, см., например, [6,7], которая предполагает, что ограниченное количество запросов получают обслуживание с постоянной скоростью, как в стандартной многолинейной системе, а другая часть запросов обрабатывается с использованием дисциплины *LPS*. В данном докладе вводится и рассматривается более общее математическое описание механизма разделения ресурса, который единообразно описывает как существующие, так и перспективные механизмы одновременного обслуживания нескольких запросов.

Постановка задачи. Основной результат

Мы рассматриваем СМО с возможностью обслуживания одновременно до N запросов. Описание процесса обслуживания следующее. Пусть количество запросов, обслуживаемых в момент t, равно n_t, $n_t = \overline{0,N}$. Пусть η_t – вспомогательный процесс с конечным пространством состояний, такой, что двумерный процесс $\{n_t, \eta_t\}$ ведет себя между последовательными прибытиями запросов в систему как квази-процесс гибели, являющийся частным случаем квази-процесса гибели и размножения, см., например, [8].

При фиксированном состоянии n процесса n_t, процесс η_t принимает значения из множества мощности K_n и квази-процесс гибели $\{n_t, \eta_t\}$ определяется двумя матрицами, H_n^0 и H_n^-. Недиагональные элементы квадратной матрицы H_n^0, $n = \overline{0,N}$, размера K_n описывают скорости переходов процесса η_t в его пространстве состояний, которые не приводят к завершению обслуживания. Диагональные элементы отрицательны. Модуль такого элемента определяет скорость выхода процесса η_t из соответствующего состояния. Матрица H_n^-, $n = \overline{1,N}$, размером $K_n \times K_{n-1}$ описывает скорости перехода процесса η_t, когда один из n запросов, обслуживаемых в системе, покидает ее.

Матрица H_n^0 является субгенератором, и $H_n^0\mathbf{e} + H_n^-\mathbf{e} = \mathbf{0}^T$, $n = \overline{1,N}$, где $\mathbf{e}$ и $\mathbf{0}$ являются векторами столбцов и строк из единиц и нулей, соответственно.

Если количество обслуживаемых запросов равно n, $n = \overline{0,N-1}$, и поступает новый запрос, он допускается в систему. Число запросов на обслуживании увеличивается до $n+1$, и процесс

η_t совершает переход с вероятностями, образующими стохастическую матрицу H_n^+, $n = \overline{0,N-1}$, размера $K_n \times K_{n+1}$, $H_n^+\mathbf{e} = \mathbf{e}$, $n = \overline{0,N-1}$.

Полезность введенного описания процесса обслуживания проиллюстрируем на примере. Пусть процесс обслуживания задан, как это только что описано. Пусть в систему поступает марковский поток запросов (*MAP*), заданный управляющей цепью Маркова ν_t с пространством состояний $\overline{1,W}$, интенсивностями переходов, сопровождающимися или нет приходом запросов, заданных матрицами D_1 и D_0. Более подробно с такими потоками можно познакомиться, например, в [8].

Поведение СМО с *MAP* потоком, описанным выше процессом обслуживания и бесконечным буфером для ожидания, определяется четырехмерным марковским процессом

$$\xi_t = \{i_t, n_t, \nu_t, \eta_t\},\ i_t \geqslant 0,\ n_t = \overline{0,N},\ \nu_t = \overline{1,W},\ \eta_t = \overline{1,K_{n_t}},\ t \geqslant 0,$$

где i_t — количество запросов в буфере, n_t — количество запросов на обслуживании, ν_t и η_t — состояния управляющих процессов прибытия и обслуживания в момент t, $t \geqslant 0$.

Упорядочим состояния цепи ξ_t в лексикографическом порядке. Пусть матрица $\mathbf{Q}_{i,j}$ содержит интенсивности перехода цепи ξ_t из состояний, имеющих значение i первой компоненты, в состояния, имеющие значение j первой компоненты $i, j \geqslant 0, |i-i| \leqslant 1$.

Лемма 1. Генератор $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{i,j})_{i,j \geqslant 0, |i-i| \leqslant 1}$ цепи ξ_t содержит ненулевые блоки:

$$\mathbf{Q}_{0,0} = \mathrm{diag}\{D_0 \oplus H_n^0,\ n = \overline{0,N}\} + \mathrm{diag}^+\{D_1 \otimes H^+{}_n,\ n = \overline{0,N-1}\} + \mathrm{diag}^-\{I_W \otimes H^-{}_n,\ n = \overline{1,N}\},$$

где $\mathrm{diag}\{\dots\}$, $\mathrm{diag}^+\{\dots\}$, и $\mathrm{diag}^-\{\dots\}$ обозначают блочно-диагональную, блочно-наддиагональную и блочно-поддиагональную матрицу с блочно-диагональными, блочно-наддиагональными и блочно-поддиагональными блоками, данными в скобках;

$$\mathbf{Q}_{0,1} = \begin{pmatrix} O_{W\hat{K}_{N-1} \times WK_N} \\ D_1 \otimes I_{K_N} \end{pmatrix},\ \mathbf{Q}_{1,0} = \begin{pmatrix} O_{WK_N \times W\hat{K}_{N-1}} I_W \otimes H_N^- H_{N-1}^+ \end{pmatrix},\ \hat{K}_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} K_k,$$

$$\mathbf{Q}_{i,i} = D_0 \oplus H_N^0,\ i \geqslant 1,\ \mathbf{Q}_{i,i+1} = D_1 \otimes I_{K_N},\ i \geqslant 1,\ \mathbf{Q}_{i,i-1} = I_W \otimes H_N^- H_{N-1}^+,\ i \geqslant 2.$$

Получив такое компактное выражение для генератора цепи Маркова ξ_t, можно применить существующие методы, см., например, [8] для полного анализа описанной СМО с *MAP* потоком и предложенным описанием процесса обслуживания, а также для анализа других систем, в частности, систем с повторными вызовами и тандемных систем.

Литература

1. Yashkov S. F. *Processor-sharing queues: Some progress in analysis* // Queueing systems. 1987. Vol. 2. P. 1–17.

2. Yashkov S. F., Yashkova A. S. *Processor sharing: A survey of the mathematical theory* // Automation and Remote Control. 2007. Vol. 68. P. 1662–1731.

3. Yamazaki G., Sakasegawa H. *An Optimal Design Problem for Limited Processor Sharing Systems* // Management Science. 1987. Vol. 33(8). P. 1010–1019.

4. Dudin A. N., Dudin S. A., Dudina O. S., Samouylov K. E. *Analysis of queueing model with processor sharing discipline and customers impatience* // Operations Research Perspectives. 2018. Vol. 5. P. 245–255.

5. D'Apice C., Dudin A., Dudin S., Manzo R. *Priority queueing system with many types of requests and restricted processor sharing* // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2023. Vol. 14(9). P. 12651–12662.

6. Dudin A., Dudin S., Dudina O. *Analysis of a queueing system with mixed service discipline* // Methodology and Computing in Applied Probability. 2023. Vol. 25(2). P. 1–19.

7. Nunez-Queija R. *Sojourn times in non-homogeneous QBD processes with processor-sharing* // Stochastic Models. 2001. Vol. 17(1). P. 61–92.

8. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The theory of queuing systems with correlated flows*. Springer Nature: Cham, 2020.

МНОГОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМЫМ РЕЙТИНГОМ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕМ

О.С. Дудина[1], **А.Н. Дудин**[1]

[1]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
{dudina,dudin}@bsu.by

Введение. В современном мире конкуренция между поставщиками услуг играет ключевую роль в привлечении покупателей. Например, поток клиентов напрямую зависит от рейтинга магазина, который, в свою очередь, формируется ценовой политикой, а также качеством обслуживания. Магазины с высоким рейтингом привлекают больше посетителей, что дает им возможность увеличивать цены. В условиях низкого рейтинга необходимо действовать иначе. В таких случаях снижение цен может стать единственным выходом для привлечения покупателей и улучшения репутации. Такой подход требует чуткости к рыночным тенденциям и обратной связи от клиентов. Важно найти тонкий баланс между ценой и качеством, чтобы не потерять доверие покупателей. В конечном счете именно этот баланс обеспечивает стабильный поток покупателей и, как следствие, устойчивый успех бизнеса. Целью данной работы является разработка методов определения оптимальной ценовой политики объекта торговли в зависимости от его рейтинга с помощью методов теории массового обслуживания.

Основной результат. Рассматривается многолинейная система массового обслуживания с бесконечной видимой очередью. Видимая очередь означает, что пришедший клиент может наблюдать ее длину, и на базе полученной информации принимать решение, ожидать или уйти. Интенсивность входного потока запросов зависит от рейтинга системы, который может принимать целое значение из интервала $[1,R]$, где R – наивысший рейтинг. Считаем, что чем выше рейтинг системы, тем выше средняя интенсивность входного потока. Рейтинг системы может динамически меняться в зависимости от результатов опроса клиента. Мы предполагаем, что произвольный пришедший клиент высказывает свое мнение с заданной вероятностью b, и что клиент не участвует в опросе с дополнительной вероятностью $1-b$.

Предполагается, что клиент, участвующий в опросе, в основном оценивает два пункта: качество обслуживания (зависит от длины очереди) и уровень цен. Если опрашиваемый клиент становится в очередь, когда в системе находится i клиентов, то возможны следующие три сценария. С вероятностью $a_i^{(1)}$ клиент оценивает длину очереди как короткую и увеличивает рейтинг системы на единицу. С вероятностью $a_i^{(2)}$ он оценивает очередь как слишком длинную и уменьшает рейтинг на единицу. С вероятностью $1-a_i^{(1)}-a_i^{(2)}$ клиент оценивает длину очереди как приемлемую и не изменяет рейтинг. Если опрашиваемый клиент покидает систему из-за нежелания стоять в очереди, он всегда уменьшает рейтинг системы на единицу.

Уровень цен в системе также может динамически изменятся менеджером в зависимости от рейтинга. Уровень цен в системе изменяется в диапазоне от 1 до P, где P соответствует максимальному уровню цен. При фиксированном уровне цен p, $p=\overline{1,P}$, с вероятностью $b_p^{(1)}$ опрошенный клиент удовлетворен уровнем цен и рейтинг системы увеличивается на единицу. С вероятностью $b_p^{(2)}$ опрошенный клиент считает, что цены слишком высоки, и рейтинг системы уменьшается на единицу. С вероятностью $1-b_p^{(1)}-b_p^{(2)}$ опрошенный клиент безразличен к уровню цен и рейтинг не меняется.

Механизм динамического изменения уровня цен следующий. Текущая цена остается неизменной в течение экспоненциально распределенного с параметром $\gamma,\gamma>0$, времени. По истечении этого времени система пересматривает уровень цен в зависимости от текущего уровня рейтинга. Политика пересмотра определяется двумя целочисленными порогами r_1 и r_2, $1\leqslant r_1<r_2\leqslant R$. Если текущий рейтинг принадлежит интервалу $[1,r_1]$ (рейтинг относительно мал), то уровень цен уменьшается на единицу, если он уже не минимальный. Если текущий рейтинг находится в

интервале $[r_2, R]$ (рейтинг относительно велик), то уровень цен увеличивается на единицу, если он не максимальный. Цены не меняются, если рейтинг системы находится в интервале (r_1, r_2).

Целью исследования является определение управляющих порогов r_1 и r_2, которые задают изменение ценовой политики.

В работе построен процесс изменения состояний системы в виде многомерной цепи Маркова с непрерывным временем. Путем анализа всевозможных переходов данной цепи выписан инфинитезимальный генератор как блочная матрица вида

$$G = \begin{pmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & O & O & O & \dots \\ G_{1,0} & G_{1,1} & G_{1,2} & O & O & \dots \\ O & G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} & O & \dots \\ O & O & G_{3,2} & G_{3,3} & G_{3,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Путем исследования асимптотических свойств показано, что исследуемая цепь Маркова принадлежит к классу асимптотически-квазитеплицевых цепей, см. [1], что позволило получить условие существования стационарного режима. Используя специальные алгоритмы из работ [2,3], было вычислено стационарное распределение состояний системы, на базе которого были найдены основные характеристики производительности системы, такие как среднее количество клиентов в буфере, среднее количество занятых приборов, среднее количество клиентов в системе, среднее значение рейтинга системы, средний уровень цен, средняя интенсивность изменения уровня цен, средняя скорость поступления клиентов в систему, а также различные вероятности потерь.

Численно проведено изучение зависимостей характеристик производительности системы от управляющих параметров r_1 и r_2. На основе характеристик производительности системы введен экономический критерий, который описывает качество функционирования системы. Численно решена задача нахождения оптимальных значение параметров r_1 и r_2 с точки зрения заданного критерия.

Литература

1. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The theory of queuing systems with correlated flows*. Springer Nature: Cham, 2020.

2. Dudin S., Dudin A., Kostyukova O., Dudina O. *Effective algorithm for computation of the stationary distribution of multi-dimensional level-dependent Markov chains with upper block-Hessenberg structure of the generator* //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 366. Art. 112425.

3. Dudin S., Dudina O. *Retrial multi-server queuing system with PHF service time distribution as a model of a channel with unreliable transmission of information* // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 65. P. 676–695.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПУНКТА ВЫДАЧИ ЗАКАЗОВ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМОЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

С.А. Дудин[1], **О.С. Дудина**[1]

[1]Белорусский государственный университет, 220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
{dudins,dudina}@bsu.by

Введение. Онлайн-торговля стала неотъемлемой частью современного мира, предоставляя покупателям возможность приобретать товары из любой точки мира, не выходя из дома. Одним из ключевых аспектов, влияющих на удовлетворенность клиентов, является качество работы пунктов выдачи товара. Эти пункты играют важную роль в обеспечении удобства и скорости доставки заказов. Пункты выдачи товара могут быть представлены в виде почтовых отделений, специализированных центров выдачи, а также магазинов-партнеров. Они позволяют клиентам самостоятельно выбирать удобное для них место и время получения заказа, что особенно актуально для тех, кто не может или не хочет быть дома в ожидании доставки товара, поэтому пункты выдачи товаров таких маркетплейсов, как Wildberries, Ozon и других, появляются повсеместно.

Пункт выдачи товара имеют ограниченный объем склада, поэтому могут возникать ситуации, когда клиент не может сделать заказ с выдачей в нужном ему пункте из-за его перегруженности. Поскольку поток генерации заказов, время доставки и время, через которое клиенты приходят за доставленными товарами, являются случайными, возникают важные задачи оптимального выбора объема склада хранения доставленных товаров, а также определения условий, при которых необходимо прекращать принимать новые заказы. В данной работе построена математическая модель функционирования пункта выдачи товаров в терминах теории массового обслуживания.

Основной результат. Исследуемая система массового обслуживания представляет собой двухфазный тандем. Считаем, что на фазе 1 обслуживаются заказы, находящиеся в процессе доставки. Фаза 2 моделирует склад в пункте выдачи товаров и содержит заказы, готовые к выдаче. Поскольку емкость склада пункта выдачи ограничена, мы предполагаем, что фаза 2 может содержать одновременно не более N_1 заказов. Формально количество заказов в доставке может быть неограниченным. Однако, если количество заказов на первой фазе слишком велико, то велика вероятность того, что доставленный товар не будет принят пунктом выдачи из-за загруженности его склада. Поэтому мы предполагаем, что система прекращает прием заявок, когда на двух фазах находится N, $N > N_1$, заказов. Таким образом, фаза 1 имеет нефиксированную емкость, которая зависит от количества заказов на фазе 2.

Считаем, что входной поток запросов на доставку задается стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ. Когда количество заказов в системе не превышает N, новый заказ принимается в систему и количество заказов на первой фазе увеличивается на единицу, в противном случае этот заказ теряется.

Заказ из фазы 1 перемещается на фазу 2 (заказ доставляется на склад пункта выдачи) через экспоненциально распределенное время с параметром γ, $\gamma > 0$. Если на фазе 2 меньше N_1 заказов (количество заказов на складе), то заказ принимается на эту фазу (заказ поступает на склад), в противном случае он теряется. После поступления заказа на склад он ждет, когда его заберет клиент. Срок хранения заказов на складе ограничен.

Все клиенты делятся на две группы. Первая группа — это безответственные клиенты, которые получают свои заказы только тогда, когда срок хранения заказа почти истек. Вторая группа клиентов — ответственные клиенты, которые забирают свои товары до окончания хранения. Чтобы учесть это, в математической модели мы предполагаем, что ответственные клиенты забирают свои заказы по истечении экспоненциально распределенного времени с параметром μ, $\mu > 0$. Время нахождения заказа на фазе 2 (время хранения заказа на складе) ограничено и имеет экспоненциальное распределение с параметром α, $\alpha \geq 0$. По истечении этого времени с вероятностью p безответственный клиент забирает свой заказ (предполагается, что заказ доставлен), а с дополнительной вероятностью заказ теряется (возвращается со склада продавцу).

Предположим, что качество функционирования системы задается следующим стоимостным критерием

$$E = E(N_1, N) = a\lambda_{out} - b_1\lambda P_{loss-1} - b_2\lambda P_{loss-1\to 2} - cN_1.$$

Здесь

a – прибыль пункта выдачи за доставку заказа, λ_{out} – интенсивность выходного потока доставленных заказов;

b_1 – штраф за отказ принять заказ на доставку, P_{loss-1} – вероятность этого события;

b_2 – штраф за потерю заказа из-за невозможности его размещения на складе, $P_{loss-1\to 2}$ – вероятность этого события;

c – плата за содержание одного места хранения заказа на складе в единицу времени.

Таким образом, критерий E определяет среднюю прибыль системы за единицу времени.

Стоимостные коэффициенты a, b_1, b_2 и c фиксированы, в то время как характеристики $\lambda_{out}, \lambda P_{loss-1}$ и $\lambda P_{loss-1\to 2}$ очевидно зависят от параметров N_1 и N. Для того, чтобы иметь возможность вычислять данные характеристики производительности системы, в работе вводится многомерная цепь Маркова с непрерывным временем, которая описывает процесс изменения состояний системы. Далее, с помощью матрично-аналитических методов, см., например, [1], выписывается генератор данной цепи в виде блочной матрицы. Показывается, что введенная цепь является эргодической при любых параметрах системы. Затем с помощью численно устойчивых алгоритмов находится стационарное распределение состояний системы, на основе которого и найдены искомые характеристики производительности в виде

$$\lambda_{out} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\min\{N-i,N_1\}} k(\mu + (1-p)\alpha)\pi(i,k),$$

$$P_{loss-1} = \sum_{i=N-N_1}^{N} \pi(i,N-i),$$

$$P_{loss-1\to 2} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N-N_1} \gamma i \pi(i,N_1),$$

где $\pi(i,k)$ – стационарная вероятность того, что на фазе 1 и фазе 2 находится i и k заказов соответственно. После этого, мы получаем возможность расчёта значений критерия качества при любых значениях входных параметров. Задача нахождения оптимальных значений параметров N_1 и N может быть решена методом прямого перебора или с использованием так называемых derivative-free методов оптимизации, см., например, [2].

Литература

1. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The theory of queuing systems with correlated flows*. Springer Nature: Cham, 2020.

2. Conn A. R., Scheinberg K., Vicente, L. N. *Introduction to Derivative-Free Optimization. MPS-SIAM Book Series on Optimization. SIAM: Philadelphia, 2009.*

О ВЫЧИСЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СДУ СКОРОХОДА

А.Д. Егоров[1]

[1]Институт математики НАН Беларуси, 220072 Беларусь, Минск, Сурганова 11

egorov@im.bas-net.by

Построение приближенных формул для вычисления математического ожидания нелинейных функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с детерминированными коэффициентными функциями базируются на выполнении требования их точности для моментов (и в более общем случае) для полиномиальных функционалов третьей степени от решения. Более того, при построении используется конкретный аналитический вид моментов (см., например, [1]). В работе [6] рассматривалось вычисление математического ожидания нелинейных функционалов от решения линейного СДУ Скорохода с ведущим винеровским процессом со случайными начальном условием и коэффициентными функциями предложен новый подход к построению квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени, основанный на применении кратных интегралов Стилтьеса, где использовались только числовые значения моментов на заданном временном промежутке. В докладе исследуется вопрос приближенного вычисления нелинейных функционалов от случайных процессов, заданных решениями СДУ Скорохода с ведущим пуассоновским процессом. Исследования СДУ Скорохода проводятся в рамках функционального анализа (исчисления вариаций), связанного с использованием дифференцирования и интегрирования функций, не адаптированных к потоку сигма -алгебр, порождаемых ведущим случайным процессом. Представление решений линейных СДУ Скорохода со случайными коэффициентными функциями и начальным условием для винеровского и пуассоновского случайных воздействий получены в [2-5] в рамках этого анализа. Однако, полученные представления решения содержат в качестве неизвестного параметра решение вспомогательного стохастического интегрального уравнения. В общем случае получение каких-либо аппроксимаций этого вспомогательного стохастического интегрального уравнения, подходящих для их использования в представлении решения исходного СДУ, представляет собой сложную задачу. Поэтому представляет интерес получение его точных решений для конкретных коэффициентных функций уравнения. В докладе приводятся результаты, полученные в этом направлении для линейных СДУ Скорохода с ведущим винеровским процессом [7], а также частные случаи получения точного решения для СДУ с пуассоновским ведущим воздействием. Рассматривается также смешанный случай, когда ведущий случайный процесс представляет собой сумму винеровского и пуассоновского процессов. Обсуждаются вопросы вычисления моментов решений и построения с их использованием приближенных формул для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от решений, точных для функциональных многочленов третьей степени.

Литература

1. Ayrjan E. A., Egorov A. D., Malyutin V. B, Sevastianov L. A *Approximate formulas for mathematical expectations of functionals of random processes defined by Ito-Levy integral expansion* // Mathematical Modelling and Geometry. 2017. Vol. 2, No 1, P. 13–24.

2. Buckdahn R., Nualart D. *Linear stochastic differential equations and Wick products* // Probab. Th. Rel. Fields. 1994. Vol. 99. P. 501–526.

3. Privault N. *Linear Skorohod stochastic differential equations on Poisson space* // Stochastic Analysis and Related Topics V: The Silivri Workshop. Progress in Probability, H. Körezlioğlu, D. Øxsendal, and A. S. Üstünel, editors, 1996. P. 237–253.

4. Privault N. *Hypothesis testing and Skorohod stochastic integration* // Applied Probability Trust. 2000. Vol. 37(02). P. 560–574.

5. Ilchenko A. V. *Cauchy formula for affine stochastic differential equation with Skorohod integral*// Statistics, optimization and information computing. 2019. Vol. 7. P. 686–694.

6. Егоров А. Д. *Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57, № 2. С. 198–205.

7. Egorov A. D. *О вычислении функционалов от решения линейного СДУ Скорохода с хаосом первого порядка в коэффициентах* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2023. Т. 59, № 3. С. 201–212.

АСИМПТОТИКА ВРЕМЕНИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДВУПОЛОГО КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

А.П. Жиянов[1], А.В. Шкляев[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
zhiyanovap@gmail.com, alexander.shklyaev@math.msu.ru

В работе рассматривается двуполый критический ветвящийся процесс

$$Z_n = L(F_n, M_n, \eta_n),\ n > 0$$

в случайной среде $\eta = \{\eta_n, n > 0\}$, начинающийся с большого числа пар $Z_0 = N$. Предполагается, что состояния среды $\eta_1, \eta_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами и определяют распределение числа потомков типа F и M по закону

$$\mathbf{E}\left(s^{F_n} t^{M_n} \middle| Z_{n-1}, \eta_n\right) = f_{\eta_n}(s,t)^{Z_{n-1}},\ n = 1, \ldots,$$

где $f_\alpha(s,t)$ – семейство производящих функций.

На функцию паросочетаний $L(x,y,z)$ накладываются следующие условия:

- $L(x,y,z)$ субаддитивна, то есть

$$L(x+u, y+v, z) \geqslant L(x,y,z) + L(u,v,z);$$

- существует функция $g(x,y,z)$, являющаяся Липшицевой по первым двум аргументам, удовлетворяющая равенству $g(tx,ty,z) = tg(x,y,z)$ для всех $t > 0$ и аппроксимирующая функцию $L(x,y,z)$ по закону
$$|L(x,y,z) - g\,(x,y,z)| \leqslant \rho\,|x+y|^{\alpha},\ \alpha \in (0,1).$$

Также предполагается, что приращения $\xi_n = \ln \mathbf{E}\,(\,g\,(F_{n,1}, M_{n,1})\,|\,\eta_n)$ сопровождающего случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ имеют нулевое среднее и конечный момент $\mathbf{E}\,|\xi_n|^{\beta} < \infty$, где $\beta > 2$.

В этих условиях показано, что имеет место сходимость по распределению $\tau(N)/\ln^2 N \xrightarrow{d} \zeta$, $N \to \infty$, где $\tau(N) = \min\{n > 0 : Z_n = 0\}$ – время вырождения ветвящегося процесса. В работе найдено точное распределение невырожденной случайной величины ζ.

О ПОСТРОЕНИИ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИЙ МИНИМИЗИРУЮЩЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ФУНКЦИИ ВЫПЛАТ

Н.М. Зуев[1], П.М. Лаппо[1]

[1]Белорусский государственный университет, 220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
{zuevnm, lappopm}@bsu.by

Приводятся рекуррентные соотношения для построения портфеля состоящего из рискового и безрискового активов минимизирующего среднеквадратическое отклонение от функции выплат рискового актива

Ключевые слова: опцион; стоимость опциона; портфель

Рассматривается (B,S) рынок [1] . Значение S_n – стоимость единицы рискового актива в момент времени n изменяется следующим образом
$$S_n = S_0(1+\rho_1)...(1+\rho_n),$$
где $\rho_k, k = 1,...,n$, процентные ставки, которые изменяются случайным образом. B_n – стоимость единицы безрискового актива в момент времени n,
$$B_n = B_0(1+r_1)...(1+r_n),$$
где $r_k, k = 1,...,n$ зависят только от $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ – портфель в момент времени n. Где β_n – количество единиц безрискового актива в момент времени n, γ_n – количество единиц рискового актива в момент времени n, $n = 1,...,N$, N – терминальный момент, в который предъявляется опцион к исполнению. f_N – функция выплат, которая зависит только от случайных величин $\rho_1,...,\rho_N$. β_n, γ_n являются предсказуемыми величинами и зависят только от $\rho_1,...,\rho_{n-1}$. $X_n^{\pi} = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n$ – стоимость портфеля в момент n.

Задача построения портфеля минимизирующего средний квадрат отклонения стоимости портфеля и функции выплат в момент N состоит в выборе портфелей $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$, $n = 1,...,N$, таким [2,3], чтобы
$$E(X_0^{\pi^*} - f_n)^2 = \min_{\pi} E(X_0^{\pi} - f_N)^2.$$

Обозначим через $E(\cdot|\rho_1,...,\rho_k = E_k(\cdot)$ и $D(\cdot|\rho_1,...,\rho_k) = D_k(\cdot)$ условные математические ожидания и дисперсии соответственно.

Теорема. *Значения $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$, $n = 1,...,N$, $X_0^{\pi^*}$ находятся рекуррентным образом из соотношений:*
$$\gamma_k^* = \frac{\mathrm{cov_{k-1}(f_r^*, \rho_k)}}{S_{k-1}D_{k-1}(\rho_k)},$$
$$\beta_k = \frac{E_{k-1}(\rho_k^2)E_{k-1}(f_k^*) - E_{k-1}(\rho_k f_k^*) - E_{k-1}(\rho_k)E_{k-1}(\rho_k) + E_{k-1}(\rho_k)E_{k-1}(f_k^*)}{B_{k-1}(1+r_k)D_{k-1}(\rho_k)},$$
$$f_N^* = f_N,$$

$$f_k^* = \gamma_{k+1}^* S_k + \beta_{k+1}^* B_k,\ k = N-1, N-2, ..., 0,$$

$$X_0^{\pi^*} = f_0^*.$$

Доказательство теоремы следует из свойств условных математических ожиданий путем приравнивания частных производных по весам портфелей к нулю и решения соответствующих систем уравнений.

Литература

1. Ширяев А. Н. *Основы стохастической финансовой математики.* М.:Фазис, 1998. Т. 2: Теория. С. 482–1106.

2. Зуев Н. М. *Расчёт опционов Европейского и Американского типов* // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. 2014. С. 64–66.

3. Zuev N. M. *A formula for European options costs calculation* // Computer Data Analysis and Modeling: Stochastics and Data Science: Proc. of the Twelfth International Conference, Minsk: BSU, 2019. P. 352–353.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РАССТОЯНИЙ ОТ ЭМПИРИЧЕСКИХ ТОЧЕК ДО ПРЯМОЙ РЕГРЕССИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В.В. Королевич[1]

[1]Международный центр современного образования
PSČ 110 00 Česká Republika, Praha 1, Štepanská 61
v.korolevich@mail.ru

Пусть в результате статистических наблюдений или измерений получена некоторая совокупность n экспериментальных (эмпирических) точек, расположенных на корреляционном поле вдоль некоторой прямой линии. Для расчета параметров линейной регрессии здесь предлагается применить *метод наименьших квадратов расстояний* (МНКР) от эмпирических точек до прямой регрессии.

Уравнение прямой регрессии имеет вид [1]

$$\hat{y}_x(x) = ax + b, \tag{1}$$

где a и b – неизвестные параметры.

Уравнение окружности радиуса r_i с центром в эмпирической точке $O_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,n}$ [2]:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2.$$

Уравнение прямой, проходящей через эмпирическую точку $O_i(x_i, y_i)$ и перпендикулярной к прямой регрессии имеет вид

$$y_\perp(x) = y_i - \frac{1}{a}(x - x_i).$$

Поскольку окружности касаются прямой регрессии, то координаты точек касания найдем из решения системы уравнений

$$\hat{y}_x(x_i^{(\text{к.})}) = y_i^{(\text{к.})} = ax_i^{(\text{к.})} + b, \quad y_\perp(x_i^{(\text{к.})}) = y_i^{(\text{к.})} = y_i - \frac{1}{a}(x_i^{(\text{к.})} - x_i). \tag{2}$$

Решая систему (2), определим координаты точек касания $M_i(x_i^{(\text{к.})}, y_i^{(\text{к.})})$, $i = \overline{1,n}$:

$$x_i^{(\text{к.})} = \frac{1}{a^2+1}(ay_i + x_i - ab), \quad y_i^{(\text{к.})} = \frac{1}{a^2+1}(a^2 y_i + ax_i + b).$$

Из геометрии известно, что радиус r_i окружности перпендикулярен касательной к окружности. Следовательно, радиус r_i окружности можно рассматривать как расстояние d_i от эмпирической точки $O_i(x_i, y_i)$ до прямой регрессии.

Составим сумму квадратов расстояний d_i :

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2=\sum_{i=1}^{n}r_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i^{(\text{к.})}-x_i)^2-(y_i^{(\text{к.})}-y_i)^2]\to\min. \qquad (3)$$

Для минимизации суммы (3) необходимо приравнять нулю первые частные производные по параметрам a и b :

$$\frac{\partial S}{da}=\sum_{i=1}^{n}\left[2(x_i^{(\text{к.})}-x_i)\frac{\partial x_i^{(\text{к.})}}{\partial a}+2(y_i^{(\text{к.})}-y_i)\frac{\partial y_i^{(\text{к.})}}{\partial a}\right],$$
$$\frac{\partial S}{db}=\sum_{i=1}^{n}\left[2(x_i^{(\text{к.})}-x_i)\frac{\partial x_i^{(\text{к.})}}{\partial b}+2(y_i^{(\text{к.})}-y_i)\frac{\partial y_i^{(\text{к.})}}{\partial b}\right]. \qquad (4)$$

Вычисляя частные производные $\partial x_i^{(\text{к.})}/\partial a$, $\partial x_i^{(\text{к.})}/\partial b$, $\partial y_i^{(\text{к.})}/\partial a$, $\partial y_i^{(\text{к.})}/\partial b$ и проведя алгебраические преобразования в системе (4), получим систему уравнений для нахождения параметров a и b :

$$(a^2-1)\overline{XY}+a(\overline{X^2}-\overline{Y^2})+(2a\overline{Y}-(a^2-1)\overline{X})b-ab^2=0,\quad a\overline{X}+b-\overline{Y}=0. \qquad (5)$$

Здесь средние значения

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad \overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad \overline{Y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,\quad \overline{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Из системы (5) имеем квадратное уравнение для параметра a и линейное уравнение для параметра b :

$$a^2+\frac{(\overline{X^2}-\overline{X}^2)-(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2)}{\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}}a-1=0,\quad b=-a\overline{X}+\overline{Y}.$$

Если угол наклона α прямой регрессии к оси Ox меньше 90°, то выбирается положительное значение a_1 корня квадратного уравнения для параметра a, а отрицательное значение a_2 соответствует угловому коэффициенту семейства прямых, перпендикулярных прямой регрессии. Если $90^\circ<\alpha<180^\circ$, то выбирается отрицательное значение α_2 корня квадратного уравнения для параметра a, а положительное значение a_1 соответствует угловому коэффициенту семейства прямых, перпендикулярных прямой регрессии. Отметим, что в статье [3] другим методом была получена система уравнений для параметров a и b, аналогичная системе (5).

На примере из учебного пособия [1, с. 201] проведем сравнительный анализ двух методов: классического метода наименьших квадратов (МНК) и метод наименьших квадратов расстояний (МНКР) (табл.).

Таблица. Сравнительный анализ МНК и МНКР.

i	1	2	3	4	5
x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	2.1	2.2	2.7	2.8	2.85
$\hat{y}_x^{(1)}(x_i)$ (МНК)	2.11	2.32	2.53	2.74	2.95
$\hat{y}_x^{(2)}(x_i)$ (МНКР)	2.101	2.315	2.529	2.743	2.957
Расстояние $d_i^{(1)}$ (МНК)	0.009	0.111	0.157	0.055	0.092
Расстояние $d_i^{(2)}$ (МНКР)	0.002	0.107	0.157	0.051	0.099

Из таблицы следует, что сумма расстояний от эмпирических точек до прямой регрессии по методу МНК равна $\sum_{i=1}^{5}d_i^{(1)}=0.424$, а сумма расстояний по методу МНКР – $\sum_{i=1}^{5}d_i^{(2)}=0.415$. Таким образом, прямая регрессии по методу МНКР $\hat{y}_x^{(2)}(x)=0.428x+1.673$ лучше приближена к эмпирическим точкам, чем прямая регрессии по классическому методу МНК $\hat{y}_x^{(1)}(x)=0.42x+1.69$.

Предложенный метод МНКР может с успехом применяться в экономической статистике, биологии, физике и технике.

Литература

1. Мацкевич И. П., Свирид Г. П. *Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика.* Мн.: Выш. школа, 1993.

2. Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. *Основные математические формулы.* Мн.: Выш. школа, 1980.

3. Ефремов А. Е. *Метод наименьших квадратов расстояний (МНКР) для парной линейной регрессии* // Сб. матер. VIII Всерос. научно-практической конф. молодых ученых с международным участием «Россия молодая», 19–22 апреля 2016 г. Кемерово, 2016. Секция «Математика».

ПАНДЕМИЯ COVID-19: ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛНОЙ ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ В 2020–2023 ГОДАХ

Е.Г. Красногир[1]

[1]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
krasnahir@bsu.by

В данной работе на примере нескольких стран Европы исследуется динамика изменения математического ожидания случайной величины $T(x)$ – будущего времени жизни лица, возраст которого на момент расчета равен x. Указанный показатель будем называть полной ожидаемой продолжительностью жизни (далее – ОПЖ) и обозначать $E\{T(x)\}$.

Используя определение математического ожидания и формулу интегрирования по частям, можно показать, что

$$E\{T(x)\} = \int_0^\infty {}_t p_x \, dt = \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} \, dt = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty l_{x+t} \, dt,$$

где ${}_t p_x$ – вероятность того, что лицо возраста x доживет до возраста $x+t$; l_x – количество лиц, доживших до возраста x, из l_0 новорожденных [1].

На практике часто используют следующую приближенную формулу:

$$E\{T(x)\} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{w-x-1} l_{x+k},$$

где w – предельный возраст, такой что $l_x > 0$ при $x < w$ и $l_x = 0$ иначе [2].

В основе исследования лежат статистические данные о численности населения по полу и возрасту и о количестве умерших в разрезе пола и возраста на дату смерти, представленные в виде таблиц жизни [1], содержащих следующие величины: l_x, $x = \overline{0,\ 100}$, $l_0 = 100000$; $d_x = l_x - l_{x+1}$ – число умерших в возрасте x; $q_x = d_x \big/ l_x$ – вероятность смерти в возрасте x.

Выбор стран для исследования обусловлен наличием в открытом доступе подробных таблиц жизни за достаточно продолжительный период времени, включая таблицы жизни за 2022–2023 год, когда пандемия пошла на спад и затем была объявлена завершенной.

Рассматривая таблицы жизни за 2007–2023 годы для Норвегии [3], Польши [4] и Чехии [5], вначале выясним, имело ли место уменьшение ОПЖ во время пандемии COVID-19, насколько оно было значительным и были ли подобные изменения до пандемии (в 2007–2019 годах). Затем определим, насколько отличаются ОПЖ до пандемии и ОПЖ в 2023 году.

Норвегия. COVID-19 начал оказывать значительное влияние на смертность населения только в 2021–2022 году, а в 2020 году ОПЖ при рождении по сравнению с 2019 годом увеличилась у мужчин на 0,29 года (до 81,48 года), у женщин – на 0,21 года (до 84,89 лет). Это увеличение оказалось даже большим, чем в 2019 году (по 0,19 года у обоих полов). В 2021 году рост ОПЖ при рождении по сравнению с 2020 годом у мужчин продолжился (0,11 года), однако у женщин ОПЖ при рождении уменьшилась на 0,16 года.

Наиболее значительно COVID-19 проявился в 2022 году: ОПЖ при рождении у мужчин уменьшилась на 0,67 года, у женщин – на 0,38 лет. В сумме за два года ОПЖ при рождении у женщин уменьшилась на 0,54 года. В итоге в 2022 году по величине ОПЖ при рождении Норвегия вернулась на уровень 2017–2018 годов. Отметим, что до пандемии COVID-19 (по данным с 2007 года) ОПЖ при рождении в Норвегии в целом росла (исключение составляет 2012 год, когда ОПЖ при рождении у женщин уменьшилась на 0,04 года по сравнению с 2011 годом).

В 2023 году рост ОПЖ возобновился: ОПЖ при рождении у мужчин выросла по сравнению с 2022 годом на 0,47 года (до 81,39 лет), у женщин – на 0,28 года (до 84,63 лет). В итоге в 2023 году по величине ОПЖ при рождении Норвегия практически вернулась на уровень до COVID-19.

Таким образом, к настоящему времени Норвегии в целом удалось преодолеть последствия пандемии COVID-19 по величине ОПЖ.

Польша. В Польше последствия COVID-19 в виде снижения ОПЖ начали проявляться уже в 2020 году. ОПЖ при рождении в 2020 году по сравнению с 2019 годом снизилась у мужчин на 1,46 лет (до 72,61 лет), у женщин – на 1,04 года (до 80,71 лет). В 2021 году тенденция сохранилась. В сумме за два года ОПЖ при рождении у мужчин уменьшилась на 2,32 года, у женщин – на 2,07 года.

Хотя за период 2007–2019 годов снижение ОПЖ при рождении наблюдалось у мужчин в 2015 и в 2018 годах, у женщин – в 2015, 2017 и 2018 годах, однако тогда она снижалась не более чем на 0,17 года. В итоге, ОПЖ при рождении за 2020–2021 годы у мужчин снизилась до уровня 2009–2010 годов, у женщин – до уровня 2007 года.

Рост ОПЖ жителей Польши возобновился в 2022 году: за 2022–2023 годы ОПЖ при рождении у мужчин выросла по сравнению с 2021 годом на 2,90 лет (до 74,65 лет), у женщин – на 2,31 года (до 81,99 лет). В результате, если в 2022 году по величине ОПЖ при рождении у мужчин Польша вернулась на уровень 2013–2015 годов, у женщин – на уровень 2012–2013 годов, то уже в 2023 году ОПЖ при рождении достигла максимального значения за весь период с 2007 года. Таким образом, Польше удалось восстановить и даже превысить значения ОПЖ при рождении 2019 года.

Чехия. Здесь также последствия COVID-19 начали проявляться уже в 2020 году. ОПЖ при рождении в 2020 году по сравнению с 2019 годом снизилась у мужчин на 1,03 года (до 75,30 лет), у женщин – на 0,72 года (до 81,38 лет).

В 2021 году тенденция сохранилась. В сумме за два года ОПЖ при рождении у мужчин уменьшилась на 2,24 года, у женщин – на 1,59 года. За предыдущий период 2007–2019 годов снижение ОПЖ при рождении зафиксировано у мужчин в 2015 и в 2017 годах, у женщин – в 2015 году, однако тогда она снижалась не более чем на 0,28 года.

Рост ОПЖ жителей Чехии возобновился в 2022 году: за 2022–2023 годы ОПЖ при рождении у мужчин выросла по сравнению с 2021 годом на 2,80 лет (до 76,89 лет), у женщин – на 2,27 лет (до 82,78 лет). Уже в 2022 году по величине ОПЖ при рождении Чехия практически вернулась на уровень до начала пандемии, а в 2023 году она достигла максимального значения ОПЖ за весь период с 2007 года. Таким образом, Чехии также удалось восстановить и даже превысить значения ОПЖ при рождении 2019 года.

В целом, все сделанные выводы также справедливы для ОПЖ лиц произвольного возраста в рассмотренных странах.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что имевшее место во время пандемии COVID-19 аномальное снижение ОПЖ к началу 2024 года было преодолено, ОПЖ вернулась или даже превысила достигнутые до пандемии уровни. То есть в настоящее время по крайней мере в рассмотренных нами странах стал возможным выход на траекторию постепенного роста ОПЖ, которая наблюдалась до начала пандемии.

Литература

1. Бауэрс Н. [и др.]. *Актуарная математика*. М.: Янус-К, 2001.

2. Foss A.H. *Definisjoner og beregnings-metoder for dodelighetstabell* [Electronic resource] // SSB Notat. 98/89. 1998. URL: https://www.ssb.no/a/histstat/not/not_9889.pdf (date of access: 08.09.2024).

3. *07902: Life tables, by sex and age 1966 - 2023* [Electronic resource] // Statistics Norway: сайт. URL: https://www.ssb.no/en/statbank/table/07902 (date of access: 08.09.2024).

4. *Life tables of Poland in 1990-2023* [Electronic resource] // Statistics Poland: сайт. URL: https://stat.gov.pl/en/topics/population/life-expectancy/life-expectancy-in-poland-historical-tables,1,4.html (date of access: 08.09.2024).

5. *Complete Life Tables. 1920-2023* [Electronic resource] // Czech Statistical Office: сайт. URL: https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/en/index.jsf?page=statistiky&katalog=32592 (date of access: 08.09.2024).

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

А.И. Ладнев[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Колмогорова 1
alex.ladnev@gmail.com

Введение. Доклад посвящен модификации процесса Гальтона-Ватсона, которую мы будем называть ветвящийся процесс переменного типа.

Представим, что в чашке Петри, которая находится под освещением лампой, в начальный момент времени содержится одна бактерия. Когда лампа включена, бактерии размножаются, образуя ветвящийся процесс с распределением числа потомков, имеющим большее среднее, а если выключена, то с другим распределением, имеющим меньшее среднее. Лампа поочередно включается и выключается на циклы различной длины, образуя ветвящийся процесс в изменяющейся среде.

Ветвящимся процессам в изменяющейся среде последнее время уделяется особенное внимание. Знаковой здесь стала статья [1]. Спецификой настоящей работы является нестационарность среды - циклы каждого типа с течением времени удлиняются, что создает специфичное поведение. Схожую конструкцию в случайной среде можно увидеть в работе [2].

Математическая модель. Пусть $P := \{p_i, i \geqslant 0\}$ и $Q := \{q_i, i \geqslant 0\}$ – дискретные распределения на целых неотрицательных числах с $\mathbf{E}_P X > 1$, $\mathbf{E}_Q X < 1$ и $p_0 > 0$, $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, а k и l – два натуральных параметра. Определим рекуррентно две последовательности

$$T_0^+ = 0,\ T_i^- = T_i^+ + \tau_i k,\ T_{i+1}^+ = T_i^- + \tau_i l.$$

Тогда ветвящимся процессом переменного типа (ВППТ) с начальным размножением назовем процесс, заданный соотношением

$$Z_0 = 1,\ Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{i,j}, \tag{19}$$

где $\{X_{i,j}\}$ – независимые в совокупности случайные величины, причем при каждом фиксированном i $\{X_{i,j}\}$ одинаково распределены с распределением $\{p_i\}$, когда $i \in (T_l^+, T_l^-]$, и с распределением $\{q_i\}$, когда $i \in (T_l^-, T_{l+1}^+]$.

ВППТ с начальным упадком задается соотношением (19) с рекуррентными последовательностями

$$T_0^- = 0,\ T_i^+ = T_i^- + \tau_i l,\ T_{i+1}^- = T_i^+ + \tau_i k.$$

При этом при $i \in (T_l^-, T_l^+]$ мы предполагаем, что $X_{i,j}$ имеют распределение $\{q_i\}$, при $i \in (T_l^+, T_{l+1}^-]$ – распределение $\{p_i\}$.

Будем называть ВППТ докритическим, если $m := (\mathbf{E}_P X)^k (\mathbf{E}_Q X)^l < 1$, критическим, если $m = 1$ и надкритическим, если $m > 1$.

В докладе мы рассмотрим вероятности вырождения всех трех типов ВППТ, и покажем необходимое условие вырождения процесса с вероятностью меньшей 1.

Также отдельно рассмотрим связь вероятности вырождения надкритического процесса со скоростью роста последовательности $\{\tau_i\}$, в том числе найдем условие выполнения теоремы о сходимости надкритического процесса в $L^2(P)$.

Для докритического процесса нами будет описана асимптотика вероятности невырождения процесса, а так же условная предельная теорема для количества частиц при условии невырождения в моменты смен режима разножения.

Литература

1. Kersting G. *A unifying approach to branching processes in a varying environment* // J. Appl. Prob. 2020. Vol. 57. P. 196–220.
2. Коршунов И. Д. *Ветвящиеся процессы в случайной среде с замораживаниями* // Дискретная математика. 2023. Т. 35, № 3. С. 20–36.
3. Ватутин В. А. *Ветвящиеся процессы и их применения*. Лекционные курсы НОЦ, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). М.: МИАН, 2008. Вып. 8 108с.

ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С МАЛЫМИ ШУМАМИ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

М.А. Лещинская[1,a], Е.А. Пчелинцев[1,b]

[1]Томский государственный университет, 634050 Россия, Томск, пр. Ленина 36

[a]povzunyasha@gmail.com, [b]evgen-pch@yandex.ru

Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдаемый процесс $(y_t)_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dy_t = S(t)dt + \varepsilon d\xi_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\,, \tag{1}$$

где $S \in \mathcal{L}_2\,[0,\,1]$ – неизвестная функция, $\varepsilon > 0$ – интенсивность шума $(\xi_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$, который задается негауссовским процессом Орнштейна – Уленбека с возмущением Леви, т.е.

$$d\xi_t = \lambda\xi_t dt + du_t, \quad u_t = W_t + Z_t\,.$$

Здесь $(W_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ – стандартный процесс броуновского движения, скачкообразный процесс

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leqslant\varrho\}}\,(\mu-\tilde{\mu})(ds,\,dx)\,,$$

где $\mu(ds,\,dx)$ – скачкообразная мера с детерминированным компенсатором $\tilde{\mu}(ds,\,dx) = ds\Pi(dx)\,,\Pi(\cdot)$ – неизвестная мера Леви на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Предполагаем, что параметр ϱ является функцией $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ такой, что $\varrho \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и коэффициент $-\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant 0$ с порогом $\lambda_* = \lambda_*(\varepsilon) = o(-\ln\varepsilon)$.

Задача заключается в оценивании функции S в модели (1) по наблюдениям $(y_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$. Основная цель работы – развитие метода эффективного оценивания в минимаксном смысле для неизвестной функции S, принадлежащей соболевскому классу

$$\Theta_{\alpha,r} = \left\{ S \in \mathcal{L}_2\,[0,1] \,:\, \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha}\theta_j^2 \leqslant r \right\}, \quad r > 0\,, \quad \alpha > 0\,, \tag{2}$$

$(\theta_j)_{j\geqslant 1}$ – коэффициенты Фурье функции S. Точность оценивания будем измерять квадратическим риском

$$\mathcal{R}\left(\hat{S},S\right) := \mathbf{E}_S\|\hat{S},S\|^2 \quad \text{и} \quad \|S\|^2 = \int_0^1 S^2(t)dt\,.$$

Тогда для достижения цели необходимо минимизировать максимальное значение этого риска при $\varepsilon \to 0$, т.е. найти

$$\inf_{\hat{S}\in\Sigma_\varepsilon}\sup_{S\in\Theta}\mathcal{R}\left(\hat{S},S\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,,$$

где Σ_ε – семейство всевозможных оценок для функции S.

Следуя работе [1], определим оценку для функции S в следующем виде:

$$\hat{S}(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\hat{\theta}_j\varphi_j(t)\,, \quad \gamma_j = 1 - \left(\frac{j}{n}\right)^{\alpha/2}\,, \tag{3}$$

$$n = \max\left\{ l \geqslant 1 \,:\, l^{\alpha/2}\sum_{j=1}^{l} j^{\alpha/2} - \sum_{j=1}^{l} j^{\alpha} \leqslant r\varepsilon^{-2} \right\}$$

и $(\hat{\theta}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ – некоторые оценки коэффициентов Фурье, $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{L}_2[0,1]$ с $\varphi_1 \equiv 1$. Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть наблюдаемый процесс удовлетворяет уравнению* (1) *с функцией* $S \in \Theta_{\alpha,r}$. *Тогда оценка* (3) *является асимптотически эффективной, т.е.*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \sup_{S\in\Theta} R(\hat{S},S) = C_{\alpha,r},$$

где константа Пинскера

$$C_{\alpha,r} = ((1+\alpha)r)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Исследование поддержано РНФ, проект № 24-11-00191.

Литература

1. Pchelintsev E. A., Pergamenshchikov S. M., Povzun M. A. *Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time* // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2022. Vol. 74, No 1. P. 113–142.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРА ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

М.М. Луценко[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный экономический университет
191023 Россия, Санкт-Петербург, наб. канала Грибоедова 30-32, литер А
ml4116@mail.ru

Введение. Среди методов построения оценок параметра семейства дискретных случайных величин особое место занимают методы, основанные на теоретико-игровом подходе, так как в рамках этого подхода удается учитывать потери (выигрыши) Статистика при неверной оценке параметра. Кроме того, при использовании пороговой функции выигрыша получаются минимаксные интервальные оценки, построенные по произвольному набору допустимых интервалов [1]. Заметим, что этот подход позволяет строить точные доверительные интервалы без использования нормальной аппроксимации.

Построение статистической игры. Пусть дано семейство дискретных случайных величин $\{\mathbf{X}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ с распределениями $P_\theta(x) = Pr(\mathbf{X}_\theta = x)$, где Θ – множество параметров семейства, а X – множество возможных значений случайных величин этого семейства. Пусть D – множество решений Статистика о параметре θ, которые он может принять по результату наблюдения за случайной величиной $\mathbf{X} = \mathbf{X}_\theta$. Обозначим через $D^X = \{\delta | \delta : X \to D\}$ множество решающих функций, которые каждому возможному наблюдению $x \in X$ ставят в соответствие решение $d \in D$.

Мы считаем, что известен выигрыш Статистика $h(d,\theta)$, который он получит, если им принято решение d, а истинное значение параметра равно θ. В этом случае выражение

$$H(\delta,\theta) = \sum_{x\in X} h(\delta(x),\theta)P_\theta(x) \tag{1}$$

задает математическое ожидание выигрыша Статистика, если он использовал решающую функцию $\delta \in D^X$, а истинное значение параметра было θ.

Если априорное распределение ν параметра θ на множестве Θ известно, то мы приходим к следующей экстремальной задаче

$$H(\delta,\nu) = \int_\Theta H(\delta,\theta)d\nu(\theta) = \sum_{x\in X}\int_\Theta h(\delta(x),\theta)P_\theta(x)d\nu(\theta) \to \max$$

Если априорное распределение ν неизвестно, то мы приходим к более сложной задаче, то есть к нахождению следующего максимина:

$$\max_{\mu}\min_{\nu} H(\mu,\nu),$$

где $\mu=(\mu^x)_{x\in X}$ вероятностное распределение на D^X. В этом представлении вероятностное распределение μ^x соответствует поведению Статистика, если он наблюдает $x\in X$. Таким образом, мы приходим к смешанному расширению антагонистической игры $\Gamma=\langle D^X,\Theta,H\rangle$ между Статистиком и Природой.

Основные результаты. Наибольший интерес представляют задачи оценки по наблюдаемой доли x параметра θ для семейств биномиально распределенных $\mathbf{B}(\theta,N)$ и геометрически распределенных случайных величин. В связи с широким распространением тестирования представляют интерес задачи оценки уровня знаний θ, если вероятности правильных ответов на задания теста объема N различны (модель Раша) [2, 3].

Широко известны оценки параметра $\theta\in[0,\ 1]$ для функций выигрыша, напоминающих дисперсию

$$h(d,\theta)=-\varphi(\theta)(d-\theta)^2,\ d\in[0,\ 1].$$

Оптимальные решающие функции были найдены с помощью методов выпуклого программирования [4, 5]. Оказалось, что построенные таким образом оценки не совпадают с классическими оценками параметра, то есть с долей успехов.

Если функция выигрыша пороговая

$$h(d,\theta)=\mathbf{1}_{\Delta(d)}(\theta),$$

где через $\mathbf{1}_A(\theta)$ обозначена характеристическая функция множества A, через $\{\Delta(d)\}_{d\in D}$ – заданное семейство допустимых интервалов, ($\Delta(d)\in\Theta$), то мы приходим к игре Γ, в которой функция успеха (1) задает вероятность попадания оцениваемого параметра θ в доверительный интервал из набора интервалов δ. Таким образом, значением решающей функции будет интервал, предъявляемых Статистиком, если он наблюдает x, то есть $\delta(x)=\Delta(d^x)$.

Значение статистической игры Γ будет равно доверительной вероятности, а оптимальная стратегия Статистика задает наилучший (минимаксный) набор доверительных интервалов из заданного допустимого множества интервалов. В частности, если мы хотим минимизировать число наблюдений, при котором параметр оценивается с заданными точность и надежностью, то за допустимое семейство интевалов следует взять то семейство, в котором все интервалы имеют одинаковую длину. В результате удается построить рандомизированное решающее правило и снижается число необходимых наблюдений.

Для решения подобных статистических игр, можно воспользоваться, как стандартными методами линейного программирования, так и специально разработанными для этих задач динамическими методами [6 – 9].

Литература

1. Lutsenko M. M. *Statistical games for discrete distributions*// Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2002. Vol. 510. P. 533–548.

2. Луценко М. М. *Теоретико-игровой подход к оценке точности тестирования*// Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 4. С. 63–77.

3. Луценко М. М., Шадринцева Н. В. *О точности педагогического тестирования*// Известия Петербургского университета путей сообщения. 2011. Вып 4(29). С. 250–258.

4. Блекуэлл Д., Гиршик М. *Теория игр и статистических решений*. М.: Из-во иностр лит., 1958. 374с.

5. Леман Э. *Теория точечного оценивания*. М.: Из-во Наука. Физматлит, 1991. 448с.

6. Луценко М.М. *Теоретико-игровой метод оценки параметра биномиального закона по результатам одного наблюдения* // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, вып. 3. С. 589–593.

7. Луценко М. М. *Теоретико игровой метод оценки параметра биномиального закона* // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35, вып. 3. С. 471–481.

8. Луценко М. М., Иванов М. А. *Минимаксные доверительные интервалы для параметра гипергеометрического распределения* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 68–76.

9. Lutsenko M. M., Maloshevskii S. G. *Minimax confidence intervals for the binomial parameter* // Journal of statistical planning and inference. 2003. Vol. 113. P. 67–77.

ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ В АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ

Н.И. Никифоров[1,a], С.М. Пергаменщиков[1,2,b], Е.А. Пчелинцев[1,c]

[1]Томский государственный университет, 634050 Россия, Томск, пр. Ленина 36
[2]Université de Rouen Normandie, LMRS UMR 6085 76000 France, Rouen
[a]nikitanikiforov_97@bk.ru, [b]serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr, [c]evgen-pch@yandex.ru

Предположим, что на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдаемые величины определяются следующим уравнением:

$$y_j = S(t_j) + \xi_j\,, \quad t_j = j/n\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,, \tag{1}$$

где $S(\cdot)$ – неизвестная неслучайная функция из $\mathcal{L}_2[0,1]$, $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ представляет собой ненаблюдаемую шумовую последовательность с некоррелированными гауссовскими $(0,\sigma^2)$ элементами. По этим наблюдениям требуется оценить функцию S. Пусть $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$ – ортонормированный в $\mathcal{L}_2[0,1]$ базис на решетке $\mathcal{T}_n = \{t_1, ..., t_n\}$, т.е. для любых $i, j \geqslant 1$

$$(\psi_i, \psi_j)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_i(t_k)\psi_j(t_k) = \mathbf{1}_{\{i\neq j\}}\,.$$

В дальнейшем будем обозначать через $\|\cdot\|_n$ – норму относительно этого скалярного произведения. Заметим, что функцию S в (1) можно представить в виде

$$S(t) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \psi_j(t)\,, \quad t \in \mathcal{T}\,,$$

где $\theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_n\right)$ – коэффициенты Фурье, т.е. $\theta_j = \left(S, \psi_j\right)_n$. Предполагаем, что коэффициенты Фурье для неизвестной функции S принадлежат эллипсоиду

$$\Theta_{\alpha,\kappa,r} = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_{j=1}^{n} e^{2\kappa j^{\alpha}} z_j^2 \leqslant r \right\}, \quad 0 < \alpha < 1\,, \quad \kappa > 0\,, \quad r > 0\,. \tag{2}$$

Основная цель работы – развитие метода асимптотически эффективного оценивания в минимаксном смысле для неизвестной функции S в модели (1) при $n \to \infty$. При этом ошибку всякой оценки $\tilde{S}$ будем измерять среднеквадратическим риском

$$\mathcal{R}\left(\tilde{S}, \theta\right) := \mathbf{E}_S \|\tilde{S} - S\|_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_\theta \left(\tilde{\theta}_j - \theta_j\right)^2, \quad \tilde{\theta}_j = \left(\tilde{S}, \psi_j\right)_n,$$

где $\mathbf{E}_\theta$ – усреднение по мере $\mathbf{P}_\theta$ в $\mathbb{R}^n$, порожденной наблюдениями (1) с функцией S с фиксированными коэффициентами фурье $\theta \in \Theta_{\alpha,\kappa,r}$. Для достижения цели необходимо минимизировать максимальное значение этого риска при $n \to \infty$, т.е. найти предел

$$\inf_{\tilde{S}\in\Sigma_n} \sup_{\theta\in\Theta_{\alpha,\kappa,r}} \mathcal{R}\left(\tilde{S}, \theta\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

где Σ_n – семейство всевозможных оценок для функции S. Имеем следующую нижнюю границу.

Теорема 1. *Пусть наблюдения удовлетворяют уравнению* (1) *и коэффициенты Фурье функции S принадлежат эллипсоиду $\Theta_{\alpha,\kappa,r}$, определенному в* (2). *Тогда для всех $r > 0$*

$$\liminf_{n\to\infty} \upsilon_n \inf_{\tilde{S}\in\Sigma_n} \sup_{\theta\in\Theta_{\alpha,\kappa,r}} \mathcal{R}\left(\tilde{S}, \theta\right) \geqslant \sigma^2 (2\kappa)^{-1/\alpha}\,,$$

где скорость $\upsilon_n = n(\ln n)^{-1/\alpha}$.

Покажем, что эта граница точна. Следуя работе [1], определим оценку для функции S при $t \in \mathcal{T}$ в следующем виде:

$$\hat{S}(t) = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \hat{\theta}_j \psi_j(t)\,, \tag{3}$$

где

$$d = [(2\kappa)^{-1/\alpha}(\ln n)^{1/\alpha}] + 1\,, \quad \gamma_j = 1 - e^{-\kappa(d^\alpha - j^\alpha)} \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_j = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \psi_j(t_l)\,y_l\,.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 асимптотический риск оценки* (3) *допускает следующую верхнюю границу*

$$\limsup_{n\to\infty} \upsilon_n \sup_{\theta\in\Theta_{\alpha,\kappa,r}} \mathcal{R}\left(\hat{S},\theta\right) \leqslant \sigma^2\,(2\kappa)^{-1/\alpha}.$$

Теоремы 1 и 2 влекут свойство асимптотической эффективности оценки (3). При этом полученная константа Пинскера не зависит от радиуса эллипсоида (2). Заметим также, что для модели (1) оптимальная скорость сходимости в параметрической постановке есть n^{-1}, здесь в непараметрической задаче мы получили $n^{-1}(\ln n)^{1/\alpha}$, т.е. почти параметрическую скорость сходимости (с точностью до логарифмического множителя). Поэтому оценка (3) называется суперэффективной.

Исследование поддержано РНФ, проект № 24-11-00191.

Литература

1. Pchelintsev E. A., Pergamenshchikov S. M., Povzun M. A. *Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time* // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2022. Vol. 74, No 1. P. 113–142.

О ПРИМЕНЕНИИ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ MMPP–ПОТОКОМ В КАЧЕСТВЕ МОДЕЛИ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Т.В. Русилко[1,a], **Д.А. Сальников**[1,b]

[1]Гродненский государственный университет им. Янки Купалы
230023 Беларусь, Гродно, Ожешко 22
[a]tatiana.rusilko@gmail.com, [b]dima.saln.gr@gmail.com

Введение. В подавляющем большинстве как базовых, так и современных работ по теории массового обслуживания принимается, что заявки поступают в системы и сети по пуассоновскому закону. В течение многих лет процесс Пуассона использовался в качестве модели трафика для процесса поступления телефонных вызовов на телефонную станцию. Пуассоновский поток нашел широкое применение в теории массового обслуживания, что обусловлено его хорошими аналитическими свойствами несмотря на вносимую им неточность при моделировании. В случае моделирования сетевого трафика в современных высоконагруженных сетях использование входящего пуассоновского потока приводит к существенным недостакам. Это связано с тем, что поток Пуассона предполагает постоянную среднюю частоту событий, в то время как в реальности зачастую наблюдаются временные колебания интенсивности трафика: всплески и падения активности в определенные часы или дни.

Применение модулированных пуассоновских потоков является одним из способов устранения такого недостатка в современных моделях инфокоммуникационных потоков, среди множества которых выделяется класс марковских модулированных пуассоновских потоков — MMPP-потоков

[1]. Модели трафика на основе MMPP применяются для моделирования пульсирующего трафика — неравномерного трафика с периодически пульсирующей пиковой нагрузкой. MMPP генерирует трафик, устанавливая несколько входных параметров, которые имеют физическое значение при исследовании информационно-коммуникационных систем. MMPP-поток управляется однородной цепью Маркова с конечным числом состояний и заданными инфинитезимальными характеристиками. Благодаря своей марковской структуре MMPP пригоден для моделей теории массового обслуживания, такие модели анализировались с 70-х, 80-х годов. Исследованию систем массового обслуживания с MMPP-потоком на входе ежегодно посвящается ряд научных работ [2, 3].

Описание модели. Рассмотррим математическую модель сети передачи данных, включающей узлы и каналы передачи даных. Узлы — это устройства, которые отправляют, принимают или пересылают данные в сети. Они могут быть различными, включая компьютеры (клиенты), серверы, маршрутизаторы и коммутаторы. Каналы передачи — это физические или логические пути, по которым данные передаются между узлами. Они могут быть проводными, как медные кабели, оптоволокно или беспроводными, как Wi-Fi, спутниковая связь.

В качестве модели и объекта исследования рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания (СеМО) между узлами которой циркулирует фиксированное число K заявок одного типа. Заявки, циркулирующие в сети, соответвуют пакетно передаваемым данным (пакетам данных), узлы или системы массового обслуживания (СМО) соответвуют узлам сети передачи данных. Для учета флуктуации трафика используем MMPP-поток. Полагаем, что число узлов СеМО конечно, узлам присвоены номера – 1, ..., n. Кроме того имеется узел S_0, который является IS-узлом (Infinite Server): число идентичных экспоненциальных линий данного узла равно общему числу заявок в сети – K. Полагаем, IS-узел является конечным источником заявок объема K, генерирующим MMPP-поток заявок в сеть – на узлы S_1, S_2, ..., S_n. Считаем, что MMPP-поток управляется случайным процессом $r(t)$. Процесс $r(t)$ — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний $r = 1,2,...,R$, заданая матрицей инфинитезимальных характеристик A с элементами α_{ur}, $u,r = \overline{1,R}$. Также считаем заданным набор неотрицательных чисел $\lambda_r \geqslant 0$, $r \in \{1,2,...,R\}$. Вспомогательная цепь Маркова $r(t)$ развивается во времени, и ее текущее состояние регулирует вероятностный закон поступления заявок: если в момент времени $t \in [0,\infty)$ процесс $r(t)$ находится в состоянии r, $r \in \{1,2,...,R\}$, то узел S_0 является IS-узлом с параметром λ_r. В этом случае интенсивность пуассоновского потока заявок, генерируемого IS-узлом S_0 на вход узла S_i, составляет $\lambda_r k_0 p_{0i}$, где k_0 — число занятых линий (заявок) в узле S_0, $r = \overline{1,R}$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{0i} = 1$.

Определим структуру и функционирование узлов S_i, $i = \overline{1,n}$. Каждый узел сети S_i — это СМО с m_i идентичными обслуживающими приборами (линиями) и неограниченным накопителем заявок. Длительности обслуживания заявок каждой линией СМО S_i имеют показательное (экспоненциальное) распределение с параметром μ_i, $i = \overline{1,n}$. Дисциплина обслуживания заявок в узлах сети – FIFO (first in first out). Определены маршрутные вероятности p_{i0}, p_{i1}, ..., p_{in}, которые определяют вероятности мгновенного попадания заявок, обслуженных в узле S_i, $i = \overline{0,n}$, в узлы 0, 1, ..., n. Матрица $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{0,n}}$ является стохастической, причем полагаем, что она неразложима и $p_{ii} = 0$, $i = \overline{0,n}$.

В каждый момент времени t состояние исследуемой сети определяется $(n+1)$-мерным случайным вектором:

$$(k_1(t), k_2(t), ..., k_n(t), r(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ — это число заявок (пакетов) в i-м узле в момент t, $i = \overline{1,n}$. Процесс (1) представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. Будем говорить, что сеть находится в состоянии (k,r,t), если в момент времени t компоненты $k_i(t) = k_i$, $i = \overline{1,n}$, образуют вектор $k = (k_1,k_2,...,k_n)$ и управляющая MMPP-потоком цепь Маркова $r(t)$ пребывает в состоянии r. Обозначим через $P_r(k,t) = P(k_1(t) = k_1,...,k_n(t) = k_n, r(t) = r)$ вероятность состояния (k,r,t), т. е. вероятность того, что в момент t процесс $r(t)$ оказывается в состоянии r и при этом в i-м узле сети находится k_i заявок, $i = \overline{1,n}$.

Получена система разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей $P_r(k,t)$, однако ее решение представляет несомненные технические трудности, в связи с чем требуется приближение.

В качестве задачи исследования выбран асимптотический анализ случайного процесса (1) в случае большого числа заявок K в СеМО, который позволит получить приближенные результаты с определенной точностью [4]. В результате осуществлен предельный переход от дискретного марковского процесса (1) к смешанному, у которого компонента $r(t)$, управляющая MMPP-потоком, сохраняется дискретной, в то время как компоненты $k_i(t)/K$, $i=\overline{1,n}$, определяющие число заявок в СМО сети, – непрерывны. Выведено обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности распределения вероятностей смешанного процесса:

$$\frac{\partial p_r(x,\,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(r)}(x)p_r(x,\,t)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(r)}(x)p_r(x,\,t)\right)+\sum_{u=1}^{R}\alpha_{ur}p_u(x,\,t). \tag{2}$$

Установлен вид коэффициентов сноса и диффузии уравнения (2). На основе уравнения (2) получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета среднего числа заявок в каждом узле сети. Решение полученной системы дает возможность рассчитать среднее число заявок в каждом узле сети в как в стационарном, так и, что важно, в каждый момент времени t переходного режима.

Литература

1. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The theory of queuing systems with correlated flows*. Cham: Springer, 2020.

2. Pankratova E. V., Moiseeva S. P., Farkhadov M. P. *Infinite-server resource queueing systems with different types of Markov-modulated Poisson process and renewal arrivals* // Mathematics. 2022. Vol. 10, No 16. P. 1–16.

3. Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. *Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 1. С. 111–124.

4. Русилко Т. В. *G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. № 1. С. 45–54.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОВМЕСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ ПАКЕТА NIST И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

М.П. Савелов[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
savelovmp@gmail.com

В докладе будут обсуждаться результаты работы [1], в которой найдено предельное совместное распределение статистик, являющихся обобщениями статистик критериев пакета NIST [2] и других пакетов, при следующих гипотезах H_0 и H_1. Гипотеза H_0 состоит в том, что тестируемая последовательность состоит из независимых случайных величин с известным полиномиальным распределением, а альтернативная гипотеза H_1 соответствует схеме серий, в которой распределение тестируемой последовательности сближается с ее распределением при H_0. Примером гипотезы H_1 является марковская альтернатива специального вида. В частном случае, когда H_0 соответствует последовательности независимых испытаний Бернулли с параметром $\frac{1}{2}$ и когда H_1 сближается с H_0, полученные результаты позволяют найти предельные совместные распределения статистик следующих девяти критериев пакета NIST: «Monobit Test», «Frequency Test within a Block», «Runs Test», «Test for the Longest Run of Ones in a Block», «Binary Matrix Rank Test», «Non-overlapping Template Matching Test», «Linear Complexity Test», «Serial Test» и «Approximate Entropy Test», а также их обобщений, при гипотезах H_0 и H_1.

Литература

1. Савелов М. П. *Предельные совместные распределения статистик критериев пакета NIST и их обобщений* // Дискрет. матем. 2024. Т. 36, № 2. С. 71–116.

2. Rukhin A., Soto J., et al. *A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications* // NIST Special Publication 800-22 Revision 1a, ed. L. E. Bassham III, NIST, April 2010.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГАУССОВСКОЙ СМЕСИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Е.А. Савинов[1],

[1]Финансовый университет при Правительстве РФ, Ленинградский проспект 49, 125993, Москва, РФ, easavinov@fa.ru

Введение. Рассмотрим следующую общую задачу определения компонент смеси. Пусть имеется система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, описывающая продолжительности работы n различных компонентов сложной системы, работающей в случайной среде. Мы предполагаем, что при заданном состоянии среды (t) компоненты зависимы, имеют различные характеристики, и совместная функция распределения времени их работы определяется как $G_n^{(t)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Таким образом, продолжительности работы компонентов системы в случайной среде описываются смесью

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_n^{(t)}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mu(dt), \tag{1}$$

где предполагается, что параметр состояния среды одномерный, а мера μ описывает ее вероятностное поведение. Интересует вопрос, можно ли по выборке из распределения F_n что-то узнать о распределении $G_n^{(t)}$, ничего не зная о μ.

Введем определение CI-преобразования. Рассмотрим случайный вектор X_n с абсолютно-непрерывной функцией распределения

$$F(x_1, \dots, x_n) = C\left(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\right),$$

где $F_i(x_i)$ маргинальные распределения, связанные копулой C. Обозначим $F_{i\,|\,1\dots\hat{\imath}\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ условную функцию распределения случайной величины X_i относительно всех остальных компонент (знак ˆ означает пропуск соответствующего компонента). Рассмотрим случайные величины

$$X_{i,n}^* = F_{i\,|\,1\dots\hat{\imath}\dots n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n).$$

Как показано в [1], корректно следующее

Определение. *CI*-преобразованием *(*Cross-Independence*) абсолютно-непрерывной копулы C будем назвать отображение $C \mapsto C^{ci}$*

$$C^{ci}(u) = \mathsf{P}\{X_{1,n}^* \leqslant u_1, \dots, X_{n,n}^* \leqslant u_n\}, \quad u = (u_1, \dots, u_n),$$

где $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ некоторый абсолютно-непрерывный вектор с копулой C.

Пусть C_n согласованная последовательность копул одного из вариантов многомерных распределений Стьюдента (Kshirsagars Multivariate t-distribution (см. [2], стр. 87)) с характеристическими функциями

$$\psi_{1\dots n}(y_1, \dots, y_n) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{2}\langle B_n y, y\rangle\right\} g_r(t)\, dt, \tag{2}$$

где

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \qquad t > 0.$$

Доказана следующая

Теорема. *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $(u_1, \dots, u_k) \in (0,1)^k$ выполняется сходимость*

$$C_n^{ci}(u_1, \dots, u_k, 1 \dots, 1) \to C_{R_k^*}(u_1, \dots, u_k), \quad n \to \infty,$$

где $C_{R_k^*}$ *гауссовская копула с матрицей корреляций* R_k^**, соответствующей матрице* B_k^{-1}.

Моделирование и описание эксперимента. Для проверки согласия некоторой n-мерной выборки (для достаточно большого n) с семейством распределений (1) предлагается процедура, состоящая из последовательного CI-преобразования, нормализации (в смысле приведения координат элементов полученной выборки к стандартному гауссовскому распределению), редукции (взятия проекции выборки на меньшую размерность) и проверки полученной выборки на согласие с многомерным нормальным распределением.

Для участие в эксперименте были смоделированы выборки размерностей $n = 20$ и $n = 40$ объема $N = 200$ из следующих шести распределений: многомерного распределения Kshirsagars Multivariate t-distribution вида (2) с недиагональными матрицами B_n с $r = 1,2,4$ и 8-ю степенями свободы, гауссовской смеси вида (1), где мера μ определяется показательным распределением с плотностью e^{-t}, $t > 0$, и многомерного распределения, в котором одномерные гауссовские компоненты связаны D-vine копулами (см. например, [3-5]), в которых в качестве парных условных копул были выбраны двумерные гауссовские и копулы Клэйтона.

Для оценок условных функций распределения применялся подход, использующий снижение размерности (см. [6]). Для проверки многомерной нормальности использовался критерий, описанный в [7], с уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

Во всех случаях, как и должно быть, проекции исходных выборок любой размерности продемонстрировали отклонение от многомерного гауссовского распределения. В то же время проекции низкой (2-5) размерности CI-образов показали согласие с гауссовским распределением для всех гауссовских смесей, включая вариант с экспоненциальным смешиванием, и отклонение от гауссовости для всех проекций распределения на основе CI-образа D-vine копулы.

Замечание к эксперименту. Относительно небольшой объем выборки ($N = 200$) объясняется тем, что при фиксированной базовой размерности n увеличение выборки ведет к увеличению мощности критерия, который начинает демонстрировать отклонение от нормальности проекций всех CI-образов, что естественно, поскольку они лишь асимптотически гауссовские.

Литература

1. Savinov E., Shamraeva V. *On a Rosenblatt-type transformation of multivariate copulas* // Econometrics and Statistics. 2023. Vol. 25. P. 39–48.

2. Kotz S., Nadarajah S. *Multivariate t Distributions and Their Applications.* Cambridge University Press, 2004.

3. Joe H. *Families of m-variate distributions with given margins and* $m(m-1)/2$ *bivariate dependence parameters* // Lecture notes-monograph series. 1996. P. 120–141.

4. Bedford T., Cooke R. M. *Probability Density Decomposition for Conditionally Dependent Random Variables Modeled by Vines* // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 2001. Vol. 32. P. 245-–268.

5.// The Annals of Statistics. 2002. Vol. 30, No 4. P. 1031-–1068.

6. Hall P., Yao Q. *Approximating conditional distribution functions using dimension reduction* // Ann. Statist. 2005. Vol. 33 (3). P. 1404 – 1421.

7. Henze N., Zirkler B. *A Class of Invariant Consistent Tests for Multivariate Normality* // Communications in Statistics-Theory and Methods. 1990. Vol. 19. P. 3595–3617.

ГЕТЕРОГЕННАЯ АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ РЕАЛИЗОВАННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Н.Н. Труш[1]

[1]Белорусский государственный университет, 220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4

TroushNN@bsu.by

В условиях современных финансовых рынков, которые отличаются интенсивной динамикой и высокой степенью волатильности, возникает потребность в разработке эффективных методов оценки и прогнозирования этого явления. Волатильность, проявляющаяся через острые колебания цен, оказывает большое воздействие на процессы принятия инвестиционных решений, формирование цен, управление рисками и другие ключевые операции в рамках финансовой системы.

Модели GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) учитывают изменчивость волатильности в зависимости от её прошлых значений.

Реализованная волатильность [1] признана важным инструментом в аналитической работе и практическом применении, являясь количественным представлением волатильности, которая не поддается прямому измерению.

В докладе, исходя из концепции реализованной волатильности, исследуется модель HAR-RV (Heterogeneous Autoregressive model of the Realized Volatility) впервые представленная в работе [1] и представляющая собой новое направление в области моделирования волатильности.

Особенностью модели HAR-RV является то, что она рассматривает волатильность как скрытую переменную, оценку, которую можно получить, используя данные высокой частоты, известные как реализованная волатильность.

Пусть $p_{t,j}$ – цена актива в день t на конец внутридневного интервала j длины $\Delta = 1,2,\dots$ измеряемой в секундах, $j = 1,\dots,N$ с N общим количеством таких интервалов за один день. Тогда $r_{t,j} = \log(p_{t,j}) - \log(p_{t,j-1})$ представляет собой внутридневную доходность актива за интервал времени Δ. Реализованная волатильность за день t выражается как

$$RV_t = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} r_{t,j}^2}.$$

Это выражение реализованной волантильности представляет собой метод оценки волатильности на ежедневной основе, который использует данные высокой частоты для создания более точной и управляемой меры волатильности.

Определена точность прогноза моделей HAR-RV используя три основных мировых фондовых индекса. Для определения показательной способности результаты HAR-RV сравниваются с результатами моделей класса GARCH – семейства IGARCH (Integrated), EGARCH (Exponential), GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan, Runkle), TGARCH (Threshold).

Используя тесты SPA (Superior Predictive Ability), MCS (Model Comparison Set), MCS (Model Confidence Set) проводится сравнительный анализ рассматриваемых моделей HAR-RV, GARCH и их разновидностей.

Анализ сопоставления моделей показывает преимущества моделей HAR-RV. Ключевым фактором этого является использование данных о реализованной волатильности в качестве основы для оценки моделей HAR-RV. В отличие от моделей GARCH, которые базируются в основном на ценах закрытия и не всегда адекватно отражают реальные колебания рынка, модели HAR-RV используют реализованную волатильность, что значительно улучшает точность их прогнозов.

Литература

1. Corsi F. *A Simple Approximate Long Memory Model of Realized Volatility* // Journal of Financial Econometrics. 2009. Vol. 7, No 2. P. 174–196.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ В АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ: ЭФФЕКТИВНОСТЬ, РОБАСТНОСТЬ И ПРИМЕНЕНИЯ

А.Ю. Харин[1,a], П.А. Пашук[2,b]

[1]Белорусский государственный университет, 220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
[2]Белорусское республиканское унитарное страховое предприятие “Белгосстрах”
220123 Беларусь, Минск, Хоружей 32а
[a]KharinAY@bsu.by, [b]PashukPavel@mail.ru

Последовательные статистические критерии (тесты, решающие правила) [1] применяется в анализе стохастических данных для решения задач проверки гипотез, когда в рассматриваемом классе прикладных задач число наблюдений, использованных для принятия решения, вносит важный вклад в эффективность разрабатываемой статистической процедуры. В рамках заданных гипотетических моделей стохастических данных построены последовательные статистические решающие правила, минимизирующие математическое ожидание случайного числа наблюдений среди всех статистических тестов, обеспечивающих заданную точность (приемлемые малые значения вероятностей ошибочных решений) [2].

Практическое применение последовательных статистических решающих правил в задачах анализа стохастических данных обычно происходит в условиях, когда наблюдения не полностью соответствуют гипотететической модели [3], она искажена [4], [5], и в результате имеют место значительные отклонения от отмеченного выше оптимального свойства. Поэтому для корректного практического применения последовательных статистических критериев необходим теоретический анализ робастности (устойчивости к уклонениям от предположений гипотетической модели в рамках некоторых задаваемых семейств) и построение новых классов последовательных тестов, характеризующихся робастностью в этих рамках [6], [7].

Для теоретического решения вероятностных задач анализа робастности последовательных тестов и построения робастных по критерию минимакса функционала риска последовательных статистических решающих правил требуются явные точные или приближенные (с возможностью управлять точночностью приближения) выражения для основных характеристик эффективности – вероятностей ошибок и среднего числа наблюдений [8]. В докладе равиваются результаты работы [5], приводятся и обсуждаются построенные асимптотические разложения для указанных характеристик с использованием специальных критериальных статистик, образующих цепи Маркова.

В качестве моделей стохастических данных рассмотрены следующие: последовательность независимых одинаково распределенных случайных наблюдений, последовательность неоднородных независимых случайных наблюдений (включая временные ряды с трендом), цепи Маркова различных порядков. Отдельно рассмотрен случай многомерных двоичных наблюдений. Постановки решённых задач включают случаи простых и сложных (составных) гипотез, а также множественную проверку. С применением построенных асимптотических разложений разработаны робастные последовательные статистические критерии по критерию минимакса функционала риска для различных типов искажений: “выбросы” в наблюдениях, искажения гипотетической вероятностной модели, задаваемые ε-окрестностями в пространствах функций, определяющих распределение вероятностей, искажения модели марковской зависимости, искажения модели тренда.

Полученные теретические результаты иллюстрируются имитационным моделированием и применены для решения задач классификации страховых рисков в Республике Беларусь.

Исследования проводились при частичной финансовой поддержке грантом Ф23УЗБ-080 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Wald A. *Sequential Analysis.* New York: John Wiley and sons, 1947.
2. Mukhopadhyay N., de Silva B. *Sequential Methods and their Applications.* Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2009.

3. Huber P.J. *Robust Statistics. Theory and Methods.* New York: John Wiley and Sons, 2004.

4. Galinskij V., and Kharin A. *On Minimax Robustness of Bayesian Statistical Prediction,* In: Probability Theory and Mathematical Statistics, 1999, VSP / TEV, P. 259–266.

5. Kharin A. *An Approach to Asymptotic Robustness Analysis of Sequential Tests for Composite Parametric Hypotheses* // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 227. P. 196–203.

6. Kharin A. Y. *Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules.* Minsk: BSU, 2013.

7. Kharin A. Y., and Kishylau D. V. *Robust sequential test for hypotheses about discrete distributions in the presence of «outliers»* // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205(1). P. 68–74.

8. Ту Т. Т., Харин А. Ю. *Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 35–45.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ ДВОИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

Ю.С. Харин[1,2,a], **С.А. Шибалко**[1,2,b]

[1]НИИ прикладных проблем математики и информатики
[2]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
[a]kharin@bsu.by, [b]shibalko2003@bk.ru

Введение. Проблема статистического анализа временных рядов часто возникает при исследовании сложных процессов. Теория статистического анализа временных рядов [1] глубоко развита для непрерывных моделей, однако цифровизация общества ведет к увеличению статистических данных, регистрируемых в дискретном пространстве состояний. Для математического описания таких данных в динамике используются дискретные, в том числе, двоичные временные ряды. Обзор современного состояния в области статистического анализа дискретных временных рядов представлен в [2]. В докладе подход, предложенный в [3], развивается для многомерных двоичных временных рядов.

Математическая модель. Приммем обозначения: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{R}^k$ – k-мерное евклидово пространство, $V = \{0,1\}$ – двоичный алфавит, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, штрих у матрицы – символ траснпонирования.

Определим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ N-мерный ($N \in \mathbb{N}$) двоичный временной ряд $X_t = (x_{t1}, ..., x_{tN})' \in V^N$, порожденный семейством условных распределений вероятностей:

$$P\{X_t = J_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = P\{X_t = J_t | X_{t-1} = J_{t-1}, \ldots, X_{t-s} = J_{t-s}\}, t \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

где x_{tl} – двоичная (бинарная) случайная величина, задающая компоненту номер l временного ряда в момент времени $t \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_\tau : \tau \leqslant t-1\}$ – σ-алгебра случайных событий, порожденных указанными в скобках случайными векторами, $J_t = (j_{tl}) \in V^N$ – значение двоичного случайного вектора X_t в момент времени $t \in \mathbb{Z}$, s – глубина предыстории (памяти) процесса.

Рассмотрим ситуацию, когда при фиксированной s-предыстории $X_{t-1} = J_{t-1}, \ldots, X_{t-s} = J_{t-s}$ случайные величины $x_{t1}, ..., x_{tN}$ условно независимы:

$$P\{X_t = J_t | X_{t-1} = J_{t-1}, \ldots, X_{t-s} = J_{t-s}\} =$$

$$= \prod_{l=1}^{n} P\{x_{tl} = j_{tl} | X_{t-1} = J_{t-1}, \ldots, X_{t-s} = J_{t-s}\}, J_t = (j_{tl}) \in V^N, \qquad (2)$$

где условное распределение l-го бита x_{tl} при условии, что фиксирована s-предыстория, представимо в виде:

$$P\{x_{tl} = j_{tl} | X_{t-1} = J_{t-1}, \ldots, X_{t-s} = J_{t-s}\} = \begin{cases} p_l(J_{t-1}, \ldots, J_{t-s}), & j_{tl} = 1, \\ 1 - p_l(J_{t-1}, \ldots, J_{t-s}), & j_{tl} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Для l-й $(l = 1, \ldots, N)$ компоненты в докладе определена малопараметрическая нейросетевая модель [3] (индекс компоненты l далее опущен):

$$p = p(J_{s:1}) = F(\sum_{k=1}^{m} b_k F_k(\sum_{l=1}^{Ns} a_{kl} j_l)), \tag{4}$$

где F – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция распределения $0 < F(x) < 1$, $F_1, ..., F_m$ – некоторые заданные абсолютно непрерывные функции распределения, $B = (b_k) \in \mathbb{R}^m$ и $A_k = (a_{k,1}, ..., a_{k,Ns})' \in \mathbb{R}^{Ns}, k = 1, ..., m$ – неизвестные вектор-столбцы коэффициентов (параметров) модели, $J_{s:1} = (J'_s, ..., J'_1)' \in V^{Ns}$ – составной двоичный вектор-столбец s-предыстории. Таким образом, модель для l-й компоненты описывается двухслойной искусственной нейронной сетью с Ns входами, одним выходом, m нейронами на первом слое и одним нейроном на втором слое; при этом функции $F_1, ..., F_m$ называют функциями активации.

Общее число параметров модели (1)-(4) равно $m(Ns+1)$. Так как любую функцию Ns двоичных переменных можно задать 2^{Ns} значениями, то величина m удовлетворяет неравенству:

$$1 \leqslant m \leqslant m^+ = \frac{2^{Ns}}{(Ns+1)}.$$

Представим модель (4) в матричном виде:

$$p = p(J_{s:1}) = F(B' F_{1:m}(A' J_{s:1})), J_{s:1} \in V^{Ns}, \tag{5}$$

где $F_{1:m} = (F_1, ..., F_m)' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – векторная функция, осуществляющая функциональное преобразование покомпонентно, элементами которой являются функции $\{F_k\}$, $A = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbb{R}^{Ns \times m}$ – составная матрица коэффициентов (параметров) модели.

Два набора параметров $\theta^{(1)} = (B^{(1)}, A^{(1)}) \in \mathbb{R}^{m(Ns+1)}$ и $\theta^{(2)} = (B^{(2)}, A^{(2)}) \in \mathbb{R}^{m(Ns+1)}$ являются эквивалентными для модели (1)-(5), если $F((B^{(1)})' F_{1:m}((A^{(1)})' J_{s:1})) \equiv F((B^{(2)})' F_{1:m}((A^{(2)})' J_{s:1}))$.

Лемма. *Для любого набора параметров модели (1)-(5) существует $m!$ эквивалентных ему наборов параметров, отличающихся перестановкой пар $(b_1, A_1), \ldots, (b_m, A_m)$.*

Статистическое оценивание параметров модели. Для статитического оценивания вектора параметров B модели (1)-(5) в докладе применяется метод, основанный на многомерных частотах (FBE-метод) [4], с помощью которого построена статистическая оценка $\hat{B}$. Для этой оценки доказана состоятельность, т.е сходимость по вероятности к истинному значению B^0:

$$\hat{B} \xrightarrow{P} B^0.$$

Для построения статистической оценки составной матрицы A параметров модели (1)-(5) в докладе построен итерационный алгоритм градиентного спуска с найденной явной формулой градиента.

Пусть (B^0, A^0) – истинные значения параметров, (B^0_π, A^0_π) – перестановочный набор параметров: $B^0_\pi = (b^0_{\pi_1}, ..., b^0_{\pi_m}), A^0_\pi = (A^0_{\pi_1}, ..., A^0_{\pi_m})$, где $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \in \Pi_m$ – произвольная подстановка из множества $m!$ всевозможных подстановок на $\{1, \ldots, m\}$.

Для статистических оценок параметров $(\hat{B}, \hat{A})$, построенных с помощью алгоритма градиентного спуска, в докладе доказана сходимость:

$$(\hat{B}, \hat{A}) \xrightarrow{P} (B^0_\pi, A^0_\pi),$$

для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_m$.

В докладе приведены результаты экспериментов на модельных и реальных экономических данных, показавшие применимость в прикладных задачах.

Литература

1. Anderson T. W. *The Statistical Analysis of Time Series*. New York, 1971. 704p. https://doi.org/10.1002/9781118186428

2. Fokianos K., [et al.] *Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series* // J. Multivariate Analysis. 2022. Vol. 188. Art. 104805. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104805

3. Харин Ю. С. *Нейросетевые модели биномиальных временных рядов в задачах анализа данных* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 6. С. 654—660. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660

4. Kharin Yu., Voloshko V. *Robust estimation for binomial conditionally nonlinear autoregressive time series based on multivariate conditional frequencies* // J. Multivariate Analysis. 2021. Vol. 185. Art. 104777. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104777

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕВЫРОЖДЕНИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ КРИТИЧЕСКОЙ В ДОКРИТИЧЕСКУЮ ОБЛАСТЬ

В.В. Харламов[1]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991 Россия, Москва, Губкина 8
vi.v.kharlamov@gmail.com

Введение.

Рассмотрим два семейства производящих функций

$$\{f_y, y \in Y\}, \quad \{f_{y,i,n}, y \in Y, 0 \leqslant i < n\},$$

где $(Y, \mathcal{G})$ – измеримое пространство. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных элементов $\Xi = \{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ со значениями в $(Y, \mathcal{G})$ будем называть *случайной средой*.

1. Положим $F_{k-1} := f_{\xi_k}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.

2. Разыграем независимые случайные величины $Y_{i,k}$ с производящими функциями $F_{k-1}, i, k \in \mathbb{N}$.

3. Положим $Z_0 := 1$, $Z_k := \sum_{i=1}^{Z_{k-1}} Y_{i,k}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\mathcal{Z} = \{Z_k, k \geqslant 0\}$ будем называть *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС).

Предположение 1. *Выполнены условия*

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Если предположение 1 выполнено, то ВПСС $\mathcal{Z}$ будем называть *критическим*. Козлов М.В. в работе [1] получил асимптотическое поведение $\mathsf{P}(Z_n > 0)$ для критического ВПСС с дробно-линейной производящей функцией. Общий случай был рассмотрен Geiger J., Kersting G. в работе [2] и Afanasyev V., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. в работе [3].

В настоящей работе мы изучаем переходные явления для вероятности невырождения ВПСС. Для исследования переходных явлений мы будем использовать модель, введенную Харламовым В.В. в работе [4].

1. Положим $F_{k-1,n} := f_{\xi_k, k-1, n}$ при всех натуральных $k \leqslant n$.

2. Разыграем независимые случайные величины $Y_{i,k,n}$ с производящими функциями $F_{k-1,n}$ при $i \in \mathbb{N}$ и $k \leqslant n$.

3. При каждом натуральном n определим набор $\{Z_{k,n}, k \leqslant n\}$. Положим $Z_{0,n} := 1$, $Z_{k,n} := \sum_{i=1}^{Z_{k-1,n}} Y_{i,k,n}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Набор случайных величин $\{Z_{k,n}, 0 \leqslant k \leqslant n, Z_{0,n} = 1\}$ назовем *возмущенным ветвящимся процессом в случайной среде* Ξ (ВВПСС).

Введем обозначения

$$a_{i,n} := \log F'_{i-1,n}(1) - \log F'_{i-1}(1), \quad b_{k,n} := \sum_{i=1}^{k} a_{i,n}, \quad i, k \leqslant n.$$

В работе [4] Харламов В.В. получил условия, при которых выполнено соотношение

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \mathsf{P}(Z_n > 0), \quad n \to \infty.$$

Главным из этих условий являлось ограничение на разность ССБ: $b_{k,n} = o(\sqrt{k})$. В этой работе мы рассматриваем случай перехода из критической в докритическую область, при котором это условие нарушено.

Предположение 2. *Найдется функция* $g : [0,1] \to [0,\infty)$, *удовлетворяющая следующим условиям.*

1. При всех $k \leqslant n$ *выполнено соотношение* $b_{k,n} = -g(k/n)\sqrt{n}$.

2. $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ *при* $x \in (0,1]$.

3. $g \in C[0,1]$.

4. Функция g удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 1/2$.

5. $g(t) = O(t)$ *при* $t \to 0$.

6. Функция $\gamma(c) = \mathsf{P}(W_t^+ \geqslant cg(t), t \in [0,1])$ *является непрерывной и положительной при* $a \in (0,\infty)$.

Основной результат этой работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 1. *При выполнении предположений 1, 2 и некоторых технических предположений справедлива эквивалетность*

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \gamma(1/\sigma)\mathsf{P}(Z_n > 0), \quad n \to \infty.$$

В предположении 2 пункт 6 является сложно проверяемым, и скорее всего он имеет место для некоторого класса гладких функций. Нам же удалось его проверить в частном случае.

Утверждение 1. *Пусть для некоторого* $\beta > 0$ *выполнено соотношение*

$$a_{j,n} = -\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \quad j \leqslant n.$$

Тогда предположение 2 выполнено для функции $g(t) = \beta t$, $t \in [0,1]$, *и имеет место тождество*

$$\gamma(c) = \exp\left\{-\frac{(c\beta)^2}{2}\right\} - c\beta\sqrt{2\pi}\Phi\left(-c\beta\right), \quad c \in (0,\infty).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00037, https://rscf.ru/project/24-11-00037/ в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Литература

1. Козлов М. В. *Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде* // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 4. С. 813–825.

2. Geiger J., Kersting G. *The survival probability of a critical branching process in a random environment* // Theory of Probability & Its Applications. 2001. Vol. 45, No 3. P. 517–525.

3. Afanasyev V., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. *Criticality for branching processes in random environment* // Ann. Probab. 2005. Vol. 33, No 1. P. 645–673.

4. Харламов В. В. *Асимптотика вероятности невырождения почти критических ветвящихся процессов в случайной среде* // Математический сборник. 2024. Т. 215, № 1. С. 131–152.

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СТАТИСТИКИ ХИ-КВАДРАТ ПРЕДЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Е.В. Хиль[1]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
elena.khil@math.msu.ru

Критерий хи-квадрат является одним из наиболее востребованных критериев, различные его адаптации широко применяются в огромном количестве приложений (см., например, обзор [1]).

Статистика критерия хи-квадрат имеет вид

$$W = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

где k – количество возможных исходов (или число отрезков разбиения в случае непрерывного распределения), $p_1, \ldots, p_k$ – вероятности этих исходов (при верной нулевой гипотезе), $\nu_1, \ldots, \nu_k$ – количества соответствующих исходов, n – количество наблюдений (размер выборки).

Известно, что распределение статистики критерия хи-квадрат сходится к хи-квадрат распределению с $k-1$ степенями свободы, когда размер выборки n стремится к бесконечности.

Следующий важный вопрос: какова погрешность приближения истинного распределения предельным? То есть насколько велика разность $F_W(x) - F_{\chi^2}(x)$, где $F_W(x)$ – функция распределения статитстики W, $F_{\chi^2}(x)$ – функция распределения хи-квадрат с $k-1$ степенями свободы?

В работе [2] для такой погрешности получена равномерная (по аргументу функции распределения) оценка, имеющая порядок $O(n^{-1})$, $n \to \infty$. Эта оценка справедлива при $k \geq 5$ и, по-видимому, является неулучшаемой оценкой в зоне ”типичных значений”. Однако в зоне умеренных уклонений можно получить более точные оценки.

Отметим, что вопрос о точности используемого приближения распределения статистики критерия достаточно важен (интересен?) как с теоретической, так и с практической точек зрения. При этом важную играют не только равномерные оценки, но и оценки значения функции распределения в произвольной, но фиксированной точке, а также в зоне умеренных уклонений. Здесь можно отметить работы А. М. Зубкова и М. В. Филиной [3] и [4], посвященные вычислению точных распределений статистики хи-квадрат и исследованию точной асимптотики. К сожалению, сложность таких вычислений делает неудобным использование точных распределений в прикладных задачах.

В настоящей работе получены оценки, основанные на теории сильной аппроксимации. Для зоны умеренных уклонений (т.е. x порядка n^a, $a \in (0, 1/3)$) получены точные оценки для разности $|F_W(x) - F_{\chi^2}(x)|$, имеющие порядок $O(n^{(ka-1)/2}\exp(-Cn^a/2))$ (точная оценка здесь не приводится ввиду ее громоздкости). Отметим, что этот порядок погрешности меньше порядка ”хвоста” функции распределения $1 - F_{\chi^2}(x)$. А значит, при использовании хи-квадрат аппроксимации для вычисления фактического уровня значимости (p-value) погрешность имеет меньший порядок малости, чем само приближение.

Литература

1. Greenwood P. E., Nikulin M. S. *A guide to chi-squared testing*. John Wiley & Sons, 1996. Vol. 280.

2. Götze F., Zaitsev A. Yu. *Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms* // The Annals of Probability. 2014. Vol. 42(1). P. 354—397.

3. Filina M. V., Zubkov A. M. *Tail properties of Pearson statistics distributions* // Austrian J. Statistics. 2011. Vol. 40, No 1-2, P. 47—54.

4. Зубков А. М., Филина М. В. *Вычисление распределений статистик с помощью цепей Маркова* // Дискрет. матем. 2020. Т. 32, №4, С. 38-–51.

ОБ ОЦЕНКАХ СЕМИВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Т.В. Цеховая[1]

[1]Белорусский государственный университет
220030 Беларусь, Минск, пр. Независимости 4
tsekhavaya@bsu.by

Введение. В настоящее время во всех сферах деятельности человека крайне востребованы всевозможные подходы к анализу и экспертному использованию имеющихся данных. При этом не всегда возможно непосредственное эффективное применение хорошо проработанного и известного аппарата теории вероятностей и математической статистики без учета особенностей конкретной предметной области. Поэтому относительно недавно стал привлекать особое внимание статистический метод анализа временных рядов – вариограммный анализ.

Вариограмма является одной из основных характеристик второго порядка во временной области случайных процессов и полей, а также определяет класс внутренне стационарных случайных процессов и полей. На практике при решении прикладных задач часто оказывается, что процессы не обладают конечной дисперсией. В таких ситуациях иногда возможно сделать предположение об их внутренней стационарности, применить методы вариограммного анализа, что позволяет существенно расширить круг решаемых проблем. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств вариограммы, а также построения и изучения оценок этой функции [1].

Результаты. Некоторые свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса с конечным моментом второго порядка и непрерывным временем исследованы в [2]. Найдены также необходимые и достаточные условия для того, чтобы непрерывная функция являлась семивариограммой.

Точечному и интервальному оцениванию семивариограммы гауссовского случайного процесса посвящены, например, работы [2, 3]. В [3] найдены выражения для математического ожидания, дисперсии, ковариации и семиинвариантов высших порядков оценки семивариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с дискретным временем. При дополнительных ограничениях на характеристики процесса во временной области исследовано асимптотическое поведение семиинвариантов порядка p, $p \geqslant 2$, найдено предельное распределение изучаемой статистики. Полученный результат позволил для достаточно большого числа наблюдений за рассматриваемым случайным процессом получить центральный доверительный интервал для неизвестной семивариограммы, применив нормальную аппроксимацию распределения построенной оценки семивариограммы. Представленные в работе результаты позволяют получить не только точечные оценки семивариограммы, но и охарактеризовать их точность посредством доверительных интервалов с заданной доверительной вероятностью.

Построение доверительных интервалов является одной из основных задач процесса оценивания. В статье [2] также определены границы центральных доверительных интервалов для семивариограммы действительного стационарного в широком смысле гауссовского случайного процесса. Представленный подход интервального оценивания семивариограммы основан на свойствах χ^2 - распределения. Заметим, что предложенные интервальные оценки более информативны, чем ранее построенные точечные.

Настоящая работа является продолжением исследований [3]. Найдены выражения для ковариации, дисперсии, семиинвариантов порядка p, $p > 2$, построенной оценки семивариограммы гауссовского случайных процессов с дискретным временем. При условии, что спектральная плотность непрерывна, исследовано их асимптотическое поведение. Отметим, что накладываемые условия являются менее строгими, чем ограничения на характеристики процесса во временной области [3], и с практической точки зрения более приемлемы. Показано, что построенная оценка является несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле. Используя семиинвариантный подход, найдено предельное распределение оценки семивариограммы.

Литература

1. Cressie N. *Statistics for Spatial Data.* New York: Wiley Classics Library, 2015

2. Цеховая Т. В. *Свойства внутренне стационарных случайных процессов* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 28–33.

3. Цеховая Т. В. *Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса* // Вестн.БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89–95.

ОЦЕНКА СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ЭФФЕКТОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ В КВАНТИЛЬНЫХ РЕГРЕССИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДВОЙНОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

А.М. Ченцов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт
141701 Россия, Долгопрудный, Институтский переулок 7
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119234 Россия, Москва, Ленинские горы 1
chentsov.am@mipt.ru

Введение. Метод двойного машинного обучения был предложен Черножуковым и др. (2018) для оценки структурных параметров в регрессионных моделях, содержащих мешающий параметр высокой размерности (например, контрольные переменные с неизвестной функциональной формой зависимости). В основе метода лежит идея Неймана о построении ортогонализованных статистик, не зависящих, в первом порядке, от параметров, не представляющих самостоятельного инетереса. В представленной работе предлагается расширение метода двойного машинного обучения на модели квантильных регрессий. Показаны условия применимости полученного метода и доказательства асимптотической нормальности оценок, основанное на представлении Бахадура для квантильной функции.

Модель. Рассматривается модель структурной частично-линейной регрессии с вектором контрольных переменных $X = (X_1,\dots,X_p)$, в основном уравнении которой идентификационное условие накладывается на квантиль уровня $\tau \in [0,1]$ условного распределения ошибки:

$$Q_{Y|X,D}(\tau) := \alpha_0 D + g_0(X), \quad F_{\varepsilon|X,D}(0) = \tau, \quad f_{\varepsilon|X,D}(0) = 1, \tag{1}$$

$$D := m_0(X) + v, \quad \mathbb{E}(v \mid X) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q_{Y|X,D}(\tau)$ – квантильная функция условного распределения зависимой переменной Y; D – переменная воздействия,g_0 и m_0 – неизвестные функции, ε – ошибка в основной модели, имеющая абсолютно-непрерывное распределение с условной плотностью $f_{\varepsilon|X,D}$, стандартизованной в нуле, v – ошибка во вспомогательной модели. Исследователю доступна *н.о.р.* выборка $\{(Y_i,D_i,X_i)\}_{i=1}^n$ переменных, причём размер выборки может быть меньше числа контрольных переменных p. Интересующим исследователя параметром является коэффициент α_0, который обычно в такой модели интерпретируется как эффект воздействия на τ-квантиль распределения Y.

Стандартный подход к оценке частично-линейных моделей вида (1) использует подстановку: для этого на части выборки строится непараметрическая оценка $\hat{g}$ неизвестной функции g_0, затем вычисляются остатки во второй части выборки, которые далее можно использовать для стандартного нахождения оценки α_0. Проблема такого подхода состоит в том, что скорость обучения g_0 – меньше стандартной $\frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому асимптотика для оценки α_0, основанная на центральной предельной теореме не может быть применена.

Ортогонализованная оценка α_0. Для построения асимптотически нормальной оценки α_0 можно использовать подход, предложенный в работе Черножукова и др. [1], в котором для мешающего параметра $\eta_0 := (m_0, g_0)$ используется смещённая состоятельная оценка, основанная на методах машинного обучения, а её неточность в конечной выборке компенсируется низкой чувствительностью используемой статистики к отклонениям в $\hat{\eta}$ в окрестности истинного значения η_0.

Модель (1)-(2) задаёт ортогональное по Нейману [2] моментное условие

$$n(\alpha; X, D, \eta_0) := \mathbb{E}\big[\big(D - m_0(X)\big)\rho'_\tau\big(Y - \alpha D - g_0(X)\big)\big] = 0, \quad \rho'_\tau(z) := \tau - I\{z \leqslant 0\}. \tag{3}$$

Особенностью моментного условия (3) является то, что в некоторой окрестности истинного значения η_0 оно имеет нулевую производную по Гато относительно η:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta \in B_\varepsilon(\eta_0)\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{n\big(\alpha; X, D, \eta_0 + t(\eta - \eta_0)\big) - n(\alpha; X, D, \eta_0)}{t} = 0.$$

Процедура оценки включает разделение выборки на две части, первая из которых используются для оценки $g_0(X)$ и $m_0(X)$ с помощью произвольных методов машинного обучения, обеспечивающих скорость обучения не менее $n^{-\frac{1}{4}}$, аналогично [1]. Вторая подвыборка используется для оценки параметра α_0, причем для эффективного использования данных можно использовать процедуру кросс-фиттинга, когда аналогичная процедура повторяется с переменой ролей у двух выборок.

Параметр α_0 может быть идентифицирован, как точка экстремума выпуклой функции:

$$\alpha_0 = \max_{\alpha} \mathbb{E}[\rho_\tau(\tilde{Y} - \alpha\tilde{D})], \tag{4}$$

где $\tilde{Y} := Y - g_0(X)$, $\tilde{D} := D - m_0(X)$.

В классическом случае, требуется, чтобы выборочные значения $\tilde{D}_i$ не были сконцентрированы в нуле, и имели ограниченную скорость роста [3]:

Предположение 1. Существуют $a, A \in \mathbb{R}$:

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\|u\|=1} \mathbb{E}_n I(|\tilde{D}u| < a) = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} \sup_{\|u\|=1} \mathbb{E}_n(\tilde{D}u)^2 \leqslant A,$$

где $\mathbb{E}_n$ – обозначение для выборочного среднего.

Предположение 2. Существуют $b_0, b_1(\tau) > 0$:

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n\tilde{D}^2 = b_0$,

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n\left[f_{\varepsilon|\tilde{D}}\left(F^{-1}_{\varepsilon|\tilde{D}}(\tau)\right)\tilde{D}^2\right] = b_1(\tau)$,

$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |\tilde{D}_i|/\sqrt{n} \to 0$.

Теорема 1. Пусть $\{P_n\}$ – последовательность семейств распределений, порождающих данные модели (1)-(2) и предположения 1 и 2 выполнены. Тогда оценка $\hat{\alpha}$, заданная выборочным аналогом уравнения (4), в котором вместо истинных значений g_0, m_0 используются их $n^{-\varphi_g}, n^{-\varphi_m}$ состоятельные оценки соответственно, и выполнено $\varphi_g + \varphi_m \geqslant \frac{1}{2}$, является асимптотически нормальной:

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \tau(1-\tau).$$

В работе предлагается доказательство теоремы 1, основанное на линейном представлении Бахадура [4] для квантильной регрессии, причём асимптотическая нормальность оценок $\hat{\alpha}$ сохраняется в некотором диапазоне значений мешающего параметра η_0. Кроме того представлены симуляционные результаты, основанные на методе Монте-Карло, показывающие преимущества предложенной оценки по сравнению со стандартными оценками для полупараметрической квантильной регрессии.

Литература

1. Chernozhukov V., Chetverikov D., Demirer M., Duflo E., Hansen C., Newey W., Robins J. *Double/debiased machine learning for treatment and structural parameters* // The Econometrics Journal. 2018. Vol. 21, No 1. P. 1–68.
2. Neyman J. *$C(\alpha)$ tests and their use* // Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A. 1979. Vol. 41, No 1/2. P. 1–21.
3. Koenker R. *Quantile regression. Cambridge University Press, 2005.*
4. *Xuming H., Qi-Man Sh. A general Bahadur representation of M-estimators and its application to linear regression with nonstochastic designs // The Annals of Statistics. 1996. Vol. 24, No 6. P. 2608–2630.*

GENERAL CRITERIA FOR BELONGING TO THE CLASS OF RATIONAL-INFINITELY DIVISIBLE DISTRIBUTIONS

A.A. Khartov[1,2]

[1]Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute) of Russian Academy of Sciences
127051 Russia, Moscow, 19 Bolshoy Karetny per., build. 1
[2]Laboratory for Approximation Problems of Probability, Smolensk State University
214000 Russia, Smolensk, 4 Przhevalsky st.
khartov.a@iitp.ru, alexeykhartov@gmail.com

Introduction. Let F be a distribution function on the real line $\mathbb{R}$ with the characteristic function f. Recall that F is called *infinitely divisible* if for every positive integer n there exists a distribution function $F_{1/n}$ such that $F = (F_{1/n})^{*n}$, where "$*$" denotes a convolution operation, i.e. F is n-fold convolution power of $F_{1/n}$. It is well known that F is infinitely divisible if and only if the characteristic function f is represented by *the Lévy–Khinchine formula*:

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - it\sin(x)\right) \tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

with some *shift parameter* $\gamma \in \mathbb{R}$, and with a bounded non-decreasing *spectral function* G on $\mathbb{R}$ that is assumed to be right-continuous at every point of the real line with the condition $G(-\infty) = 0$. It is well known that *the spectral pair* (γ, G) is uniquely determined by f and hence by F. The Lévy–Khinchine formula has a fundamental importance for probability theory and its applications (see [1]).

There is a natural extension for the class of infinitely divisible distribution functions. We call a distribution function F *rational-infinitely divisible* if there exist some infinitely divisible distribution functions F_1 and F_2 such that $F_1 = F * F_2$. This equality may be written in terms of characteristic functions: $f(t) = f_1(t)/f_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, where f_1 and f_2 denote characteristic functions of F_1 and F_2, respectively. In this case, it is not difficult to show that $f(t) \neq 0$ for any $t \in \mathbb{R}$, and f admits representation (1) with $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ and $G = G_1 - G_2$, where (γ_1, G_1) and (γ_2, G_2) denote the spectral pairs of F_1 and F_2, respectively. Note that the function G is of bounded variation on $\mathbb{R}$ (it is non-monototic in general), right-continuous at every point and $G(-\infty) = 0$. The class of all functions G satisfying these properties will be denoted by $\mathbf{V}$. The pair (γ, G) is uniquely determined by f and by F as for infinitely divisible distribution functions. If we suppose that f is represented by formula (1) with some $\gamma \in \mathbb{R}$ and $G \in \mathbf{V}$, then, due to the Hahn–Jordan decomposition for G, F will be rational-infinitely divisible. The first detailed analysis of the class of such distribution functions on $\mathbb{R}$ was performed in [2]. There are interesting applications of such distributions in theory of stochastic processes, number theory, physics, and insurance mathematics.

The class of all rational-infinitely divisible distribution functions we denote by $\mathbf{Q}$. By definition, it is clear that this class contains the class $\mathbf{I}$ of all infinitely divisible distribution functions and, moreover, it is essentially wider than the latter. So $\mathbf{Q}$ includes all discrete distribution functions F, whose characteristic functions f are separeted from zero, i.e. $|f(t)| \geqslant \mu$ for some constant $\mu > 0$ and for any $t \in \mathbb{R}$ (see [3] and [4]). The class $\mathbf{Q}$ is also contains mixtures of discrete and absolutely continuous distribution functions, where the discrete part is non-zero and its characteristic function is separeted from zero (see [5]). There are also some interesting particular sufficient conditions to belong to $\mathbf{Q}$ (see [2]). However, we think that the problem of general criteria of rational-infinite divisibility for distribution functions is not completely solved. Indeed, for instance, there are no criteria that can be conveniently applied to absolutely continuous laws. So we propose general methods to determine whether a given characteristic function corresponds to some (rational-)infinitely divisible distribution function or not. The obtained criteria seem to be rather convenient and easy for applications for some cases.

Results. We always assume that $f(t) \neq 0$ for any $t \in \mathbb{R}$. So *the distinguished logarithm* $\mathrm{Ln} f$ is defined, i.e. $\mathrm{Ln} f(t) := \ln|f(t)| + i\mathrm{Arg} f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, where the argument $\mathrm{Arg} f$ is uniquely defined on $\mathbb{R}$ by continuity with the condition $\mathrm{Arg} f(0) = 0$. We next introduce the following function

$$\psi(t,h) := \mathrm{Ln} f(t) - \frac{1}{2}\big(\mathrm{Ln} f(t-h) + \mathrm{Ln} f(t+h)\big), \quad t, h \in \mathbb{R}.$$

This function is often rather simpler and easier handling than $\mathrm{Ln} f$. It is also used for establishing some properties of f (see [4] p. 3 and [6] p. 119). The following theorem shows that ψ contains in fact full information about f.

Theorem 1. *Suppose that*

$$\psi(t,h) = I(t,h) + \delta(t,h) \quad \text{for any} \quad t \geqslant 0,\ h > 0, \tag{2}$$

where the function I admits the following representation

$$I(t,h) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}(1-\cos(hx))\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) \quad \text{for any} \quad t \geqslant 0,\ h > 0,$$

with some $G \in \mathbf{V}$, and the function δ satisfies the following condition:

$$\sum_{k=0}^{n_{t,l}-1}\big(n_{t,l}-k\big)|\delta(kh_l,h_l)| \to 0, \quad l \to \infty, \quad \text{for any} \quad t > 0,$$

where $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ is a fixed sequence of positive reals such that $h_l \to 0$, $l \to \infty$, and $n_{t,l} := \lfloor t/h_l \rfloor$, $t > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Then $F \in \mathbf{Q}$ and f admits representation (1) *with the function G and $\gamma = \mathrm{Arg} f(1)$.*

It is not difficult to show that the representation by formula (2) is not only sufficient for formula (1), but it is also necessary (with $\delta(t,h) \equiv 0$).

Let us return to the definition of the function ψ. Observe that its values are, in fact, the finite differences of the second order for $\mathrm{Ln} f$. For $h \to 0$ we may turn to $(\mathrm{Ln} f)''(t)$, when the latter exists. This idea leads us to the following result.

Theorem 2. a) *Suppose that $F \in \mathbf{Q}$ and f admits representation* (1) *with some $\gamma \in \mathbb{R}$ and $G \in \mathbf{V}$ satisfying*

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)\,d|G|(x) < \infty. \tag{3}$$

Then for any $t \in \mathbb{R}$ there exists $(\mathrm{Ln} f)''(t)$ that admits the following representation

$$(\mathrm{Ln} f)''(t) = -\int_{\mathrm{R}} e^{itx}(1+x^2)\,dG(x), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

b) *Suppose that the formula* (4) *holds with some function $G \in \mathbf{V}$ satisfying* (3). *Then $F \in \mathbf{Q}$ and f admits representation* (1) *with the function G and $\gamma = \mathrm{Arg} f(1)$.*

Theorems 1 and 2 can be applied as methods of determining that a given characteristic function f corresponds to some infinitely divisible distribution function. The following assertion, which we formulate as theorem, is a simple corollary from the previous theorems and the mentioned facts about infinitely divisible distribution functions (see Introduction).

Theorem 3. *Suppose that the assumptions of Theorem 1 or Theorem 2* b) *hold with some non-decreasing function $G \in \mathbf{V}$. Then f is a characteristic function of some infinitely divisible distribution function F, i.e. $F \in \mathbf{I}$.*

The proofs of Theorems 1–3, examples of their applications for absolutely continuous distribution functions and the more detailed discussions are presented in [7].

References

1. Rocha-Arteaga A., Sato K. *Topics in Infinitely Divisible Distributions and Lévy Processes*. Switzerland AG, Cham: Springer Nature, 2019.

2. Lindner A., Pan L., Sato K. *On quasi-infinitely divisible distributions* // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. Vol. 370. P. 8483–8520.

3. Alexeev I., Khartov A. *Spectral representations of characteristic functions of discrete probability laws* // Bernoulli. 2023. Vol. 29, No 2. P. 1392–1409.

4. Khartov A. A. *A criterion of quasi-infinite divisibility for discrete laws* // Stat. Probab. Lett. 2022. Vol. 185. Art. 109436.

5. Berger D., Kutlu M. *Quasi-infinite divisibility of a class of distributions with discrete part* // Proc. Amer. Math. Soc. 2023. Vol. 151, No 5. P. 2211–2224.

6. Khartov A. A. *On weak convergence of quasi-infinitely divisible laws* // Pacific Journal of Mathematics. 2023. Vol. 322, No 2. P. 341–367.

7. Khartov A. A. *Some criteria of rational-infinite divisibility for probability laws* // arXiv:2305.14524v2.

Научное издание

XIV БЕЛОРУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, ПОСВЯЩЕННАЯ 65-ЛЕТИЮ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

Материалы Международной научной конференции

В трех частях

Часть 2

Составитель:

Бусел Татьяна Сергеевна

Материалы публикуются в авторской редакции

Компьютерная верстка *И. В. Близнец*

Подписано в печать 23.10.2024. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 19,07. Уч.-изд. л. 16,9. Тираж 90 экз. Заказ 219.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013, № 2/196 от 05.04.2017.
Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск.