

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ  
Институт математики

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**XIV БЕЛОРУССКАЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ,  
посвященная 65-летию  
Института математики НАН Беларуси**

Материалы Международной  
научной конференции

**В трех частях**

**Часть 1**

Вещественный и комплексный анализ

---

Функциональный анализ и операторные уравнения

---

Теоретическая и прикладная механика

---

Оптимизация и теория управления

---

Модернизация и цифровизация обучения математике:  
фундаментальные и прикладные аспекты

***Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 года***

Минск  
«Беларуская навука»  
2024

УДК 51  
ББК 22.1  
Ч-54

Составитель

кандидат физико-математических наук Т. С. Бусел

**Ч-54 XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси** : материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г. В трех частях. Часть 1. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 158 с.

ISBN 978-985-08-3222-1.

Первая часть сборника материалов Международной научной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» содержит доклады по следующим направлениям: вещественный и комплексный анализ, функциональный анализ и операторные уравнения, теоретическая и прикладная механика, оптимизация и теория управления, модернизация и цифровизация обучения математике: фундаментальные и прикладные аспекты.

Для научных работников, преподавателей и студентов, а также всех, кто интересуется математикой.

УДК 51  
ББК 22.1

ISBN 978-985-08-3222-1 (ч. 1)  
ISBN 978-985-08-3221-4

© ГНУ «Институт математики НАН Беларуси», 2024  
© Оформление. РУП «Издательский дом «Белорусская наука», 2024

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<b>Асташкин С.В.</b> О свойстве Кальдерона-Митягина квазибанаховых пространств . . . . .	8
<b>Асташова И.В.</b> Применение динамических систем к исследованию вопроса о типичности и нетипичности асимптотического поведения сингулярных решений уравнений типа Эмдена – Фаулера высокого порядка . . . . .	8
<b>Бауэр С.М., Воронкова В.Е.</b> О потере устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления . . . . .	9
<b>Бахтин В.И., Царёв Н.А.</b> Выпуклость и вогнутость $f$ -потенциалов (колмогоровских средних) 10	
<b>Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С.</b> Вычислительный эксперимент в задаче об электродинамическом разгоне лайнера . . . . .	12
<b>Гладков А.Л.</b> Нелокальные начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений 13	
<b>Журавков М.А., Босяков С.М., Щербаков С.С.</b> Интеллектуальные системы моделирования в механике. состояние, проблемы, перспективы . . . . .	14
<b>Корзюк В.И., Столярчук И.И.</b> Исследования классических решений гиперболических уравнений второго порядка методом характеристик . . . . .	15
<b>Кротов В.Г.</b> Интерполяция нелинейных операторов в пространствах типа Харди и ее приложения 17	
<b>Лотов В.И.</b> О времени первого достижения уровня для процесса возрастания–убывания . . . . .	17
<b>Матвеев Г.В., Осиновская А.А., Янчевский В.И.</b> Фундаментальная область специальной линейной группы $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ . . . . .	17
<b>Матус П.П.</b> Теория разностных схем для квазилинейных уравнений . . . . .	19
<b>Попов В.Л.</b> Зависимость между алгеброй и геометрией алгебраических групп . . . . .	20
<b>Прохоров Ю.Г.</b> Проблемы рациональности в многомерной алгебраической геометрии . . . . .	20
<b>Сергеев И.Н.</b> Новые понятия мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы . . . . .	20
<b>Тузиков А.В., Андрианов А.М.</b> Компьютерное моделирование и искусственный интеллект для идентификации потенциальных лекарств . . . . .	23
<b>Харин Ю.С., Волошко В.А.</b> Развитие теории вероятностно-статистического анализа дискретных временных рядов на основе малопараметрических моделей . . . . .	23
<b>Четверушкин Б.Н.</b> Кинетическая модель для описания турбулентного течения в жидкости и слабосжимаемом газе . . . . .	25
<b>Kruger A.Y.</b> Radius of good behaviour theorems . . . . .	25
<b>Shaposhnikova T.A.</b> Strange non-local operator homogenizing the Poisson equation with dynamical unilateral boundary conditions in critical case . . . . .	26

## СЕКЦИЯ «ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

<b>Кротов В.Г., Стриленко А.Д.</b> Оценки дробных интегралов в пространствах типа Харди в предельном случае . . . . .	28
<b>Логиновская М.М.</b> Атомическое разложение функций из классов $\mathcal{H}^1(\mathbf{X})$ . . . . .	29
<b>Мардвилко Т.С.</b> Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши . . . . .	30
<b>Поцейко П.Г., Ровба Е.А.</b> Об аппроксимациях интегралов Римана-Лиувилля некоторыми методами, основанными на рациональных интегральных операторах Фурье-Чебышёва . . . . .	32

<b>Пчелинцев В.А.</b> Приложения конформных отображений к спектральным оценкам для оператора Лапласа .....	33
<b>Рябченко Н.В., Старовойтов А.П., Оснач Т.М.</b> О существовании тригонометрических аппроксимаций Паде–Якоби .....	33
<b>Старовойтов А.П., Кругликов И.В.</b> Аппроксимации Эрмита-Лорана аналитических функций .....	35
<b>Чернявский М.М.</b> Производные результатов и общие кратные корни пар полиномов .....	37
<b>Шилин А.П.</b> О решении линейного интегро-дифференциального уравнения, в коэффициенты которого входят многочлены .....	39
<b>Husenov В.Е., Hamidova М.К.</b> Estimates of $A(z)$ -harmonic and $A(z)$ -analytical functions .....	40
<b>Rodikova E.G.</b> On multiple interpolation in the area Privalov classes in a disk .....	42

## СЕКЦИЯ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

<b>Антоневич А.Б., Борбут В.А.</b> О структуре спектра оператора взвешенной композиции в шкале пространств Соболева .....	44
<b>Антоневич А.Б., Ежикова М.Д.</b> Топологические структуры на градуированных множествах ..	45
<b>Басик А.И., Яцук Т.А.</b> Функция Грина краевой задачи для дифференциального оператора с сингулярным потенциалом на отрезке .....	48
<b>Бахтин В.И.</b> Эргодический носитель динамической системы и натуральное представление распределений шоке для инвариантных мер .....	49
<b>Бахтин В.И., Лебедев А.В.</b> <i>SUP-SUMS</i> принципы для $F$ -дивергенции и их приложения .....	51
<b>Вувуникян Ю.М., Трифонова И.В.</b> Полилинейные и степенные операторы Фредгольма .....	52
<b>Гринько А.П.</b> Локализованные и локальные дробные производные типа Герасимова-Капуто ..	54
<b>Жук А.И., Защук Е.Н.</b> Ассоциированные решения неавтономных систем дифференциальных уравнений в пространствах Лебега .....	55
<b>Ибрагимов М.М., Арзиев А.Д.</b> об одном свойстве унитарного геометрического трипотента в сопряженном пространстве нейтрального $SFS$ -пространства .....	56
<b>Каландаров Т.С., Нуржанов Б.О.</b> 2-локальные автоморфизмы алгебр Аренса .....	58
<b>Каримов О.Х., Набиев Дж.И.</b> О коэрцитивной разрешимости бигармонического уравнения в весовом пространстве .....	60
<b>Кравцов Д.И.</b> Фредгольмовы краевые задачи для функциональных уравнений в пространстве Соболева .....	61
<b>Кузьменкова Е.Ю., Миротин А.Р.</b> О скошенных $\mu$ -ганкелевых операторах .....	63
<b>Кузьмина Е.В., Антоневич А.Б.</b> Существование восьми обобщенных решений задачи Коши для третьего уравнения иерархии Риккати .....	64
<b>Лебедев А.В., Трубников Ю.В., Чернявский М.М.</b> Об определителях Адамара и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов .....	66
<b>Люксембург И.Л.</b> Пространства максимальных идеалов алгебр разрывных функций .....	68
<b>Махамут А.А., Шишкина Э.Л.</b> Задача для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной степенью оператора Бесселя .....	70
<b>Садок Б.</b> Узкие бассейны для отображения сдвига на пространстве бесконечных сигналов ...	71
<b>Скоромник О.В., Папкович М.В.</b> Формулы обращения многомерного $H$ - преобразования в весовых пространствах измеримых по Лебегу функций .....	73
<b>Таныгина А.Н.</b> О модификации условия регулярной гладкости для решения операторных уравнений обобщенным методом Ньютона-Канторовича .....	74
<b>Ташпулатов С.М.</b> Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии четырех электронной системы в примесной модели Хаббарда. Второе синглетное состояние ..	76
<b>Шведков П.Н., Лыков К.В.</b> Об одной матричной норме и её применении теории графов .....	78
<b>Шубарин М.А.</b> Обобщённые шкалы банаховых пространств, возникающие в структурной теории пространств Фреше .....	79

<b>Kozinets R.N., Basik D.A., Basik A.I.</b> On the Riemann–Hilbert boundary value problem for one elliptic system of the biharmonic type . . . . .	81
<b>Kushel O.Y.</b> <i>D</i> -stability of matrices: a simple determinantal test . . . . .	82
<b>Mirotin A.R.</b> On spectra of discrete hausdorff operators . . . . .	82
<b>Serow D.W.</b> On the geometric cryptography of nonwandering continua possessing Wada property . .	84

### СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

<b>Авдейчик Е.В.</b> Устойчивость осесимметричных ограниченных вращающихся слоёв к трёхмерным возмущениям . . . . .	87
<b>Айзикович С.М., Панфилов И.А., Лапина П.А.</b> Использование упругопластической модели основания при определении свойств материала методом наноиндентирования . . . . .	88
<b>Белоглазкин А.Н., Шишкин И.В.</b> Волна-ступенька в стекающей плёнке вязкой жидкости . . . . .	88
<b>Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.</b> Об уравнениях типа Власова в гравитации и электродинамике . . . . .	90
<b>Докукова Н.А., Ситковская П.П.</b> Об асимптотической устойчивости динамических гасителей с гидропорой . . . . .	91
<b>Журавков М.А., Николайчик М.А., Пронько А.Д.</b> Оценка влияния формы поверхности валков на напряжённо-деформированное состояние элементов системы вальцевания . . . . .	93
<b>Конон П.Н., Кулаго А.Е., Доронина А.В.</b> Механизм волокнообразования и расчет параметров волокон при обтекании струек расплава воздушным потоком . . . . .	95
<b>Королевич В.В.</b> Напряженно-деформированное состояние вращающейся многослойной анизотропной конической оболочки с учетом поперечных сдвигов и обжата слоев . . . . .	96
<b>Королевич В.В., Медведев Д.Г.</b> Термоупругие напряжения во вращающихся в тепловом поле профилированных полярно-ортотропных кольцевых дисков с учетом теплообмена с окружающей средой . . . . .	97
<b>Костюк Н.Н., Дик Т.А., Метельский Ю.М., Шинкарёв К.А., Цыганов А.Р.</b> Симулятор синтеза и расчета летучести $\beta$ -дикетонатов металлов на основе комбинаторно-графового моделирования . . . . .	99
<b>Лопатин С.Н., Передрий П.С.</b> Решение задачи о действии динамической нагрузки на слоистую геосреду при помощи метода асимптотического интегрирования . . . . .	100
<b>Мармыш Д.Е.</b> Оценка параметров модели Муни-Ривлина для гиперупругого материала методами искусственных нейронных сетей . . . . .	101
<b>Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Киргинцева С.В.</b> Математическое моделирование расчета напряженно–деформированного состояния зубьев с покрытиями в зубчатых колесах из композитов . . . . .	102
<b>Назаренко Д.В., Босяков С.М., Дутина В.В., Рубникович С.П.</b> Математическое моделирование нагрузок, развиваемых полным протезом нижней челюсти при жевании . . . . .	104
<b>Kazlouski J.J., Zhuravkov M.A.</b> Modeling the interaction of a carnallite rock mass with support structures based on back analysis . . . . .	106
<b>Zhalukevich D.S.</b> Linearization of Newton’s polynomial equations with one degree of freedom . . . .	107

### СЕКЦИЯ «ОПТИМИЗАЦИЯ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ»

<b>Альсевич В.В., Метельская Э.В., Плюцов А.А.</b> Минимаксные задачи управления . . . . .	108
<b>Астровский А.И.</b> Предельный переход в теории канонических форм . . . . .	109
<b>Гончарова М.Н.</b> О множества управляемости одного объекта . . . . .	111
<b>Гороховик В.В.</b> Внутреннее геометрическое строение и аналитическое представление выпуклых конусов . . . . .	113

<b>Дмитрук Н.М.</b> Оценка улучшения оптимального значения в задачах гарантированной оптимизации линейной динамической системы при управлении в реальном времени . . . . .	114
<b>Калинин А.И., Лавринович Л.И.</b> Асимптотика решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтемповой сингулярно возмущенной системе . . . . .	116
<b>Карпук В.В., Метельский А.В.</b> Полное успокоение дифференциальной системы с несоизмеримыми запаздываниями . . . . .	117
<b>Крахотко В.В., Размыслович Г.П., Горячкин В.В.</b> К проблеме робастной управляемости линейных дискретных систем . . . . .	119
<b>Курина Г.А.</b> О линейно-квадратичных задачах оптимального управления для дескрипторных систем с запаздыванием в состоянии и управлении . . . . .	121
<b>Хартовский В.Е.</b> О синтезе регуляторов финитной стабилизации линейных непрерывно-дискретных систем . . . . .	123
<b>Хартовский В.Е., Урбан О.И.</b> Задача финитной стабилизации по измерениям наблюдаемого выхода для линейных систем нейтрального типа . . . . .	125
<b>Цехан О.Б.</b> К равномерной управляемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем . . . . .	127
<b>Kostyukova O.I., Tchemisova T.V.</b> Parametric conic optimization problems over semi-definite plus non-negative cone . . . . .	129

### **СЕКЦИЯ «МОДЕРНИЗАЦИЯ И ЦИФРОВИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ»**

<b>Агеев С.М.</b> Об одном упрощении построения теории определителей . . . . .	131
<b>Азаров Н.А., Голубева Л.Л.</b> Применение ChatGPT в процессе обучения математике . . . . .	132
<b>Вельченко С.А., Медведев Д.Г.</b> Особенности подготовки программированию и параллельным алгоритмам в информационно-образовательной среде университета . . . . .	133
<b>Воронов М.В., Пименов В.И.</b> О модернизации подготовки математиков-программистов . . . . .	134
<b>Герасименко П.В., Вертешев С.М.</b> Об оценке возможности модернизации обучения математике бакалавров в инженерных ВУЗах на базе существующих знаний элементарной математики . . . . .	136
<b>Глецевич М.А., Шилин А.П.</b> Об одном дифференциальном уравнении для исследовательской работы студентов и магистрантов . . . . .	137
<b>Горбачев В.И., Пузырева Е.Н.</b> Модельно-абстрактное представление геометрического и евклидова пространств в учебной геометрической деятельности . . . . .	138
<b>Задворный Б.В., Казаченок В.В.</b> Искусственный интеллект и цифровизация образования . . . . .	141
<b>Казаченок В.В.</b> Электронное обучение математике . . . . .	143
<b>Козловская И.С.</b> Модернизация курса «Дифференциальные уравнения в частных производных» на основе включения в него элементов приложений . . . . .	145
<b>Кукрак Г.О.</b> О преподавании дисциплины «Основания геометрии» . . . . .	147
<b>Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.</b> О коэффициентах пропорциональности метода интегрирующих комбинаций . . . . .	148
<b>Марченко И.В.</b> Об использовании СКМ MAPLE при изучении математического анализа . . . . .	149
<b>Мателенок А.П., Вакульчик В.С., Завистовская Т.И.</b> Структура и обучающие средства учебно-методического комплекса нового поколения для студентов технических специальностей . . . . .	150
<b>Радыно Н.Я.</b> О русском языке и истинных основах естествознания и математики . . . . .	152
<b>Размыслович Г.П., Филиппов А.В.</b> О методах нахождения трансформирующей матрицы . . . . .	153
<b>Филимонов Д.В., Бровка Н.В.</b> О подготовке данных для задач проблемного проектного или исследовательского обучения в курсах дисциплин, связанных с дискретной математикой . . . . .	154
<b>Чиб Е.С.</b> Использование систем компьютерной математики для проведения лабораторных работ по курсу «Функциональный анализ» . . . . .	156

## **ТЕЗИСЫ ПЛЕНАРНЫХ ДОКЛАДОВ**

# О СВОЙСТВЕ КАЛЬДЕРОНА-МИТЯГИНА КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.В. Асташкин

Самарский национальный исследовательский университет, 443086 Самара,  
astash@ssau.ru

Цель доклада состоит в обсуждении специфики интерполяционных конструкций и свойств в шкалах квазибанаховых пространств. В частности, будет дано полное описание пар пространств  $(l_p, l_q)$ , где  $p, q$  — произвольные неотрицательные числа, обладающих свойством Кальдерона–Митягина.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТИПИЧНОСТИ И НЕТИПИЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА - ФАУЛERA ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГУ имени М.В.Ломоносова, Ленинские горы, 1, 119996 Москва, Россия,  
РЭУ имени Г.В.Плеханова, Стремянный переулок, 36, 115054 Москва, Россия,  
ast.diffiety@gmail.com

**Введение.** Обсуждается типичное и нетипичное поведение сингулярных решений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка со степенной нелинейностью. Для этого исследуется асимптотическое поведение решений связанной с этим уравнением динамической системы. Доказано, что для слабо нелинейных уравнений типичной является степенная асимптотика сингулярных решений, тогда как для сильно нелинейных уравнений степенное поведение решений является не типичным, а именно, доказано, что множество данных Коши, порождающих решения со степенной асимптотикой, имеет меру нуль.

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sign} y, \quad (1)$$

где  $n \geq 2$ ,  $k > 0, k \neq 1$ ,  $p$  – положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по последним  $n$  переменным, и его частный случай

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sign} y,$$

где  $p_0$  - положительная постоянная.

Продолжено исследование при  $k > 1$  гипотезы И.Кигурадзе [1, Problem 16.4] о степенном асимптотическом поведении всех сингулярных решений, имеющих "blow-up" в некоторой конечной точке. Показано, что для слабо нелинейных уравнений эта гипотеза справедлива, а для сильно нелинейных уравнений степенное поведение таких решений становится нетипичным, если порядок уравнения  $n \geq 12$ .

**Теорема 1.**[2] *Для любого целого  $n > 4$  существует такое действительное  $K > 1$ , что для всех действительных  $k \in (1, K)$ , все максимально продолженные решения уравнения (1), каждое из которых становится положительным вместе со всеми производными до порядка  $n$  в некоторой точке своей области определения, имеют степенное асимптотическое поведение вблизи правой ее границы  $x^*$ , а именно*

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow x^* - 0,$$

где

$$\alpha = \frac{n}{k-1}, C = \left( \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{p_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$



В [3] доказано существование у уравнения (2) решений с нестепенной асимптотикой для любого  $n \geq 12$ .

**Теорема 2.**[3] Для любого  $n \geq 12$ , существует такое  $k > 1$  что уравнение (2) имеет решение  $y$ , удовлетворяющее условиям

$$y^{(j)}(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^{-\alpha-j} h_j(\log(x^* - x)), \\ j = 0, 1, \dots, n-1,$$

где  $h_j$  – периодические положительные непостоянные функции на  $(-\infty, +\infty)$ .

Оказалось, что для сильно нелинейного уравнения имеет место следующий результат, доказывающий, что даже для уравнения (2) в этом случае степенное асимптотическое поведение сингулярных решений нетипично.

**Теорема 3.** Для любого  $12 \leq n \leq 100000$ , существует такое  $k_n > 1$ , что в любой точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  множество данных Коши, порождающих решения уравнения (2) со степенной асимптотикой, имеет нулевую меру Лебега.

**Замечание.** Полученные результаты дополняют и расширяют результаты работы [2].

Будет обсуждаться вопрос о качественном и асимптотическом поведении сингулярных решений уравнений (1) и (2) при  $0 < k < 1$ .

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 20-11-20272).

#### Литература

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1990.
2. Astashova I. *Atypicality of power-law solutions to Emden–Fowler type higher order equations* // St. Petersburg Mathematical Journal. 2020. Vol. 31. P. 297–311.
3. Astashova I. V., Vasilev M. Y. *On nonpower-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type higher-order differential equations* Differential and Difference Equations with Applications. // ICDDEA 2019, S. Pinelas et al. (eds.). Vol. 333 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer Cham: 2020. P. 361–372.

## О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

**С.М. Бауэр, В.Е. Воронкова**

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская набережная, д. 7–9, 199034 Санкт-Петербург, Россия  
{s.bauer, e.voronkova}@spbu.ru

Появление неосесимметричных форм равновесия у круглых пластин, нагруженных нормальным давлением, впервые отметили в 1948 г. Панов Д. Ю. и Феодосьев В. И. [1]. Однако, критическая нагрузка и форма потери устойчивости в [1] были найдены не правильно, так как задача решалась вариационным методом, а докритическое (осесимметричное) состояние учитывалось только одним параметром. Позже Феодосьев Д. И. отмечал, что «при больших прогибах форма упругой поверхности оболочки подвержена большим изменениям», и эти изменения не могут быть учтены одним или двумя параметрами [2]. В работах Морозова Н. Ф. [3, 4] были доказаны существование несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой.

Аналитически эта задача была решена в работах Cheo L. S., Reiss E. L. [5]. Ряд задач об устойчивости осесимметричной формы равновесия круглых пластин и пологих сферических оболочек под действием нормального давления или сосредоточенной нагрузки решен в работах Coman D. [6]. Для описания докритической деформации во всех этих работах всегда использовались уравнения пологих оболочек. Пластина всегда была изотропна и однородна.

Решение задачи для неоднородных по радиусу круглых и кольцевых пластин обсуждалась в работах Бауэр С. М., Воронковой Е. Б., Морозова Н. Ф. [7, 8]. В соавторстве с Семеновым Б. Н. исследована устойчивость симметричной формы равновесия круглой пластины методом конечных элементов. Для случая скользящей заделки получено решение, соответствующее форме потери устойчивости с образованием  $n = 14$  волнам по краю пластины, которое согласуется с решением, найденным с помощью аналитического подхода.

Аналитический подход к решению задачи основан на схеме, предложенной в работах Huang N. C., Cheo L. S. После разделения переменных исходная система уравнений распадается на две: нелинейную для нахождения симметричного решения и линейную систему уравнений относительно функций, описывающих закритическое состояние пластины.

В данной работе для расчета осесимметричного состояния используются более точные нелинейные уравнения. Получены решения при различных граничных условиях.

#### Литература

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. *О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах* // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, № 4. С. 389–406.
2. Феодосьев В. И. *Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем* // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 2. С. 265–274.
3. Морозов Н. Ф. *К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой* // Известия высших учебных заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
4. Морозов Н. Ф. *Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра)* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1318–1319.
5. Cheo L. S., Reiss E. L. *Unsymmetric wrinkling of circular plates* // Quarterly of Applied Mathematics. 1973. Vol. 31, iss. 1. P. 75–91.
6. Coman C. D. *On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities* // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229. P. 1099–1109.
7. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Морозов Н. Ф. *О несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления*. Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический журнал. Минск, БНТУ-2012, вып. 27. С. 31–35.
8. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. *О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024, Т. 24, № 1. С. 28–34.

## ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ $f$ -ПОТЕНЦИАЛОВ (КОЛМОГОРОВСКИХ СРЕДНИХ)

В.И. Бахтин<sup>1</sup>, Н.А. Царёв<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь,  
bakhtin@tut.by, colya.tsarew2015@yandex.by

В докладе доказываются критерии выпуклости и вогнутости  $f$ -потенциалов ( $f$ -средних Колмогорова), частными случаями которых являются средние арифметическое, геометрическое, гармоническое, экспоненциальное (термодинамический потенциал) и  $L^p$ -норма. В квадратурах вычисляются все функции  $f$ , удовлетворяющие этим критериям.

Пусть  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  обозначает вероятностное пространство, которое можно разбить на две измеримые части с положительными вероятностями, и пусть на интервале  $I$  вещественной оси (возможно, бесконечном в одну или в обе стороны) задана непрерывная строго монотонная функция  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $L^c(\Omega, I)$  совокупность измеримых функций  $\varphi: \Omega \rightarrow I$ , у которых множество значений компактно содержится в  $I$ . Очевидно, такое множество  $L^c(\Omega, I)$  выпукло.

Определим  $f$ -потенциал (или  $f$ -среднее Колмогорова) как функционал вида

$$\lambda_f(\varphi) = f^{-1}(E\{f(\varphi)\}) = f^{-1}\left(\int_{\Omega} f(\varphi(\omega)) dP(\omega)\right), \quad \varphi \in L^c(\Omega, I). \quad (1)$$

В случае  $f(x) = ax + b$ , где  $a \neq 0$ , функционал (1) совпадает с математическим ожиданием  $E\varphi$ . Если  $f(x) = x^p$ , где  $p > 1$ , то функционал  $\lambda_f(\varphi) = (E\{\varphi^p\})^{1/p}$  является  $L^p$ -нормой (для положительных функций  $\varphi$ ). При  $f(x) = \ln x$  формула (1) даёт среднее геометрическое значение  $\varphi$  по отношению к распределению вероятностей  $P$ , а в случае  $f(x) = 1/x$  — среднее гармоническое (при условии  $\varphi > 0$ ). В статистической физике используют экспоненциальное среднее ( $f(x) = e^x$ ), называемое также термодинамическим потенциалом.

Можно заметить, что если к функции  $f(x)$  применить аффинное преобразование (т. е. заменить её на  $Af(x) + B$ , где  $A \neq 0$ ), то от этого  $f$ -потенциал не изменится. Кроме того, он обладает свойством монотонности: из неравенства  $\psi \geq \varphi$  следует, что  $\lambda_f(\psi) \geq \lambda_f(\varphi)$ .

Вслед за монотонностью естественно попытаться определить направление выпуклости  $f$ -потенциала (если таковая имеет место). В следующих теоремах 1–4 формулируются критерии выпуклости и вогнутости  $f$ -потенциалов.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и возрастает. Тогда выпуклость  $f$ -потенциала (1) равносильна выполнению совокупности условий

- а) функция  $f$  выпукла,
- б) функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема,
- в) функция  $h: I \rightarrow (0, +\infty]$ , определяемая следующей формулой (2), вогнута

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f''(x)}, \quad x \in I. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и возрастает. Тогда выпуклость  $f$ -потенциала (1) равносильна выполнению совокупности условий

- а) функция  $f$  выпукла,
- б) функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема,
- в) функция  $H: f(I) \rightarrow (0, +\infty]$ , определяемая следующей формулой (3), вогнута

$$H(f(x)) = \frac{f'(x)^2}{f''(x)}, \quad x \in I. \quad (3)$$

Очевидно, всё различие между теоремами 1 и 2 заключается лишь в формулировке условий в). В действительности эти условия, как и сами теоремы, взаимно эквивалентны. Кроме того, в условиях теорем 1, 2 либо  $f''(x) > 0$  для всех  $x \in I$  (и тогда функции  $h$  и  $H$  положительны и всюду конечны), либо  $f''(x) \equiv 0$  на всем  $I$  (и тогда  $f$  аффинна, а  $h$  и  $H$  тождественно равны  $+\infty$ ).

Теорема 1 выглядит проще теоремы 2, потому что формула (2) определяет функцию  $h$  явно, а формула (3) определяет функцию  $H$  неявно. Как ни странно, нам не удалось найти прямого доказательства теоремы 1, и она была получена как следствие из теоремы 2. А теорема 2 впервые была доказана вторым из авторов (в немного ослабленной форме) в [1].

Далее, теоремы 1, 2 могут быть легко модифицированы для случаев убывающей функции  $f$  и/или вогнутого потенциала  $\lambda_f$ . В частности, верна следующая

**Теорема 3.** Теорема 1 остаётся в силе при следующих комбинациях условий монотонности и выпуклости участвующих в ней функций:

- а) если  $f$  возрастает, то потенциал  $\lambda_f$  выпуклый  $\Leftrightarrow f$  выпукла и  $h$  вогнута;
- б) если  $f$  убывает, то потенциал  $\lambda_f$  выпуклый  $\Leftrightarrow f$  вогнута и  $h$  вогнута;
- в) если  $f$  убывает, то потенциал  $\lambda_f$  вогнутый  $\Leftrightarrow f$  выпукла и  $h$  выпукла;
- г) если  $f$  возрастает, то потенциал  $\lambda_f$  вогнутый  $\Leftrightarrow f$  вогнута и  $h$  выпукла.

Другими словами, выпуклость (вогнутость)  $f$ -потенциала равносильна положительности и вогнутости (соответственно отрицательности и выпуклости) функции  $h$ .

Если на интервале  $I \subset \mathbb{R}$  задана непрерывная строго монотонная функция  $f$ , то на его образе  $f(I)$  определена обратная функция  $g = f^{-1}$ , которая непрерывна и монотонна в том же смысле. Оказывается, имеется строгое соответствие между выпуклостью (вогнутостью) отвечающих этим функциям потенциалов  $\lambda_f$  и  $\lambda_g$ .

**Теорема 4.** Пусть на интервале  $I$  вещественной оси задана непрерывная и строго монотонная функция  $f$ , а на интервале  $f(I)$  определена обратная функция  $g = f^{-1}$ . Тогда из выпуклости

(вогнутости) функционала  $\lambda_f$  следует выпуклость или вогнутость  $\lambda_g$ . При этом в условиях теоремы 3 либо оба потенциала  $\lambda_f$  и  $\lambda_g$  относятся к типу б), либо оба к типу в), либо один из них имеет тип а), а другой — тип г).

Решая дифференциальное уравнение (2), можно вычислить  $f(x)$ :

$$f(x) = A \int_{x_0}^x \exp \left\{ \int_{x_0}^s \frac{dt}{h(t)} \right\} ds + B, \quad A \neq 0. \quad (4)$$

Эта формула дает явное выражение для всех (за исключением аффинных) функций  $f(x)$ , для которых потенциал  $\lambda_f$  выпуклый или вогнутый (соответственно если функция  $h(x)$  положительна и вогнута или отрицательна и выпукла).

Теорема 3 позволяет проверять выпуклость или вогнутость  $f$ -потенциалов, отвечающих элементарным функциям  $f$ . В частности, выпуклыми оказались потенциалы для функций  $f(x)$  вида  $e^x$ ,  $x^p$  ( $p > 1$ ),  $\operatorname{ch}x$ ,  $\operatorname{sech}x$ , а вогнутыми оказались потенциалы для функций из следующего списка:  $\ln x$ ,  $x^p$  ( $p < 1$ ,  $p \neq 0$ ),  $\operatorname{arch}x$ ,  $\operatorname{cth}x$ ,  $\operatorname{arcth}x$ ,  $\operatorname{arcsec}x$ ,  $\operatorname{cosec}x$ ,  $\operatorname{arccsc}x$  (при подходящем выборе интервала монотонности  $I$  для указанных функций).

Для остальных «школьных» функций ( $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{arsh}$ ,  $\operatorname{th}$ ,  $\operatorname{arth}$  и всех не перечисленных выше тригонометрических), суженных на любой интервал в их области определения, соответствующие  $f$ -потенциалы не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми.

### Литература

1. Царёв Н. А. *Исследование выпуклости  $f$ -потенциала* // 79-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф., Минск, 10–21 мая 2022 г. В 3 ч. Ч. 1. Минск: БГУ, 2022. С. 260–264. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295311>

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ РАЗГОНЕ ЛАЙНЕРА

М.П. Галанин<sup>1</sup>, А.П. Лотоцкий<sup>2</sup>, А.С. Родин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ  
galan@keldysh.ru, rals@bk.ru

<sup>2</sup>АО ГНЦ РФ ТРИНИТИ, Москва, Троицк, РФ  
lototsky@triniti.ru

Выполнено моделирование электромагнитного ускорения и торможения плоской металлической пластины (лайнера), являющегося элементом магнитного компрессора в установке «МОЛ». Исследования проведены в сотрудничестве с ГНЦ РФ ТРИНИТИ, в котором созданы экспериментальные макеты магнитных компрессоров. Математическое моделирование является единственным инструментом получения подробной информации о движении лайнера, поскольку из экспериментов удастся получить весьма ограниченную информацию о протекающих процессах. Во время экспериментальных запусков магнитного компрессора время работы устройства составляло 100–120 мкс, а рабочие участки ленты лайнера практически полностью разрушались.

Построено семейство двумерных моделей, соответствующих продольному и поперечному сечениям компрессора, в рамках которых лайнер рассмотрен в приближениях упругого тела, упругопластического тела (для случая произвольных деформаций) и вязкой несжимаемой жидкости. Для численного моделирования разработаны и программно реализованы вычислительные алгоритмы, основанные на методе возможных перемещений и методе Галеркина–Петрова.

Исследованы различные варианты магнитного компрессора, в котором происходит электромагнитное ускорение лайнера до скорости порядка 1 км/с. В цикле вычислительных экспериментов показано, что характеристики движения жидкого и упругопластического лайнера согласуются с имеющимися экспериментальными данными. В целом модель упругопластического лайнера наиболее адекватно описывает движение лайнера. Использование данной модели позволило получить

значения ключевых параметров системы (ширина ленты лайнера в различные моменты времени, скорость центра масс лайнера, амплитуда импульса тока в цепи лайнера и т.д.), которые отличаются от экспериментальных значений на 5–10%.

## НЕЛОКАЛЬНЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Гладков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, gladkova@bsu.by

В докладе будут рассматриваться нелокальные начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений. Выражения с нелокальностями могут присутствовать как в уравнении, так и в граничных условиях. Исследуются начально-краевые задачи с нелокальностями по времени и по пространственным переменным. Для таких начально-краевых задач рассматриваются вопросы локальной и глобальной разрешимости, а также наличие и отсутствие единственности решений. В частности, будет рассмотрена следующая задача

$$u_t = \Delta u + au^p \int_{\Omega} u^q(y, t) dy - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $a, b, p, q, m, l$  – положительные числа,  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^N$  при  $N \geq 1$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Относительно функций  $k(x, y, t)$  и  $u_0(x)$  предполагается следующее:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

Начально-краевая задача для уравнения (1) с нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4)$$

при  $l > 0$  изучалась в [1], [2].

Пусть  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ ,  $\Gamma_T = S_T \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$ ,  $T > 0$ . Для задачи (1)–(3) в [3] получены следующие результаты о глобальном существовании решений и об обращении их в бесконечность за конечное время.

**Теорема 1.** Пусть  $\max(p+q, l) \leq 1$  или  $1 < \max(p+q, l) < m$ . Тогда любое решение задачи (1)–(3) существует глобально.

**Теорема 2.** Пусть  $p+q > \max(m, 1)$  или  $l > \max(m, 1)$  и

$$\inf_{\Omega} \int_{\partial\Omega} k(x, y, 0) dS_x > 0.$$

Тогда решения задачи (1)–(3) обращаются в бесконечность за конечное время при достаточно больших начальных данных.

Рассмотрим начально-краевую задачу для следующего нелокального нелинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + a \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

с условиями (2) и (3). Начально-краевая задача (5), (2), (3) с  $a = 0$  и переменными коэффициентами изучалась [4], [5].

**Теорема 3.** Пусть выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

a).  $\max(q, l) \leq 1$ ;

b).  $\max(q, l) > 1$  и  $l < m, q \leq m$ .

Тогда любое решение задачи (5), (2), (3) существует глобально.

**Теорема 4.** Пусть  $q > \max(m, 1)$  или  $l > \max(m, 1)$  и

$$\int_{\partial\Omega} k(x, y, t) dS_x \geq k_1 \text{ для любых } y \in \Omega \text{ и } t \geq t_1$$

при некоторых  $k_1 > 0$  и  $t_1 > 0$ . Тогда решения задачи (5), (2), (3) обращаются в бесконечность за конечное время при  $u_0(x) \neq 0$ . Если  $l > \max(m, 1)$  и

$$\inf_{\Omega} \int_{\partial\Omega} k(x, y, 0) dS_x > 0,$$

то решения задачи (5), (2), (3) обращаются в бесконечность за конечное время при достаточно больших начальных данных.

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в [6].

Работа поддержана государственной программой фундаментальных исследований Беларуси (грант 1.2.03.1).

### Литература

1. Gladkov A., Kavtova T. *Global existence of solutions of initial-boundary value problem for nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition* // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, No 1. P. 5464–5479.

2. Гладков А., Кавитова Т. *О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием* // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018. № 1. С. 29–38.

3. Gladkov A. *Global existence and blow-up of solutions of nonlinear nonlocal parabolic equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition* // *Monatshefte für Mathematik*. 2024. Vol. 203, No 2. P. 357–372.

4. Gladkov A. *Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition* // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2017. Vol. 16, No 6. P. 2053–2068.

5. Gladkov A. *Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition* // *Lithuanian Mathematical Journal*. 2017. Vol. 57, No 4. P. 468–478.

6. Gladkov A. *Global existence and blow-up of solutions a parabolic equation with nonlinear memory and absorption under nonlinear nonlocal boundary condition* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, No 4. P. 1703–1712.

## ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ. СОСТОЯНИЕ, ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ

**М.А. Журавков<sup>1</sup>, С.М. Босяков<sup>1</sup>, С.С. Щербаков<sup>2</sup>**

Белорусский государственный университет,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

{Zhuravkov, Bosiakov@bsu.by}@bsu.by <sup>2</sup>Национальная академия наук Беларуси,

Независимости 66, 220072 Минск, Беларусь, sherbakovss@mail.ru

В докладе обсуждается широкий аспект вопросов, связанный с разработкой современных систем моделирования в механике. Показано, что на современном этапе развития компьютерные технологии моделирования разнообразных физических процессов это: высокопроизводительные вычисления + знания и «большие данные» + математические модели + искусственный интеллект. В число наиболее важных стратегических целей развития систем моделирования нового поколения входят:

- разработка математических основ методов обработки и интеллектуального анализа данных для различных прикладных областей и направлений;

- разработка математических основ систем компьютерного моделирования, расчетов и анализа разнообразных физических процессов;
- переход к новым интеллектуальным САД-, САЕ- и САМ-технологиям;
- рекомендации к постановке модельных математических и компьютерных задач для реальных исследуемых процессов и явлений;
- интеллектуальная интерпретация и анализ результатов моделирования.

Обсуждаются перечисленные направления исследования. Приводятся примеры выполненных разработок.

## ИССЛЕДОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

В.И. Корзюк<sup>1</sup>, И.И. Столярчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,  
korzyuk@bsu.by

<sup>2</sup>ООО "Нэкссофт Кульман 9, 7 этаж, пом. 26, 220100 Минск,  
stolyarchuk.ivan.i@gmail.com

**Введение.** При моделировании различных процессов возникает необходимость в решении смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка. При этом, решение в явном виде не всегда может найдено, однако для применения полученных решений, как численных, так и аналитических, необходимо исследовать смешанные задачи на существование и единственность решений в определенном классе гладкости. В данном сообщении будут рассмотрены некоторые из смешанных задач и доказаны с помощью метода характеристик критерии их разрешимости.

**Смешанная задача для уравнения типа Клейна-Гордона-Фока с интегральными условиями.** В замыкании  $\bar{Q}$  области  $Q = (0; +\infty) \times (0; l)$  задается одномерное уравнение типа Клейна-Гордона-Фока

$$Lv = \partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t, x)v = f(t, x),$$

где  $\lambda$  и  $f$  - функции, заданные на множестве  $\bar{Q} = [0; l] \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$ . К уравнению присоединяются начальные условия

$$v(0, x) = \varphi(x), \partial_t v(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l],$$

$l \in \mathbb{R}, |l| < +\infty$ , и интегральные условия

$$v(t, 0) = \int_0^l K_0(t, s)v(t, s)ds + \widetilde{q}^{(0)}(t), v(t, l) = \int_0^l K_l(t, s)v(t, s)ds + \widetilde{q}^{(l)}(t).$$

**Теорема 1.** Пусть функции  $\lambda, f \in C^1(\bar{Q})$ ,  $K_j(t) \in C^2([0; +\infty) \times [0; l])$ ,  $j \in \{0, l\}$ . Решение задачи (1)–(3), существует и единственно в классе  $C^2(\bar{Q})$  тогда и только тогда, когда  $\widetilde{q}^{(j)} \in C^2([0; +\infty))$ ,  $\varphi \in C^2([0; l])$ ,  $\psi \in C^1([0; l])$  и выполняются условия согласования на заданные функции

**Задача с дифференциальными полиномами в граничных условиях.** Данная задача обобщает смешанную задачу с косыми производными в граничных условиях [1, 2].

Рассмотрим на множестве  $\bar{Q} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, x_0 \in [0; +\infty), x_1 \in [0; l]\}$  следующую смешанную задачу для волнового уравнения

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0, \quad (1)$$

с начальными условиями типа Коши

$$u|_{x_0} = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u|_{x_0} = \psi(x_1), x_1 \in [0; l] \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq n_j} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1}}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), j \in \{0, l\}, n_j \in \mathbb{N}, n_j \geq 2. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть функции  $\mu^{(j)}, r_j^{(\alpha)} \in C^{n_j+k\zeta_j}([0; +\infty))$ ,  $\varphi \in C^{2n_m+k\zeta_j}$ ,  $\psi \in C^{2n_m-1+k\zeta_j}$ ,  $j \in \{0, l\}$  где  $n_m = \max(n_0, n_l)$ ,  $\zeta_j$  - определяет разность порядков производных. Тогда классическое решение и задачи (1)–(3) существует и единственно в классе  $C^{n_m}([0; \frac{kl}{a}] \times [0; l])$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^i \beta_{\nu_j}^{(j)}(j) C_{\nu_j}^{(0)} + \sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^{i+n_0} \left( \beta_{\nu_j}^{(j)}(z) \int_{\xi_j}^z \frac{W_{\nu_j+1}^{(j)}(\tau)}{r_j^{n_j}(\tau) W^{(j)}(\tau)} d\tau \right), i = \overline{0, k\zeta_j},$$

где  $\beta_{\nu_j}^{(j)}$  – функции фундаментальной системы решений уравнения (3),  $W^{(j)}$  – определитель Вронского данной системы.

**Первая смешанная задача для волнового уравнения в цилиндре.** Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных  $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ .

В области  $Q = \{\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \mathbf{x}' \in \Omega\}$  задаётся волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta_{\mathbf{x}'} u = 0. \quad (4)$$

К нему присоединяются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\mathbf{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\mathbf{x}'). \quad (5)$$

На боковой поверхности  $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$  задаётся граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \mu(\mathbf{x}). \quad (6)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\varphi(\mathbf{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$ ,  $\psi(\mathbf{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\mu(\mathbf{x}) \in C^3(\Gamma)$ . Классическое решение задачи (4)–(6) существует и единственно в классе  $C^2(\overline{Q})$  и оно может быть найдено в точках  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  которых  $x_0 \in [kr_N/a, (k+1)r_N/a]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по формуле, обобщающей формулу Кирхгофа [3]

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int_{|x'-y'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\mathbf{y}') ds_{y'} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi a \chi^{(k;N)}(x_0)} \int_{|x'-y'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\mathbf{y}') ds_{y'} + \\ & + \frac{1}{2\pi R a} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{x'-y' \in S(x-y, \tau_j^{(k;N)}(x_0))} \mu(x_0, \mathbf{y}') ds_{y'}, \end{aligned}$$

где  $r_N = d(N, \Gamma)$  – расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до границы  $\Gamma$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования на заданные функции.

### Литература

1. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2018. Т. 54, № 4. С. 391–403.
2. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2019. Т. 55, № 1. С. 7–21.
3. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. Изд. 2-е, испр. и доп. Москва: Ленанд, 2021.



**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ****В. Г. Кротов**

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь  
vgkrotov@mail.ru

В докладе предполагается изложить вариант интерполяционной теоремы Марцинкевича–Стейна–Вейса–Графакоса для нелинейных операторов со степенной нелинейностью, действующих в некоторых шкалах абстрактных пространств, которые в частных случаях являются расширениями тех или иных классов Харди. Будут также рассмотрены приложения этой интерполяционной теоремы к пространствам Харди (аналитических, гармонических и т.п. функций), а также к граничному поведению краевых задач для многомерных уравнений эллиптического и параболического типов.

**О ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ  
ДЛЯ ПРОЦЕССА ВОЗРАСТАНИЯ–УБЫВАНИЯ****В.И. Лотов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
630090 Россия, Новосибирск, пр. Коптюга 4  
lotov49@mail.ru

Рассматривается случайный процесс, траектории которого характеризуются поочередным линейным ростом и линейным убыванием на промежутках времени случайной длины, при этом между ростом и убыванием процесс может также сохранять неизменным свое значение в течение случайных промежутков времени. Этот процесс может служить математической моделью накопления и расходования материалов, когда сочетаются случайные промежутки времени для накопления, расходования и перерывов в функционировании. Изучается среднее значение  $EN$  времени  $N$  первого достижения фиксированного уровня траекториями этого процесса, включая нахождение точных формул для  $EN$ , оценку сверху в виде неравенства и асимптотику  $EN$  в условиях неограниченно удаляющегося уровня.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

**Литература**

1. Lotov V.I. *On the Time of the First Achievement of a Level by an Ascending-Descending Process*// Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2023. Vol. 17, No 3. P. 592–599.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$** **Г.В. Матвеев<sup>1</sup>, А.А. Осинская<sup>2</sup>, В.И. Янчевский<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, matveev@bsu.by  
<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,  
{anna,yanch}@im.bas-net.by

Нашей целью является построение фундаментальной области специальной линейной группы  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ , где  $\mathbb{F}_p[x]$  — кольцо многочленов от одной переменной над конечным полем  $\mathbb{F}_p$ , относительно действия на ней правыми сдвигами конгруэнц-подгруппы. Мы хотим найти в этой группе всё необходимое для построения схемы разделения секрета подобно тому, как это происходит в

кольце целых чисел  $\mathbb{Z}$ , в кольце многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  [1] и в группе  $SL_2(\mathbb{Z})$  [2]. Заметим, что несмотря на глубокое сходство между  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{F}_p[x]$ , а также между  $SL_2(\mathbb{Z})$  и  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ , между ними есть и существенные различия. Х. Нагао показал в [3], что  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ , в отличие от  $SL_2(\mathbb{Z})$ , не является конечнопорожденной группой. Также при  $e > 1$  группа  $(\mathbb{F}_p[x]/(P^e(x)))^*$  (где  $P(x)$  — неприводимый многочлен) устроена намного сложнее, чем  $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^*$  (см. предложение 1.6 из [4]). Это позволяет получить схему разделения секрета с лучшими криптографическими характеристиками. В работе [1] доказано, что полиномиальная модулярная схема, в общем случае совершенная, а в пороговом идеальная. Еще одно преимущество полиномиальных схем по сравнению с целочисленными — их расширенные возможности по генерации параметров.

Возьмем некоторый многочлен  $m(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  ненулевой степени. Запись  $f(x) \equiv m(x) \pmod{m(x)}$  означает, что  $f(x)$  и  $g(x)$  сравнимы по модулю  $m(x)$ . Это эквивалентно тому, что  $\overline{f(x)} = \overline{g(x)}$ , где  $\overline{f(x)}$  — образ относительно канонического гомоморфизма  $\mathbb{F}_p[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x]/(m(x))$ . Введем следующие подмножества в группе  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_0(m(x)) &= \left\{ \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p[x]) : \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & d(x) \end{pmatrix} \pmod{m(x)} \right\}, \\ \Gamma_1(m(x)) &= \left\{ \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p[x]) : \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m(x)} \right\}, \\ \Gamma(m(x)) &= \left\{ \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p[x]) : \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m(x)} \right\}.\end{aligned}$$

Здесь и далее сравнимость матриц по модулю  $m(x)$  понимают как поэлементную. Очевидно, что  $\Gamma_0(m(x))$ ,  $\Gamma_1(m(x))$  и  $\Gamma(m(x))$  являются подгруппами и справедливы включения

$$\Gamma(m(x)) \subset \Gamma_1(m(x)) \subset \Gamma_0(m(x)) \subset SL_2(\mathbb{F}_p[x]).$$

Подгруппа  $\Gamma(m(x))$  называется главной конгруэнц-подгруппой по модулю  $m(x)$ , остальные подгруппы — просто конгруэнц-подгруппами.

**Лемма 1.** *Отображение  $\varphi : SL_2(\mathbb{F}_p[x]) \rightarrow SL_2(\mathbb{F}_p[x]/(m(x)))$ , где*

$$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{a(x)} & \overline{b(x)} \\ \overline{c(x)} & \overline{d(x)} \end{pmatrix},$$

*является сюръективным гомоморфизмом.*

**Лемма 2.** (i)  $\Gamma(m(x)) \triangleleft SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ ;

(ii)  $\Gamma_1(m(x)) \triangleleft \Gamma_0(m(x))$ .

**Замечание.**  $\Gamma_1(m(x)) \not\triangleleft SL_2(\mathbb{F}_p[x])$  и  $\Gamma_0(m(x)) \not\triangleleft SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ .

Далее нам понадобится известное утверждение

**Лемма 3.** *Каноническое разложение многочлена  $m(x) = P_1^{e_1}(x) \dots P_r^{e_r}(x)$  индуцирует естественный изоморфизм*

$$\psi : SL_2(\mathbb{F}_p[x]/(m(x))) \rightarrow SL_2(\mathbb{F}_p[x]/(P_1^{e_1}(x))) \times \dots \times SL_2(\mathbb{F}_p[x]/(P_r^{e_r}(x))).$$

Пусть  $\Phi(m(x))$  — число ненулевых многочленов степени, меньшей  $\deg m(x)$ , взаимно простых с  $m(x)$ ,  $|m(x)| = p^{\deg m(x)}$ . По предложению 1.7 из [4],  $\Phi(m(x)) = |m(x)| \prod_{P(x)|m(x)} \left(1 - \frac{1}{|P(x)|}\right)$ .

**Теорема 1.** (i)  $[\Gamma_1(m(x)) : \Gamma(m(x))] = |m(x)|$ ;

(ii)  $[\Gamma_0(m(x)) : \Gamma_1(m(x))] = \Phi(m(x))$ ;

(iii)  $[SL_2(\mathbb{F}_p[x]) : \Gamma(m(x))] = |m(x)|^2 \Phi(m(x)) \prod_{P(x)|m(x)} \left(1 + \frac{1}{|P(x)|}\right)$ ;

(iv)  $[SL_2(\mathbb{F}_p[x]) : \Gamma_0(m(x))] = |m(x)| \prod_{P(x)|m(x)} \left(1 + \frac{1}{|P(x)|}\right)$ .

Для реализации пороговой модулярной схемы в группе  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$  нужно получить явное описание фундаментальной области относительно подгруппы  $\Gamma(m(x))$ , что является аналогом полной системы вычетов  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  по некоторому модулю  $n$  в кольце  $\mathbb{Z}$ . Ввиду леммы 1 это можно было бы сделать с помощью техники подъема (лифтинга), однако эта задача пока решена не в полной мере. В книге [5, стр. 438–439] указывается, что установить возможность подъема

решений целочисленного уравнения  $xy - zt = 1$  по некоторой системе модулей до целочисленного решения не так-то легко. Еще больше сложностей возникает при решении этого уравнения в кольце  $\mathbb{F}_p[x]$ . Построение фундаментальной области существенно упрощает решение этой задачи.

Нам удалось построить значительную часть этой области, что достаточно для схемы разделения секрета (см. [2]). Укажем семейство попарно несравнимых элементов группы  $\Gamma_0(m(x))$  по модулю  $m(x)$  в количестве, равном  $[\Gamma_0(m(x)) : \Gamma_1(m(x))] = \Phi(m(x))$ . Возьмем произвольный элемент  $\varepsilon_i(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  такой, что  $\varepsilon_i(x) \in (\mathbb{F}_p[x]/(m(x)))^*$ . Тогда существует  $\varepsilon'_i(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ :  $\varepsilon_i(x)\varepsilon'_i(x) = 1 + m(x)k_i(x)$  и  $\varepsilon'_i(x)$ ,  $k_i(x)$  однозначно определяются выбором  $\varepsilon(x)$ . Таких  $\varepsilon_i(x)$  имеется ровно  $\Phi(m(x))$ , поэтому положим  $1 \leq i \leq \Phi(m(x))$ . Имеем:

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i(x) & k_i(x) \\ m(x) & \varepsilon'_i(x) \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m(x)).$$

Образуем из них новые матрицы:

$$B_{i,j(x)}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i(x) + j(x)m(x) & k_i(x) + j(x)\varepsilon'_i(x) \\ m(x) & \varepsilon'_i(x) \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m(x)),$$

где  $i = 1, \dots, \Phi(m(x))$ ,  $\deg j(x) < \deg m(x)$ . Расширим это семейство, положив

$$C_{i,j(x),l(x)}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i(x) + j(x)m(x) & k_i(x) + j(x)\varepsilon'_i(x) \\ m(x) + (\varepsilon_i(x) + j(x)m(x))l(x) & \varepsilon'_i(x) + (k_i(x) + j(x)\varepsilon'_i(x))l(x) \end{pmatrix},$$

где  $i = 1, \dots, \Phi(m(x))$ ,  $\deg j(x) < \deg m(x)$ ,  $\deg l(x) < \deg m(x)$ . Тогда определитель матриц  $C_{i,j(x),l(x)}(x)$  равен 1 и они попарно различны при различных  $i, j(x), l(x)$ .

**Теорема 2.** Матрицы  $A_i(x)$  при  $i = 1, \dots, \Phi(m(x))$ , составляют фундаментальную область группы  $\Gamma_0(m(x))$  относительно подгруппы  $\Gamma_1(m(x))$ , а матрицы  $B_{i,j(x)}(x)$  при  $i = 1, \dots, \Phi(m(x))$ ,  $\deg j(x) < \deg m(x)$ , — фундаментальную область группы  $\Gamma_0(m(x))$  относительно подгруппы  $\Gamma(m(x))$ .

**Замечание.** Матрицы  $C_{i,j(x),l(x)}(x)$  при  $i = 1, \dots, \Phi(m(x))$ ,  $\deg j(x) < \deg m(x)$ ,  $\deg l(x) < \deg m(x)$ , не пробегают всю фундаментальную область группы  $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$  относительно подгруппы  $\Gamma_1(m(x))$ , однако они занимают большую ее часть, поскольку их количество равно  $|m(x)|^2 \Phi(m(x))$ .

Тем самым построена часть фундаментальной области, необходимая для реализации схемы разделения секрета.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.1.01.

### Литература

1. Galibus T., Matveev G., Shenets N. *Some structural and security properties of the modular secret sharing* // Proc. of SYNASC'08. Los Alamitos, 2009. P. 197–200.
2. Янчевский В. И., Говорушко И. О., Матвеев Г. В. *Разделение секрета в специальной линейной группе* // Информатика. 2024. Т. 21, № 3. С. 23–31.
3. Nagao H. *On  $GL(2; K[X])$*  // J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. 1959. Vol. 10. P. 117–121.
4. Rosen M. *Number theory in function fields*. New York: Springer-Verlag, 2002.
5. Платонов В. П., Рапинчук А. С. *Алгебраические группы и теория чисел*. М.: Наука, 1991.

## ТЕОРИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.П. Матус

Институт математики НАН Беларуси, 220072 Минск, Беларусь  
piotr.p.matus@gmail.com

Настоящий доклад с одной стороны посвящён обзору моих основных научных результатов, полученных за 50-летний период научной деятельности, а с другой — отражает содержание основных разделов моей монографии — главного научного труда. В докладе рассматриваются следующие

вопросы теории разностных схем, касающихся в основном квазилинейных нестационарных уравнений математической физики с нелинейностями неограниченного роста:

- монотонные разностные схемы;
- устойчивость и сходимость разностных схем;
- коэффициентная устойчивость;
- точные и компактные разностные схемы.

Полученные научные результаты опубликованы в четырёх монографиях, две из которых изданы на английском языке за рубежом [1], [2], а также в 112 научных журналах с импакт фактором (Web of Science). О мировом признании данных результатов говорит созданный в 2001 году на базе Института математики НАН Беларуси международный математический журнал на английском языке «Computational method in applied mathematics», имеющий пятилетний импакт фактор 1.5.

#### Литература

1. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht: Kluwer, 2002. 394 p. 2. Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D. *Exact finite-difference schemes*. De Gruyter, 2016. 243 p.

## ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ АЛГЕБРОЙ И ГЕОМЕТРИЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

**В. Л. Попов**

Математический институт имени В.А. Стеклова, 119991 Москва, РФ, popovvl@mi-ras.ru

Давно замечено существование зависимости между групповыми свойствами алгебраических групп и геометрическими свойствами их подлежащих многообразий: классический пример дает теорема о коммутативности связной алгебраической группы, подлежащее многообразие которой проективно. Целью доклада является обсуждение этой зависимости.

## ПРОБЛЕМЫ РАЦИОНАЛЬНОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Ю.Г. Прохоров**

Математический институт имени В.А. Стеклова, 119991 Москва, РФ, prokhoro@mi-ras.ru

Будет дан обзор новых и старых результатов о рациональности многомерных многообразий отрицательной кодацировой размерности. В основном будет обсуждаться трёхмерный случай.

## НОВЫЕ ПОНЯТИЯ МЕР КОЛЕБЛЕМОСТИ, БЛУЖДАЕМОСТИ И ВРАЩАЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

**И.Н. Сергеев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьёвы горы 1, 119991 Москва, РФ  
igniserg@mail.com

Для дифференциальной системы с нулевым решением определяются меры различных колебательных свойств, отвечающие за возможность выбрать наугад сколь угодно близкое к нулю начальное значение так, чтобы возмущённое решение обладало наперёд заданными колебательными свойствами. Изучаются корректность определений и естественные взаимосвязи между различными введёнными мерами, а также их особенности в некоторых содержательных частных случаях.

Для заданной области  $G \ni 0$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  при  $n > 1$  с лебеговой мерой  $\text{mes}$  рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

Введём обозначения  $G_* \equiv G \setminus \{0\}$ ,  $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| < \delta\}$ , а через  $x_f(\cdot, x_0)$  будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным значением  $x_f(0, x_0) = x_0 \in G$ .

**Определение 1** [1–3]. Для заданного числа  $t \in \mathbb{R}_+$  и непрерывно-дифференцируемой функции  $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$  определим неотрицательное значение (неопределённое, если функция  $u$  определена не на всём отрезке  $[0, t]$ ) функционала  $K = P, N, \Theta$ :

а) *блуждаемости*, где

$$K(t, u) = P(t, u) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|} \right| d\tau, \quad u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

б) *колеблемости*, где

$$K(t, u) = N(t, u)$$

есть *нормированное* (умноженное на  $\pi$ ) число нулей функции  $P_1 u$  на отрезке  $[0, t]$ , а  $P_1$  — ортогональный проектор на фиксированную прямую в  $\mathbb{R}^n$ , причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной  $(P_1 u)'$ ), то считаем выражение  $N(t, u)$  *неопределённым*;

в) *вращаемости*, где

$$K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$$

есть модуль *ориентированного угла*  $\varphi(t, P_2 u)$  (т.е. непрерывного по  $t$ , с начальным условием  $\varphi(0, P_2 u) = 0$ ) между вектором  $P_2 u(t)$  и начальным вектором  $P_2 u(0)$ , а  $P_2$  — ортогональный проектор на фиксированную плоскость в  $\mathbb{R}^n$ , причём если  $P_2 u(\tau) = 0$  хотя бы при одном  $\tau \in [0, t]$ , то считаем выражение  $\Theta(t, u)$  *неопределённым*.

**Определение 2** (ср. [4, 5]). *Мерой блуждаемости, колеблемости или вращаемости* системы (1) при ассоциированном индексе  $\varkappa = \rho, \nu, \theta$  назовём соответственно величину

$$\mu_{\varkappa}(f) = \sup_{\varepsilon > 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta)}{\text{mes } B_\delta}, \quad (2)$$

а *мерой неблуждаемости, неколеблемости или невращаемости* — величину

$$\mu_{\bar{\varkappa}}(f) = \inf_{\varepsilon > 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)}{\text{mes } B_\delta}, \quad (3)$$

где  $M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta)$  и  $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)$  — множества всех значений  $x_0 \in B_\delta$ , для которых ассоциированный функционал  $K$  удовлетворяет соответственно требованию

$$\inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)) \geq \varepsilon, \quad \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)) < \varepsilon. \quad (4)$$

**Теорема 1.** Для любой системы (1), каждого функционала  $K$ , любых  $t > 0$  и  $x_0 \in G_*$  верно следующее: если решение  $x_f(\cdot, x_0)$  определено на всём отрезке  $[0, t]$ , то левые части оценок (4) определены и конечны.

**Теорема 2.** Для любой системы (1), каждого индекса  $\varkappa$ , любого  $\varepsilon > 0$  и всех достаточно малых  $\delta > 0$  множества  $M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta)$  и  $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)$  измеримы по Лебегу и удовлетворяют равенствам

$$M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta) \cup M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta) = B_\delta,$$

$$\text{mes } M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta) + \text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta) = \text{mes } B_\delta.$$

**Теорема 3.** Для любой системы (1) и каждого индекса  $\varkappa$  справедливы соотношения

$$\mu_{\varkappa}(f), \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \in [0, 1], \quad 0 \leq \mu_{\varkappa}(f) + \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \leq 1.$$

**Теорема 4.** Для любой системы (1) и каждого индекса  $\varkappa$  значения мер  $\mu_{\varkappa}(f)$  и  $\mu_{\bar{\varkappa}}(f)$  не изменятся, если в задающих их формулах (2) и (3) точные грани по  $\varepsilon > 0$  заменить пределами при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , причём все эти пределы существуют.

**Теорема 5.** Для любой системы (1) и каждого индекса  $\varkappa$  мера  $\mu_{\varkappa}(f)$  равна такому наибольшему числу из отрезка  $[0, 1]$ , что для каждого меньшего значения  $\mu$  существуют такие числа  $\varepsilon, T > 0$  и функция  $\Delta(\cdot) > 0$  от  $t > T$ , что справедливы оценки

$$\text{mes} M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta) > \mu \cdot \text{mes} B_{\delta}, \quad t > T, \quad 0 < \delta < \Delta(t).$$

**Теорема 6.** Для любой системы (1) и каждого индекса  $\varkappa$  мера  $\mu_{\bar{\varkappa}}(f)$  равна такому наибольшему числу из отрезка  $[0, 1]$ , что для каждого меньшего значения  $\mu$  и любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие число  $T > 0$  и функция  $\Delta(\cdot) > 0$  от  $t > T$ , что справедливы оценки

$$\text{mes} M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, t, \delta) > \mu \cdot \text{mes} B_{\delta}, \quad t > T, \quad 0 < \delta < \Delta(t).$$

**Теорема 7.** Для любой системы (1) справедливы соотношения

$$0 \leq \mu_{\theta}(f) \leq \mu_{\nu}(f) = \mu_{\rho}(f) \leq 1, \quad 1 \geq \mu_{\bar{\theta}}(f) \geq \mu_{\bar{\nu}}(f) = \mu_{\bar{\rho}}(f) \geq 0.$$

**Теорема 8.** При  $n = 2$  для любой линейной системы (1) справедлива ровно одна из следующих двух цепочек соотношений

$$\mu_{\theta}(f) = \mu_{\nu}(f) = \mu_{\rho}(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar{\theta}}(f) = \mu_{\bar{\nu}}(f) = \mu_{\bar{\rho}}(f), \quad (5)$$

$$\mu_{\theta}(f) = 0 < 1 = \mu_{\bar{\theta}}(f). \quad (6)$$

**Теорема 9.** При  $n = 2$  существует линейная автономная система (1), удовлетворяющая соотношениям (5).

**Теорема 10.** При  $n = 2$  для любого  $\mu \in [0, 1]$  существует линейная периодическая система (1), удовлетворяющая соотношениям (6) и

$$\mu_{\theta}(f) = 0 \leq \mu = \mu_{\nu}(f) = \mu_{\rho}(f), \quad \mu_{\bar{\theta}}(f) = 1 \geq 1 - \mu = \mu_{\bar{\nu}}(f) = \mu_{\bar{\rho}}(f).$$

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 075-03-2024-074/5).

### Литература

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
3. Сергеев И. Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. имени И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
4. Сергеев И. Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 895–904.
5. Сергеев И. Н. Исследование полных свойств колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы по первому приближению // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 4. С. 610–618.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЛЕКАРСТВ

А.В. Тузиков<sup>1</sup>, А.М. Андрианов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, 220012 Минск, Беларусь.  
tuzikov@newman.bas-net.by

<sup>2</sup>Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
alexande.andriano@yandex.ru

В докладе обсуждаются методы компьютерного моделирования и искусственного интеллекта, используемые для идентификации малых молекул, ингибирующих молекулярные мишени, с целью поиска кандидатов в лекарства против различных болезней. С помощью компьютерного моделирования в настоящее время возможно осуществлять скрининг библиотек химических соединений и оценивать важные характеристики молекул для обеспечения соответствия требованиям, предъявляемым к лекарствам. Глубокие нейронные сети позволяют генерировать новые соединения, эффективные для блокирования исследуемых молекулярных мишеней. Совместное применение компьютерного моделирования и технологий искусственного интеллекта позволяет значительно ускорить и удешевить процесс поиска кандидатов в лекарства, которые в дальнейшем должны пройти процесс биомедицинского тестирования и оптимизации для разработки новых эффективных лекарств.

## РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю.С. Харин<sup>1,2</sup>, В.А. Волошко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>НИИ прикладных проблем математики и информатики,

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
kharin@bsu.by

В любом цифровизированном обществе порождается множество дискретно-значных данных. Если эти дискретно-значные данные рассматриваются в динамике (зависимости от дискретного времени  $t \in \mathbb{Z}$ ), мы получаем дискретно-значный временной ряд  $x_t \in A$ , где  $A$  – некоторое дискретное множество, здесь предполагаемое в виде:  $A = \{0, \dots, N-1\}$ ,  $N = |A|$ ,  $2 \leq N < +\infty$ .

Теория вероятностного и статистического анализа временных рядов глубоко разработана лишь для так называемых “непрерывных” временных рядов, когда  $A$  – подмножество  $\mathbb{R}^m$  с ненулевой мерой Лебега, а для “дискретного” случая с дискретно-значными наблюдениями теория только начинает формироваться. При этом главная теоретическая проблема состоит в моделировании стохастической зависимости большой глубины в дискретных временных рядах (ДВР)  $\{x_t\}$ .

Универсальной моделью для описания стохастических зависимостей высокого порядка является предложенная Дж. Дубом однородная цепь Маркова (MC( $s$ )) достаточно большого порядка  $s \in \mathbb{N}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , определяемая порождающим уравнением для условного распределения вероятностей:

$$\mathbf{P}\{x_t = j_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = \mathbf{P}\{x_t = j_t | X_{t-s}^{t-1} = J_{t-s}^{t-1}\} = p_{J_{t-s}^{t-1}, j_t}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(\{x_\tau : \tau \leq t-1\})$  –  $\sigma$ -алгебра,  $X_{t-s}^{t-1} = (x_{t-s}, \dots, x_{t-1})' \in A^s$ ,  $J_{t-s}^{t-1} = (j_{t-s}, \dots, j_{t-1})' \in A^s$ .

Эта модель определяется матричным параметром –  $(s+1)$ -мерной матрицей переходных вероятностей  $P = (p_{J_1^{s+1}})$ ,  $J_1^{s+1} \in A^{s+1}$ . Число независимых параметров для MC( $s$ ):  $D_{MC(s)} = N^s(N-1) = \mathcal{O}(N^{s+1})$  увеличивается экспоненциально с ростом порядка  $s$ . Для преодоления “проклятия

размерности” мы предлагаем использовать малопараметрические (parsimonious) модели (PMC( $s$ )), для которых матрица  $P$  имеет следующий параметрический вид:

$$p_{J_1^{s+1}} =: p_\alpha(J_1^{s+1}), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)' \in \mathbb{R}^d,$$

где  $\alpha$  – векторный параметр некоторой малой размерности  $d = D_{\text{PMC}(s)} \ll D_{\text{MC}(s)}$ .

Мы предлагаем четыре основных подхода к построению малопараметрических цепей Маркова высокого порядка [1–3]:

- 1) сжатие множества возможных значений элементов матрицы  $P$ ;
- 2) использование параметрических семейств дискретных распределений вероятностей;
- 3) использование искусственных нейронных сетей для аппроксимации зависимости от предыстории;
- 4) подход на основе достаточных статистик и информационной геометрии.

На основе этих подходов удалось построить следующие новые малопараметрические вероятностные модели дискретных временных рядов:

- цепь Маркова порядка  $s$  с  $r$  частичными связями MC( $s, r$ );
- цепь Маркова условного порядка MCCO( $s, L$ ); двоичная условно нелинейная авторегрессионная модель BCNAR( $s$ );
- биномиальная условно нелинейная авторегрессионная модель BiCNAR( $s$ );
- семибиномиальная условно нелинейная авторегрессионная модель SBiCNAR( $s$ );
- Пуассоновская условно нелинейная авторегрессионная модель PCNAR( $s$ );
- нейросетевая модель;
- семейство малопараметрических моделей на основе экспоненциальных семейств вероятностных распределений и достаточных статистик.

Разработан FB-метод (от англ. Frequencies-Based) оценивания параметров построенных малопараметрических моделей на основе условных многомерных частот, позволяющий строить состоятельные статистические оценки и прогнозирующие статистики в явном виде.

Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность построенных статистических оценок при возрастании длины наблюдаемого дискретного временного ряда.

Построенные модели и методы допускают обобщение на многомерные дискретные временные ряды и дискретные случайные поля.

Представлены результаты применения разработанной теории в метеорологии, генетике и криптологии.

#### Литература

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. New York: Springer, 2013.
2. Kharin Yu. S., Petlitskii A. I. *A Markov chain of order  $s$  with  $r$  partial connections and statistical inference on its parameters* // Discrete Mathematics and Applications. 2007. Vol. 17, No 3. P. 295–317.
3. Kharin Yu., Voloshko V. *Robust estimation for Binomial conditionally nonlinear autoregressive time series based on multivariate conditional frequencies* // Journal of Multivariate Analysis. 2021. Vol. 185, No 2. P. 11–27.



## КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЖИДКОСТИ И СЛАБОСЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

**Четверушкин Б.Н.**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, РФ

В работе предлагается замкнутая модель для описания турбулентного течения в жидкости и слабосжимаемом газе. В качестве основы для построения уравнения, описывающего пульсационные моменты  $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ , используется кинетическое уравнение, которое ранее применялось для построения квазигазодинамической системы. Приводятся примеры моделирования двух пространственно двумерных задач — задачи о слое смешения и турбулентного течения в плоском канале.

### Литература

1. Четверушкин Б. Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: Макспресс, 2004. 328 с.
2. Четверушкин Б. Н., Луцкий А. Е., Шильников Е. В. *Описание турбулентных течений с помощью кинетической модели* // Доклады РАН, Математика. 2024. Т. 516, № 1. С. 51–58.

## RADIUS OF GOOD BEHAVIOR THEOREMS

**A. Kruger<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Optimization Research Group, Faculty of Mathematics and Statistics, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam, alexanderkruger@tdtu.edu.vn

The topic of *radius* of “good behaviour” quantifying the “distance” of a given well-posed problem to the set of ill-posed problems of the same kind was explicitly initiated by Dontchev et al. in [1,2]. The authors studied the “good behaviour” of generalised equations characterised by regularity properties of set-valued mappings and established in finite dimensions exact formulas for the radii for the three fundamental properties: *metric regularity*, *strong metric regularity* and *strong metric subregularity* with respect to calm, Lipschitz continuous and linear perturbations in terms of the modulus of the respective property. In infinite dimensions, they obtained certain lower estimates for the radii. They also showed that for the property of (not strong) *metric subregularity* the analogues of the mentioned formulas and estimates fail.

The radius of metric subregularity in finite dimensions was studied in [3], where new *primal-dual derivatives* of set-valued mappings and several *moduli of subregularity* were employed for characterising the radius with respect to the same as well as certain other classes of perturbations. The infinite dimensional case has been studied in [4,5]. More moduli of subregularity and more classes of perturbations have been considered. The radius theorems for metric regularity and strong metric subregularity from [2] have been improved.

In the talk, I am going to summarise the developments in [1–5].

### References

1. Dontchev A.L., Lewis A.S., Rockafellar R.T. *The radius of metric regularity* // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, No 2. P. 493–517.
2. Dontchev A.L., Rockafellar R.T. *Regularity and conditioning of solution mappings in variational analysis* // Set-Valued Anal. 2004. Vol. 12, No 1–2. P. 79–109.
3. Dontchev A.L., Gfrerer H., Kruger A. Y., Outrata J. V. *The radius of metric subregularity* // Set-Valued Variational Anal. 2020. Vol. 28, No 3. P. 451–473.
4. Gfrerer H., Kruger A. Y. *Radius theorems for subregularity in infinite dimensions* // Comput. Optim. Appl. 2023. Vol. 86, No 3. P. 1117–1158.
5. Gfrerer H., Kruger A. Y. *The radius of metric regularity revisited* // Set-Valued Variational Anal. 2023. Vol. 31, No 3. Art. 20.

**STRANGE NON-LOCAL OPERATOR HOMOGENIZING THE POISSON EQUATION WITH DYNAMICAL UNILATERAL BOUNDARY CONDITIONS IN CRITICAL CASE****T.A. Shaposhnikova**<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991,  
shaposh.tan@mail.ru

We study the homogenization of a nonlinear problem given by the Poisson equation, in a domain with arbitrarily shaped perforations (or particles) and with a dynamic unilateral boundary condition (of Signorini type), with a large coefficient, on the boundary of these perforations (or particles). The problem arises, for instance, in the study of chemical reactions of zero order. The consideration of a possible asymmetry in the perforations (or particles) is fundamental in order to consider some applications in nanotechnology where symmetry conditions are too restrictive. As a matter of fact, it is important also the consideration of perforations (or particles) constituted by small different parts and then with several connected components. We are specially concerned with the so called critical case in which the relation between the coefficient in the boundary condition, the period of the basic structure, and the size of the holes (or particles) leads to the appearance of an unexpected new term in the effective homogenized equation. Due to the dynamic nature of the boundary condition this “strange term” becomes now a non-local in time and non-linear operator. We prove the convergence theorem and find several properties of the “strange operator” showing that there is a kind of regularization through the homogenization process.

## **ТЕЗИСЫ СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ**

# СЕКЦИЯ «ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ»

## ОЦЕНКИ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В.Г. Кротов<sup>1</sup>, А.Д. Стриленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {krotov, Strilenko}@bsu.by

Пусть  $(X, d, \mu)$  – множество с квазиметрикой  $d$  (неравенство треугольника в определении метрики заменено условием

$$\exists a_d \geq 1 \quad \forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq a_d[d(x, y) + d(y, z)]$$

и  $\sigma$ -конечной борелевской мерой  $\mu$ . Квазиметрика порождает шары

$$B = B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, t > 0.$$

Рассмотрим произведение

$$\mathbf{X} := X \times I, \quad \text{где } I = (0, 2t_0), 0 < t_0 < +\infty,$$

с мерой-произведением  $\mu \times \lambda$  ( $\lambda$  – мера Лебега на  $I$ ), см. [1, § 3.3] и «некасательные» области подхода к точкам  $x \in X$  «границы» множества  $\mathbf{X}$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\}, x \in X.$$

Максимальной функцией для функции  $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  называется

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in \mathbf{X}.$$

Пусть  $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$  – множество всех измеримых функций  $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  (эквивалентные функции не отождествляются), для которых  $\mathcal{N}u$  почти всюду конечна, а  $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$  – множество функций  $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ , для которых

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})} := \left( \int_{\mathbf{X}} [\mathcal{N}u]^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

В случае  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $I = (0, \infty)$  класс  $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ ,  $p > 0$ , является расширением тент-пространства Койфмана–Мейера–Стейна  $T_{\infty}^p$  [2], для элементов которого дополнительно предполагались непрерывность на  $\mathbf{X}$  и существование предела вдоль  $D(x)$  для почти всех  $x$ . В случае произвольного метрического пространства  $X$  подклассы классов  $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ , состоящие из непрерывных функций, изучались в [3].

Будем дополнительно предполагать, что мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения с показателем  $n > 0$ , т.е. для некоторого  $a_{\mu} > 0$

$$\mu(B(x, t)) \leq a_{\mu} t^n s^{-n} \mu(B(x, s)), \quad 0 < s < t < t_0, x \in X. \quad (1)$$

Наши результаты дают оценки для операторов дробного интегрирования порядка  $\alpha > 0$

$$K_{\alpha}u(x, t + s) := \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} u(x, t + s) ds, \quad (x, t) \in \mathbf{X}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $X$  удовлетворяет условию удвоения (1),  $p > 0$ ,  $0 < \alpha < n/p$ . Тогда для любой функции  $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$  справедливо неравенство

$$\|K_{\alpha}u\|_{\mathcal{H}^q(\mathbf{X})} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})}, \quad 1/q = 1/p - \alpha/n.$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $u$ .

Теорема 1 подобна лемме 3.2 из [3] и доказывается примерно также.

Более тонкий результат справедлив в предельном случае  $\alpha p = n$  – можно получить экспоненциальную интегрируемость для  $K_\alpha u$ , но только локально.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  удовлетворяет условию удвоения (1),  $p > 0$ ,  $0 < \alpha = n/p$ . Тогда для любой функции  $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$  и любого шара  $B = B(x, t_0)$  справедливо неравенство

$$\int_B \exp \left\{ cN(K_\alpha u) \left( \int_{2a_\mu B} [Nu]^p d\mu \right)^{-1/p} \right\} d\mu \leq C$$

где постоянные  $c$  и  $C$  не зависят от  $u$  и  $x \in X$ .

**Литература**

1. Богачев В. И. *Основы теории меры* // М. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. Т. 1.
2. Coifman R., Meyer Y., Stein E. *Some new function spaces and their applications in harmonic analysis* // Journal of Functional Analysis, 1985. Vol. 62, No 2. P. 304–335.
3. Кротов В. Г. *О граничном поведении функций из пространств типа Харди* // Известия АН СССР, сер. матем., 1990. Т. 54, № 5. С. 957–974.

**АТОМИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ  $\mathcal{H}^1(\mathbf{X})$**

**М.М. Логиновская**

Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, LoginovskayaMM@bsu.by

Пусть  $(X, d, \mu)$  – множество с квазиметрикой  $d$  (неравенство треугольника в определении метрики заменено условием

$$\exists K_d \geq 1 \quad \forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq K_d[d(x, y) + d(y, z)]$$

и  $\sigma$ -конечной борелевской мерой  $\mu$ . Квазиметрика порождает шары

$$B = B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, t > 0.$$

Рассмотрим произведение

$$\mathbf{X} := X \times I, \text{ где } I = (0, t_0), 0 < t_0 \leq +\infty,$$

с мерой-произведением  $\mu \times \lambda$  ( $\lambda$  – мера Лебега на  $I$ ), см. [1, § 3.3] и «некасательные» области подхода к точкам  $x \in X$  «границы» множества  $\mathbf{X}$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\}, x \in X.$$

Максимальной функцией для функции  $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  называется

$$Nu(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X.$$

Пусть  $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$  – множество всех измеримых функций  $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  (эквивалентные функции не отождествляются), для которых  $Nu$  почти всюду конечна, а  $\mathcal{H}^1(\mathbf{X})$  – множество функций  $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ , для которых

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{X})} := \int_{\mathbf{X}} Nu d\mu < \infty.$$

В случае  $X = \mathbb{R}^n, n \geq 1, I = (0, \infty)$  класс  $\mathcal{H}^1(\mathbf{X})$  является расширением тент-пространства Койфмана–Мейера–Стейна  $T_\infty^1$  [2], для элементов которого дополнительно предполагались непрерывность на  $\mathbf{X}$  и существование предела вдоль  $D(x)$  для почти всех  $x$ . В случае произвольного метрического пространства  $X$  подклассы классов  $\mathcal{H}^1(\mathbf{X})$ , состоящие из непрерывных функций, изучались в [3].

Атомом будем называть любую измеримую ограниченную функцию  $a : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой существует такой открытый шар  $B \subset X$ , что  $\text{supp } a \subset \widehat{B}$  и  $|a(y, t)| \leq [\mu(B)]^{-1}$ , где  $\widehat{B}$  определяется равенством

$$\widehat{B} := \left( \bigcup_{x \notin B} D(x) \right)^c.$$

В нашем основном результате будет использовано следующее понятие: говорят, что квазиметрическое пространство  $X$  удовлетворяет условию удвоения, если существует такое число  $C > 0$ , что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)), \quad x \in X, r > 0.$$

**Теорема.** Пусть  $X$  удовлетворяет условию удвоения. Тогда любая функция  $u \in \mathcal{H}^1(X)$  допускает разложение вида

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k,$$

где  $a_k$  – атомы, а числа  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^1(X)}$$

(постоянная  $C$  не зависит от  $u$ ).

Эта теорема является естественным обобщением предложения 2 из [2]. Утверждения такого рода полезны при доказательствах свойства ограниченности операторов – они сводят задачу к рассмотрению оператора только на атомах.

#### Литература

1. Богачев В. И. *Основы теории меры* // М. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. Т. 1.
2. Coifman R., Meyer Y., Stein E. *Some new function spaces and their applications in harmonic analysis* // Journal of Functional Analysis, 1985. Vol. 62, No 2. P. 304–335.
3. Кротов В. Г. *О граничном поведении функций из пространств типа Харди* // Известия АН СССР, сер. матем., 1990. Т. 54, № 5. С. 957–974.

### РАВНОМЕРНАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЧЕТНОГО И ЧЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОШИ

Т.С. Мардвилко

Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, mardvilko@gmail.com

Пусть  $\mu$  — положительная борелевская мера с компактным носителем  $\text{supp } \mu \subset \mathbb{R}$ . Будет считать, что  $\mu$  абсолютно непрерывна на  $[0, 1]$ ,  $\mu(0) = 0$ , возрастает и

$$0 < \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{t} < \infty.$$

Рассмотрим нечетное и четное продолжение функции  $\mu$  на  $[-1, 1]$  соответственно

$$\mu^-(t) = \mu(|t|) \text{sign } t, \quad \mu^+(t) = \mu(|t|).$$

Для  $x \in [-1, 1]$  рассмотрим нечетную функцию

$$f^-(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu^-(t)}{x-it} = x \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{t^2+x^2}.$$

и четную функцию

$$g^+(x) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 \frac{d\mu^+(t)}{x-it} = \int_0^1 \frac{t d\mu(t)}{t^2+x^2}$$

Обозначим через  $C[a, b]$  пространство непрерывных действительных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ . Для  $f \in C[a, b]$  введем наилучшее равномерное рациональное приближение посредством рациональных функций  $r$  степени не выше  $n$ :

$$R_n(f; [a, b]) = \inf_r \|f - r\|_{C[a, b]}.$$

**Теорема 1 [1].** Пусть  $\alpha > 0$ , мера  $\mu$  абсолютно непрерывна на  $[0, 1]$  и удовлетворяет условию

$$\mu'(t) \asymp t^\alpha, \quad t \in (0, 1).$$

Тогда для функций  $f^-$  и  $g^+$  и всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливы соотношения:

$$R_n(f^-; [-1, 1]) \asymp e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad R_n(g^+; [-1, 1]) \asymp e^{-\pi\sqrt{\alpha n}},$$

где положительные величины, скрытые символом  $\asymp$ , зависят лишь от  $\mu$ .

Для доказательства теоремы 1 мы модифицировали метод из [2], в основе которого лежит идея применения многоточечных аппроксимаций Паде, предложенная А.А. Гончаром [3].

Через введенные выше нечетное  $f^-$  и четное  $g^+$  преобразования Коши можно выражать различные функции и тем самым, используя теорему 1, получать оценки наилучших равномерных рациональных приближений этих функций. Так, пользуясь найденной асимптотикой для  $f^-$ , в теореме 2 получена слабая асимптотика наилучших равномерных приближений функции  $|x|^\alpha \text{sign} x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Теорема 2 [1].** Пусть  $\alpha \in (0, +\infty)$  и не является нечетным натуральным числом. Тогда справедлива слабая асимптотика

$$R_n(|x|^\alpha \text{sign} x; [-1, 1]) \asymp e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где положительные величины, скрытые символом  $\asymp$ , зависят лишь от  $\alpha$ .

Ранее нижняя оценка из теоремы 2 и верхняя оценка для  $\alpha \in \mathbb{Q}$  были получены Н.С. Вячеславовым [4].

Изучению наилучших рациональных приближений степенной функции  $x^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$ , и ее четного продолжения  $|x|^\alpha$ ,  $x \in [-1, 1]$ , посвящены работы Д.Ньюмена, А.А. Гончара, А.П. Буланова, Н.С. Вячеслава, Г. Штала и других авторов. Наиболее сильные результаты получены Г. Шталем [5, 6]. Именно, он доказал, что при  $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$  справедлива сильная асимптотика

$$R_n(x^\alpha; [0, 1]) \sim 2^{2\alpha+2} |\sin \pi \alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

а при  $\alpha \in (0, +\infty) \setminus 2\mathbb{N}$  для  $|x|^\alpha$ ,  $x \in [-1, 1]$ , — четного продолжения  $x^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$ , имеет место сильная асимптотика

$$R_n(|x|^\alpha; [-1, 1]) \sim 2^{\alpha+2} \left| \sin \frac{\pi \alpha}{2} \right| e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

Из теоремы 2 и результата Г. Штала следует, что наилучшие рациональные приближения четного и нечетного продолжений степенной функции  $x^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$  для  $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$  имеют одинаковую слабую асимптотику.

Отметим, что асимптотики наилучших рациональных приближений четных и нечетных продолжений некоторых других функций можно найти в работах [7] и [8]. Вопросы о связи между наилучшими рациональными и полиномиальными приближениями  $f \in C[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ , и ее четным и нечетным продолжениями на  $[-1, 1]$  рассмотрены в [8] и [9] соответственно.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» (№ГР 20211888).

### Литература

1. Мардвилко Т. С. *Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши* // Матем. сб. (в печати).
2. Пекарский А. А. *Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова* // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 2. С. 121–132.
3. Гончар А. А. *О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций* // Матем. сб. 1978. Т. 105(147), № 2. С. 147–163.
4. Вячеславов Н. С. *Рациональные аппроксимации в весовых пространствах на прямой* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 5. С. 3–10.
5. Stahl H. *Best uniform rational approximation of  $x^\alpha$  на  $[0, 1]$*  // Acta Math. 2003. Т. 190, № 2. P. 241–306.
6. Lorenz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

7. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. *Применение действительного пространства Харди–Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 16–36.

8. Мардвилко Т. С. *Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций* // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 5. С. 261–269.

9. Мардвилко Т. С. *Соотношения между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями функций и их четными и нечетными продолжениями* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 229. С. 47–52.

## ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ НЕКОТОРЫМИ МЕТОДАМИ, ОСНОВАННЫМИ НА РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА

П.Г. Поцейко<sup>1</sup>, Е.А. Ровба<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023, Гродно, Беларусь,  
pahamatby@gmail.com rovba.ea@gmail.com

Интеграл Римана–Лиувилля [1] нашел широкое применение в различных областях науки и техники. Ряд задач механики жидкости, химии, физики и других научных направлений описываются моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления [2; 3]. В теории рациональной аппроксимации с помощью интегралов Римана–Лиувилля были найдены новые классы непрерывных функций, скорость равномерной рациональной аппроксимации на которых является выше соответствующих полиномиальных аналогов [4–6].

Как правило, вычисление точного значения интегралов Римана–Лиувилля, т.е. в замкнутой форме, удается достичь лишь в очень редких частных случаях. Поэтому актуальной задачей является разработка методов полиномиальных приближений [7; 8]. Среди применяемых методов аппроксимации интегралов Римана–Лиувилля классические ряды Фурье используются эпизодически.

Представляет интерес исследование приближений интегралов Римана–Лиувилля на отрезке  $[-1, 1]$  методами, основанными на полиномиальных рядах Фурье–Чебышёва и соответствующих им рациональных аналогов.

В работе изучаются оба вышеназванных направления. При этом аппроксимационным аппаратом в рациональном случае являются введенные в 1979 году Е. А. Ровбой [9] интегральные операторы, ассоциированные с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, и являющиеся обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва. Отдельной задачей изучаются приближения индивидуальных интегралов Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность. Тут вместе с полиномиальным случаем изучается рациональная аппроксимация с полюсами, представляющими собой в некотором смысле модификации «ньюменовских» параметров. Установлены их оптимальные значения, при которых скорость равномерных рациональных приближений является наибольшей.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», №20162269.

### Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Бабенко Ю. И. *Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории теплообмена*. СПб.: НПО «Профессионал», 2009.
3. Зенюк Д. А., Орлов Ю. Н. *О применении дробного исчисления Римана–Лиувилля для описания распределений вероятностей*. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. № 18. 2014.
4. Старовойтов А. П. *Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций* // Матем. зам. 1988. Т. 44, № 4. С. 528–535.
5. Ровба Е. А. *Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля, рациональными операторами* // ДАН Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 18–22.
6. Старовойтов А. П. *Рациональные приближения дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля* // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 428–441.
7. Тюленева А. А. *Приближение интегралов Римана–Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке* // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Матем. Мех. Инф. 2014. Т. 14, № 3. С. 305–311.
8. Khitri-Kazi-Tani L., Dib, H. *On the approximation of Riemann–Liouville integral by fractional nabla h-sum and applications* // Mediterr. J. Math. 2017. Vol. 14, No 86.



9. Ровба Е. А. *Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

**ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ  
К СПЕКТРАЛЬНЫМ ОЦЕНКАМ  
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**

**В. А. Пчелинцев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Томский государственный университет, Ленина 36, 634050 Томск, Россия,  
va-pchelintsev@yandex.ru

Данная работа посвящена конформным спектральным оценкам задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченных плоских областях при подходящих геометрических ограничениях. Мы называем такие области, как конформные регулярные области [1]. Этот класс областей включает выпуклые и звездные области, а также некоторые области с фрактальными границами, для которых размерность Хаусдорфа может быть любым числом из промежутка [1, 2).

Метод исследования базируется на взаимосвязи между теорией конформных отображений и теорией операторов суперпозиции в пространствах Соболева. На этом пути доказана [2]:

**Теорема.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – конформная  $\infty$ -регулярная область. Тогда для первого собственного значения Дирихле справедлива следующая нижняя оценка

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\lambda_1(\Omega')}{\|\varphi'\|_{L_\infty(\Omega')}^2},$$

где  $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  – конформное отображение области  $\Omega'$  на область  $\Omega$ .

Исследования поддержаны РНФ (грант № 23-21-00080).

**Литература**

1. Burenkov V. I., Gol'dshtein V., Ukhlov A. *Conformal spectral stability for the Dirichlet–Laplacian* // Math. Nachr. 2015. Vol. 288, No 16. P. 1822–1833.
2. Kolesnikov I. A., Pchelintsev V. A. *Spectral estimates of the Dirichlet–Laplace operator in conformal regular domains* // Math. Sci. 2024. Vol. 281, No 5. P. 677–691.

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ  
АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ-ЯКОБИ**

**Н.В. Рябченко<sup>1</sup>, А.П. Старовойтов<sup>1</sup>, Т.М. Оснач<sup>1</sup>,**

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, ул Советская 102, 246003 Гомель, Беларусь,  
nmankevich@tut.by, {svoitov,osnach}@gsu.by

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \tag{1}$$

с действительными коэффициентами, сходящийся при всех  $x \in \mathbb{R}$  и определяющий функцию  $f^t$ .

Тригонометрическому ряду (1) поставим в соответствие степенной ряд

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l,$$

в котором  $f_0 = a_0/2$ ,  $f_l = a_l - ib_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ .

Аппроксимацией Паде–Якоби типа  $(n, m)$  ряда  $f$  назовём (см. [1]) рациональную дробь  $\widehat{\pi}_{n,m}(z) = \widehat{\pi}_{n,m}(z; f) = \widehat{P}_{n,m}(z)/\widehat{Q}_{n,m}(z)$ , у которой алгебраические многочлены Паде–Якоби  $\widehat{Q}_{n,m}$ ,  $\widehat{P}_{n,m}$  имеют степени соответственно не выше  $m$  и  $n$  и для которой

$$f(z) - \widehat{\pi}_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}).$$

Тригонометрической аппроксимацией Паде–Якоби типа  $(n, m)$  ряда  $f^t$  будем называть рациональную функцию

$$\widehat{\pi}_{n,m}^t(x) = \widehat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \frac{\widehat{P}_{n,m}^t(x)}{\widehat{Q}_{n,m}^t(x)},$$

при всех  $x \in \mathbb{R}$  представимую тригонометрическим рядом, у которой тригонометрические многочлены в числителе и знаменателе имеют степени  $\deg \widehat{Q}_{n,m}^t \leq m$ ,  $\deg \widehat{P}_{n,m}^t \leq n$  и для которой

$$f^t(x) - \widehat{\pi}_{n,m}^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l \cos lx + \tilde{b}_l \sin lx).$$

Алгебраические  $\widehat{\pi}_{n,m}$  и тригонометрические аппроксимации Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}^t$  не всегда существуют. В [2] описаны условия, при которых  $\widehat{\pi}_{n,m}$  существуют. Нас интересуют условия при которых существуют тригонометрические аппроксимации Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}^t$ .

Сформулируем основной результат и два следствия из этого результата.

**Теорема 1.** При  $n \geq t$  для существования тригонометрической аппроксимации Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$  функции  $f^t$ , представленной рядом (1), достаточно, чтобы для соответствующей аналитической функции  $f$ , представленной рядом (2), выполнялись следующие три условия:

- 1) для пары  $(n, m)$  существует алгебраическая аппроксимация Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ ;
- 2) ряд (2) имеет радиус сходимости  $R > 1$ ;
- 3) рациональная функция  $\widehat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$  в круге  $\overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$  не имеет полюсов.

Предположим теперь, что ряд (1) имеет вид

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx. \quad (2)$$

Тогда ряду (2) соответствует степенной ряд

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^l \quad (3)$$

с действительными коэффициентами.

**Следствие 1.** Пусть  $n \geq t$ , а функция  $f^t$  представлена тригонометрическим рядом (2). Тогда при выполнении для степенного ряда (3) условий теоремы 1 существует тригонометрическая аппроксимация Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$ , числитель  $\widehat{P}_{n,m}^t$  и знаменатель  $\widehat{Q}_{n,m}^t$  которой являются чётными тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами, и справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{n,m}^t(x; f^t) &= Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)}, \\ \widehat{P}_{n,m}^t(x; f^t) &= \operatorname{Re} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\}, \\ f^t(x) - \widehat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) &= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \cos lx, \end{aligned}$$

где многочлены  $Q_{n,m}(\cdot; f)$ ,  $P_{n,m}(\cdot; f)$  являются алгебраическими многочленами Паде–Якоби для ряда (3).

Предположим теперь, что тригонометрический ряд (1) имеет вид

$$f^t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin lx. \quad (4)$$

Тогда ему соответствует степенной ряд

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^l. \quad (5)$$

**Следствие 2.** Пусть  $n \geq t$ , а функция  $f^t$  представлена тригонометрическим рядом (4). Тогда при выполнении для степенного ряда (5) условий теоремы 1 существуют тригонометрические аппроксимации Паде–Якоби  $\widehat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$ , числитель  $\widehat{P}_{n,m}^t$  и знаменатель  $\widehat{Q}_{n,m}^t$  которых являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами, числитель  $\widehat{P}_{n,m}^t$  является нечётным тригонометрическим многочленом, и справедливы равенства

$$\widehat{Q}_{n,m}^t(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)},$$

$$\widehat{P}_{n,m}(x; f^t) = \operatorname{Im} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\},$$

$$f^t(x) - \widehat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} h_l \sin lx.$$

где многочлены  $Q_{n,m}(\cdot; f)$ ,  $P_{n,m}(\cdot; f)$  являются алгебраическими многочленами Паде-Якоби для ряда (5).

Заметим также, что в [3] описан явный вид алгебраических многочленов Паде-Якоби  $Q_{n,m}(\cdot; f)$ ,  $P_{n,m}(\cdot; f)$  при условии их существования, а в [4] найдены достаточные условия их существования. Следствия 1 и 2 позволяют получить достаточные условия существования нелинейных аппроксимаций Паде-Чебышева, не опираясь на свойства преобразований Фабера [5].

### Литература

1. Jacobi C. "Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function // J. Reine Angew. Math. 1846. Vol. 30. P. 127–156.
2. Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения* М.: Мир, 1986.
3. Старовойтов А. П., Рябченко Н.В. *О детерминантных представлениях многочленов Эрмита-Паде* // Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83, № 1. С. 17–35.
4. Старовойтов, А. П., Кечко Е. П., Оснач Т. М. *О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва* // Журнал Белорусского государственного университета. Матем. Информ. 2023. № 2. С. 6–17.
5. Суетин, С. П. *О существовании нелинейных аппроксимаций Паде-Чебышёва для аналитических функций* // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 290–303.

## АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ЛОРАНА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов<sup>1</sup>, И.В. Кругликов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Кирова 119, 246019 Гомель, Беларусь  
svoitov@gsu.by, igor.v.kruglikov@gmail.com

Множество всех упорядоченных наборов из  $k$  целых неотрицательных чисел будем обозначать через  $\mathbb{Z}_+^k$ . Порядком набора  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$  будем называть число  $m := m_1 + m_2 + \dots + m_k$ .  
Функцию вида

$$Q(z) = \frac{a_{-m}}{z^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m,$$

где  $a_{-m}, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ , будем называть обобщённым многочленом (многочленом Лорана). Число  $m$  будем называть степенью обобщённого многочлена  $Q(z)$ , если  $|a_{-m}| + |a_m| \neq 0$ . Множество всех обобщённых многочленов степени не выше  $m$  будем обозначать через  $L_m$ .

Рассмотрим следующий аналог задачи Эрмита-Паде (см. [1]) для рядов Лорана:

**Задача Э-Л.** Для системы  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  функций комплексного переменного, каждая из которых задана рядом Лорана

$$f_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l^j z^l, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

набора  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$  и числа  $n \in \mathbb{Z}_+$  найти такой тождественно не равный нулю обобщённый многочлен  $Q(z) = Q_{n, \vec{m}}(z) \in L_m$  и такие обобщённые многочлены  $P_j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z) \in L_{m_j}$ ,  $n_j = n + m - m_j$ , чтобы

$$Q_{n, \vec{m}}(z) f_j(z) - P_{n, \vec{m}}^j(z) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (c_l^j z^l + c_{-l}^j z^{-l}), \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (1)$$

Обобщённые многочлены  $Q(z), P_1(z), \dots, P_k(z)$  условиями (1) определяются не однозначно: если пара  $(Q, P)$ , где  $P := (P_1, \dots, P_k)$ , удовлетворяет условиям (1), то для любого комплексного

числа  $\lambda \neq 0$  новая пара  $(\lambda Q, \lambda P)$ , где  $\lambda P := (\lambda P_1, \dots, \lambda P_k)$ , также им удовлетворяет. Неединственность может быть и более существенной. Приведём подтверждающий пример.

**Пример 1.** Пусть  $k = 1, n = 2, m = 1$ , а

$$f_1(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l^1 z^l,$$

где

$$f_l^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } l \in \{-1, 0, 1\}; \\ 1, & \text{если } l \leq -3 \text{ или } l \in \{2, 3\}; \\ 2, & \text{если } l \in \{-2, 4\}; \\ 2^{-l}, & \text{если } l \geq 5. \end{cases}$$

Тогда  $Q_{n, \vec{m}}(z) = az^{-1} + b - (2a + b)z$ ,  $P_{n, \vec{m}}^1(z) = (b - 2a)z^{-2} - 2(2a + b)z^{-1} + az + (a + b)z^2$ , где  $a, b$  — любые комплексные числа, одновременно неравные нулю.

**Определение 1.** Будем говорить, что задача Э-Л имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т.е. для любых двух решений  $(\bar{Q}, \bar{P})$  и  $(\tilde{Q}, \tilde{P})$  задачи Э-Л найдётся такое комплексное число  $\lambda$ , что  $(\tilde{Q}, \tilde{P}) = (\lambda \bar{Q}, \lambda \bar{P})$ .

**Определение 2.** Пусть пара  $(Q, P)$ , где  $P := (P_1, \dots, P_k)$ , является решением задачи Э-Л. Тогда обобщённые многочлены  $Q(z), P_1(z), \dots, P_k(z)$  и рациональные дроби

$$\pi_j(z) = \pi_{n, \vec{m}}^j(z) = \frac{P_j(z)}{Q(z)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

будем называть соответственно *многочленами Эрмита-Лорана* и *аппроксимациями Эрмита-Лорана* для набора  $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$  и системы  $\mathbf{f}$ .

Отметим одно важное отличие аппроксимаций Паде и аппроксимаций Эрмита-Лорана. Как известно [1], для любой пары индексов  $(n, m)$ , где  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ , аппроксимации Паде определяются однозначно. Аппроксимации Эрмита-Лорана этим свойством не обладают. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 1. Обозначим через  $\bar{\pi}(z)$  аппроксимацию Эрмита-Лорана из примера 1, которая соответствует параметрам  $a = 1, b = 0$ , а через  $\tilde{\pi}(z)$  — аппроксимацию Эрмита-Лорана, которая соответствует параметрам  $a = 0, b = 1$ . Тогда получим

$$\bar{\pi}(-2) = 1 \neq \frac{7}{4} = \tilde{\pi}(-2).$$

Введём в рассмотрение следующие матрицы и определители ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ):

$$F_l^j = \begin{pmatrix} f_{l+m}^j & f_{l+m-1}^j & \dots & f_{l+1}^j & f_l^j & f_{l-1}^j & \dots & f_{l-m+1}^j & f_{l-m}^j \end{pmatrix},$$

$$F_+^j = \begin{pmatrix} F_{n+m}^j & F_{n+m-1}^j & \dots & F_{n_j+1}^j \end{pmatrix}^T, \quad F_-^j = \begin{pmatrix} F_{-n_j-1}^j & F_{-n_j-2}^j & \dots & F_{-n-m}^j \end{pmatrix}^T,$$

$$E_m(z) = \begin{pmatrix} z^{-m} & \dots & z^{-1} & 1 & z & \dots & z^m \end{pmatrix},$$

$$H_{n, \vec{m}} = \begin{pmatrix} F_+^k \\ \dots \\ F_+^1 \\ F_-^1 \\ \dots \\ F_-^k \end{pmatrix}, \quad D(n, \vec{m}; z) = \det \begin{pmatrix} F_+^k \\ \dots \\ F_+^1 \\ E_m(z) \\ F_-^1 \\ \dots \\ F_-^k \end{pmatrix},$$

$d_l^j(n, \vec{m})$  — определитель, полученный из  $D(n, \vec{m}; z)$  путём замены в нём  $(m + 1)$ -й строки на строку  $F_l^j$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Для того, чтобы для системы  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ , набора  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$  и числа  $n \in \mathbb{Z}^+$  задача Э-Л имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $H_{n, \vec{m}}$  была матрицей полного ранга, т.е. чтобы  $\text{rank} H_{n, \vec{m}} = 2m$ .

Если  $\text{rank} H_{n, \vec{m}} = 2m$ , то при определённом выборе нормирующего множителя ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ )

$$Q_{n, \vec{m}}(z) = D(n, \vec{m}; z),$$

$$P_{n, \vec{m}}^j(z) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) z^p,$$

$$Q_{n, \vec{m}}(z) f_j(z) - P_{n, \vec{m}}^j(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \vec{m}) z^p + d_{-p}^j(n, \vec{m}) z^{-p}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2021-2025 годы.

### Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. М.: Наука, 1988.

## ПРОИЗВОДНЫЕ РЕЗУЛЬТАНТОВ И ОБЩИЕ КРАТНЫЕ КОРНИ ПАР ПОЛИНОМОВ

**М.М. Чернявский**

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,  
Московский 33, 2100038 Витебск, Беларусь  
misha360ff@mail.ru

Известным математическим инструментом для определения наличия общих корней у пар полиномов являются результаты. При этом, в современной математической литературе имеется крайне мало информации о способах точного вычисления общего корня двух полиномов через их коэффициенты. Случай, когда общий корень имеет кратность больше, чем единица, вообще не упоминается. Таким образом, объектом исследования в настоящей работе являются пары двух алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами, имеющие общий кратный корень.

**Предварительные сведения.** Пусть  $f(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$  ( $a_0 \neq 0$ ) и  $g(z) := \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}$  ( $b_0 \neq 0$ ) – два многочлена, имеющие корни  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\beta_j\}_{j=1}^m$  соответственно. Напомним, что *результантом* многочленов  $f$  и  $g$ , называется произведение [1, §54]

$$R(f, g) := a_0^m b_0^n \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \tag{1}$$

Если многочлены  $f$  и  $g$  имеют хотя бы один общий корень, то значение результата, составленного из них, равно нулю.

Так как  $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ ,  $g(z) = b_0 \prod_{j=1}^m (z - \beta_j)$ , то их результат  $R(f, g)$  можно представить в виде  $R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \dots g(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_m)$ .



Если  $s = n$ , т. е.  $f(z) = a_0(z-w)^n$ , то для  $r < n$  выполняется равенство (3) и

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n} \dots \partial b_{j_1}} = a_0^n n! w^{nm - (j_n + \dots + j_1)} \quad (j_k = 0, 1, \dots, m).$$

Ниже представлена связь между общим кратным корнем двух полиномов и отношением частных производных от результата, составленного из данных полиномов.

**Теорема 2.** Пусть  $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$  ( $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ ), и  $g(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}$  ( $b_0 \neq 0, b_m \neq 0$ ). Если многочлены  $f$  и  $g$  имеют ровно один общий корень  $w$  кратности  $s$  для  $f$  и кратности  $p$  для  $g$ , то тогда  $w$  удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \dots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R}{\partial b_{k_s} \dots \partial b_{k_1}} = w^{(k_s + \dots + k_1) - (j_s + \dots + j_1)} \quad (j_r, k_r = 0, 1, \dots, m).$$

и

$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p} \dots \partial a_{i_1}} : \frac{\partial^p R}{\partial a_{l_p} \dots \partial a_{l_1}} = w^{(l_p + \dots + l_1) - (i_p + \dots + i_1)} \quad (i_r, l_r = 0, 1, \dots, n).$$

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (рег. № 20231184).

### Литература

1. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. СПб.: Лань, 2013.
2. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Boston: Birkhauser, 1994.

## О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, В КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОГО ВХОДЯТ МНОГОЧЛЕНЫ

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, a.p.shilin@gmail.com

Продолжено исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^n \left[ (a(t)p_k(t) + b(t)q_k(t)) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i} (a(t)p_k(t) - b(t)q_k(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right] = f(t), \quad t \in L. \quad (1)$$

Здесь  $L$  – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. На кривой  $L$  непрерывные по Гельдеру функции  $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, p_k(t), q_k(t), f(t)$  заданы, а непрерывная по Гельдеру вместе со своими производными до порядка  $n$  функция  $\varphi(t)$  является искомой. Все функции комплекснозначны,  $n \in \mathbb{N}$ , интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. Общая схема исследования уравнения (1) указана в [1]. Эта схема содержит возможность подбирать функции  $p_k(t), q_k(t)$ , для которых исследование уравнения (1) носит законченный конструктивный характер. Укажем два новых таких случая.

1.  $p_k(t) = (A_k - (\mu_1 + \mu_2)A_{k+1} + \mu_1\mu_2A_{k+2})t^2 + ((\mu_1 + \mu_2)A_{k+2} - 2A_{k+1})t + 2A_{k+2}$ ,  $q_k(t) = (B_k - (\sigma_1 + \sigma_2)B_{k+1} + \sigma_1\sigma_2B_{k+2})t^2 + ((\sigma_1 + \sigma_2)B_{k+2} - 2B_{k+1})t + 2B_{k+2}$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $n \geq 3$ , где  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, A_k, B_k$  – заданные комплексные числа, подчиненные некоторым несложным ограничениям.

2.  $p_k(t) = (A_k - \alpha A_{k+1})P(t) - A_{k+1}P'(t)$ ,  $q_k(t) = (B_k - \beta B_{k+1})Q(t) - B_{k+1}Q'(t)$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $n \geq 2$ , где  $P(t), Q(t)$  – произвольные заданные многочлены, а  $\alpha, \beta, A_k, B_k$  – заданные комплексные числа, подчиненные незначительным ограничениям.

В этих случаях явно указаны условия разрешимости уравнения (1). При их выполнении дано точное аналитическое решение уравнения. Приведены примеры. Часть результатов подробно опубликована в [2].

## Литература

1. Шилин А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах // Журнал БГУ. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56.

2. Shilin A. P. *Hypersingular Integro-Differential Equation Containing Polynomials and Their Derivatives in Coefficients* // Mathematics. 2023. Vol. 11(24). Art. 4940.

ESTIMATES OF  $A(z)$ -HARMONIC AND  $A(z)$ -ANALYTICAL FUNCTIONS

В.Е. Husenov<sup>1</sup>, М.К. Hamidova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bukhara State University, Muhammad Iqbal str. 11, Bukhara, 200118,  
husenovbehzod@mail.ru, muattar8265@icloud.com

**Introduction.** Let  $A(z)$  be an antianalytic function, i.e.  $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$  in the convex domain  $D \subset \mathbb{C}$ ; moreover, let  $|A(z)| \leq c < 1$  for all  $z \in D$ , where  $c = \text{const}$ . The function  $f(z)$  is said to be  $A(z)$ -analytic in the domain  $D$  if for any  $z \in D$ , the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1)$$

We denote by  $O_A(D)$  the class of all  $A(z)$ -analytic functions defined in the domain  $D$ .

According to, the function  $\psi(a, z) = z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau$  is an  $A(z)$ -analytic function. The following set is an open subset of arbitrary convex domain  $D$ :

$$L(a, r) = \{|\psi(a, z)| < r\}.$$

For sufficiently small  $r > 0$ , this set compactly lies in  $D$  (we denote this fact by  $L(a, r) \subset\subset D$ ) and contains the point  $a$ . This set  $L(a, r)$  is called the  $A(z)$ -lemniscate centered at the point  $a$ . The lemniscate  $L(a, r)$  is a simply - connected set (see [1]).

Let  $f = u + iv$ .

**Theorem 1.** (see [3]). *The real part of the  $A(z)$ -analytic functions of  $f(z) \in O_A(D)$  satisfies equation*

$$\Delta_A u = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{1 - |A|^2} \left( (1 + |A|^2) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{1 - |A|^2} \left( (1 + |A|^2) \frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) \right) = 0 \quad (2)$$

in the domain of  $D$ .

In connection with Theorem 1, it is natural to define the  $A(z)$ -harmonic function as follows.

**Definition 1** (see [3]). *A double differentiable function  $u \in C^2(D)$ ,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  is called  $A(z)$ -harmonic in the  $D$  domain if the  $D$  domain if it satisfies the differential equation (2).*

The class of  $A(z)$ -harmonic functions in the domain of  $D$  is denoted as  $h_A(D)$ .

**Theorem 1** (see [2], on the mean of  $A(z)$ -harmonic function in lemniscate). *Let  $D$  be a convex domain. Then if  $u(z)$  is an  $A(z)$ -harmonic function in lemniscate  $L(a, r) \subset D$ , then for any  $\rho < r$  take place*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(a, \xi)| = \rho} u(\xi) |d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}|. \quad (3)$$

**Theorem 2** (see [3], analogue of the Poisson formula for  $A(z)$ -harmonic functions). *If the function  $\omega(\zeta)$  is continuous on the boundary of the lemniscate  $L(a, r)$ , then the function*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(a, \zeta)| = r} v(\zeta) \frac{r^2 - |\psi(a, z)|^2}{|\psi(\zeta, z)|^2} |d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}| \quad (4)$$

is the solution of the Dirichlet problem in  $L(a, r)$ , i.e.  $u(z) \in h_A(L(a, r)) \cap C(\bar{L}(a, r)) : u(z)|_{\partial L(a, r)} = v(\zeta)$ , where  $P(z, \zeta) = \frac{r^2 - |\psi(a, z)|^2}{|\psi(\zeta, z)|^2}$ .



Formula (4) are called an analogue of the Poisson formula for  $A(z)$ -harmonic functions.

Using the averaging operator (3), we can determine  $A(z)$ -subharmonic functions.

**Definition 2.** (see [2]). *The function  $u(z) : D \rightarrow [-\infty; \infty)$  is called  $A(z)$ -subharmonic in the domain  $D \subset \mathbb{C}$  if it is semi-continuous from above,  $\limsup_{w \rightarrow z} u(w) \leq u(z)$ ,  $\forall z \in D$  and the inequality of average is valid:*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(a, \zeta)|=r} u(\zeta) |d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}|,$$

for any fixed point  $a \in D$  and for any lemniscate  $L(a, r) \subset \subset D$ .

Now, we define the concepts of angular and radial limits of  $A(z)$ -analytic functions in lemniscate  $L(a, r) \subset \subset D$ . The lemniscate  $L(a, r)$  is a simply connected domain with a real analytic boundary, then according to Riemann's theorem there exists a conformal map  $\chi(z) : U \rightarrow L(a, r)$ , which is also conformal in some neighborhood of closure  $\bar{U}$ . Let  $\chi$  maps the boundary point  $\lambda \in \partial U$  to the boundary point  $\zeta \in \partial L(a, r)$ . Then the curve  $\gamma_\zeta$  has the property that it connects points  $a, \zeta$  and is perpendicular to all lines of level  $\partial L(a, \rho) = \{|\psi(a, z)| = \rho\}, 0 < \rho \leq r$ . In the theory of  $A(z)$ -analytic functions, the curve  $\gamma_\zeta = \chi(\tau_\lambda)$  plays the role of the radial direction, and the image of the angle  $\chi(<)$  plays the role of the angular set at the point  $\zeta \in \partial L(a, r)$ . We will denote this angle by  $< = <_\zeta$ . The limit  $f^*(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \gamma_\zeta} f(z)$  is called the radial limit, and  $f^*_{<}(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in <_\zeta} f(z)$  is the angular limit of the function  $f(z)$  at the point  $\zeta \in \partial L(a, r)$  (see [4]).

For a boundary measurable subset of lemniscates  $M \subset \partial L(a, r)$ , the  $A(z)$ -harmonic measure  $\omega(z, M, L(a, r))$  is determined very simply by the Poisson formula. If

$$\mathfrak{K}_M(\zeta) = \begin{cases} -1, & \text{if } \zeta \in M, \\ 0, & \text{if } \zeta \in \partial L(a, r) \setminus M \end{cases}$$

is a characteristic function of the set  $M \subset \partial L(a, r)$ , then according to Poisson's formula  $A(z)$ -harmonic measure

$$\omega(z, M, L(a, r)) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(a, \zeta)|=r} P(z, \zeta) \mathfrak{K}_M(\zeta) |d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}|.$$

Note that the  $A(z)$ -harmonic measure  $\omega(z, M, L(a, r))$  is an  $A(z)$ -harmonic function inside the lemniscate,

$$\omega(z, M, L(a, r)) \in h_A(L(a, r)), -1 \leq \omega(z, M, L(a, r)) \leq 0.$$

**Theorem 3.** *The function  $\omega(z, M, L(a, r))$  either does not vanish anywhere  $\omega(z, M, L(a, r)) < 0$ , or is identically equal to zero,  $\omega(z, M, L(a, r)) \equiv 0$ .  $\omega(z, M, L(a, r)) \equiv 0$  if and only if the boundary set  $M \subset \partial L(a, r)$  has zero measure,  $mesM = 0$ .*

The following theorem is very important in the qualitative estimates of  $A(z)$ -analytic functions.

**Theorem 4.** *Let  $M \subset \partial L(a, r)$  be a measurable boundary set of positive measure,  $mesM > 0$ . Then for almost all points  $\zeta^0 \in M$  there is a radial limit  $\omega^*(\zeta^0, M, L(a, r)) = -1$ .*

### References

1. Sadullaev A. Zhabborov N. M. *On a class of A-analytic functions.* // J. Siberian Fed. Univ. 2016. Vol. 9, No 3. P. 374–383.
2. Khursanov Sh. Y. *Some properties of A(z)-subharmonic functions* // Bulletin of NUUZ. 2020. Vol. 4, No 3. P. 474–484.
3. Zhabborov N. M., Otoboyev N. U., Khursanov Sh. Y. *The Schwartz inequality and the Schwartz formula for A-analytic functions* // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 264, No 6. P. 704–714.
4. Zhabborov N. M., Khursanov Sh. Y., Husenov B. E. *Existence of boundary values of Hardy class functions  $H_A^1$*  // Bulletin of the NUUZ. 2022. Vol. 5, No 2. P. 79–90.

## ON MULTIPLE INTERPOLATION IN THE AREA PRIVALOV CLASSES IN A DISK

E.G. Rodikova

Bryansk state university named after academician I. G. Petrovsky, 14 Bezhitskaya str., Bryansk, Russia, 241050  
evheny@yandex.ru

Let  $\mathbb{C}$  be the complex plane,  $D$  be the unit disk on  $\mathbb{C}$ ,  $H(D)$  be the set of all functions, holomorphic in  $D$ . For all  $0 < q < +\infty$  we define the area Privalov class of function  $\tilde{\Pi}_q$  as follows:

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Here, as usual,  $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$ ,  $\forall a \in \mathbb{C}$ .

State the problem of multiple interpolation for the class  $\tilde{\Pi}_q$ : let  $\{z_k\}_1^\infty \subset D$  and  $\{w_k\}_1^\infty$  be the arbitrary sequences of complex numbers; for fixed number  $j \geq 1$  we put  $p_j$  be the multiplicity of the number  $z_j$  in the sequence  $\{z_k\}_1^\infty$ ,  $s_j \geq 1$  be the multiplicity of the number  $z_j$  on the interval  $\{z_k\}_1^j$ . Obviously,  $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$ . We need to find conditions for  $\{z_k\}_1^\infty$  and  $\{w_k\}_1^\infty$  under which one can construct a function  $f \in \tilde{\Pi}_q$  such that the following task is solvable:

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots? \quad (1)$$

In this case  $\{z_k\}$  is called *interpolating sequence*. If  $\sup_{j \geq 1} \{p_j\} < +\infty$ , then the interpolation nodes have the bounded multiplicity. For  $s_k = 1$  we say that the interpolation is performed on a set of simple nodes  $\{z_k\}$ .

For given sequence  $\{z_k\}_1^\infty \subset D$  and fixed  $0 < q < 1$  we denote by  $l^q(z_k)$  the sequence space  $\{w_k\}_1^\infty$ , such that

$$\ln^+ |w_k| = o\left((1 - |z_k|)^{-2/q}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Notice, that class  $l^q(z_k)$  is natural for solving the interpolation problem in Privalov's spaces by area  $\tilde{\Pi}_q$ , because the following assertion is valid:

**Theorem A.** (см. [3]) *Let  $q > 0$ . If  $f \in \tilde{\Pi}_q$ ,  $M(r, f) = \max_{|z| \leq r < 1} |f(z)|$ , then*

$$\ln^+ M(r, f) = o\left((1 - r)^{-2/q}\right), \quad r \rightarrow 1 - 0,$$

and this estimate is exact.

Moreover, as established in [5], the Privalov class by area is invariant under the differentiation operator for all  $q > 0$ .

To formulate the main result of the work we introduce some more notations and definitions.

For any  $\beta > -1$  we denote by  $\pi_\beta(z, z_k)$  the M. M. Djrbashian's infinite product with zeros at points of the sequence  $\{z_k\}_1^{+\infty} \subset D$  (see [1]). If  $\beta = m \in \mathbb{Z}_+$ , then product takes a form:

$$\pi_m(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k(z_k - z)}{1 - \bar{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^m \frac{1}{j+1} \left( \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{j+1}.$$

As stated in [1], the infinite product  $\pi_\beta(z, z_k)$  is absolutely and uniformly convergent in the unit disk  $D$  if and only if the following series converges:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

We denote by  $\pi_{\beta,n}(z, z_k)$  the infinite product  $\pi_\beta(z, z_k)$  without  $n$ -th factor.

The Stolz angle  $\Gamma_\delta(\theta)$  with the vertex at the point  $e^{i\theta}$  is the angle of the solution  $\pi_\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , whose bisector coincides with the segment  $re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ .

We denote by  $\tilde{\Delta}$  the sequence of complex numbers  $\{z_k\}_1^\infty$  under the following conditions:

1. the interpolation nodes have the bounded multiplicity:

$$\sup_{k \geq 1} \{p_k\} = p < +\infty,$$

- 2.

$$\int_0^1 (1-r)n^q(r)dr < +\infty,$$

where  $n(r) = \text{card}\{z_k : |z_k| < r\}$  for all  $0 \leq r < 1$ ;

3. there is a positive infinitesimal sequence  $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ , such that

$$|\pi_{\beta,n}(z_n, z_k)| \geq \exp \frac{-\varepsilon_n}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}},$$

for all  $\beta > \frac{2}{q} - 2$ .

The main result of this article is the following assertion:

**Theorem 1.** Let  $0 < q < 1$ ,  $\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  for a certain  $0 < \delta < 1$ .

If  $\{z_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$ , then for any sequence  $\{w_k\} \in l^q(z_k)$  it is possible to construct the explicit function  $f \in \tilde{\Pi}_q$  that solve the multiple interpolation problem (1).

Conversely, if the interpolation problem (1) is solvable for all  $1 \leq s_k < +\infty$  and  $\{w_k\}_1^\infty \in l^q(z_k)$ , then  $\{z_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$ .

It should be noted that the formulation of the problem of multiple interpolation and the method for constructing a special system of functions that solves the problem of interpolation with nodes of bounded multiplicity go back to the work of M.M. Djrbashian [2]. The problem of interpolation on the Carleson sets in  $\tilde{\Pi}_q$  classes was solved in the works of the author [4].

### References

1. Djrbashian M. M. *On the representation problem of analytic functions* (in Russian) // Soob. Inst. Math. i Mekh. AN ArmSSR. 1948. Vol. 2. P. 3–40.
2. Djrbashian M. M. *Biorthogonal systems and solution of interpolation problem with nodes of limited multiplicity in class  $H_2$*  (in Russian) // Izv. Akad. Nauk ArmSSR, Matematika. 1974. Vol. 9, No 5. P. 339—373.
3. Rodikova E.G. *On coefficient multipliers for the area Privalov classes* (in Russian) // Ufa Math. Journ. 2021. Vol. 13, No 4. P. 82–93.
4. Rodikova E.G. *On Interpolation on the Carleson sets in the area Privalov classes in a disk* (in Russian) // Scientific notes of Bryansk state university. 2022. No 4. P. 13-15.
5. Shamoyan F.A., Mahina N.M. *Some remarks on differential operators in I.I. Privalov's classes* (in Russian) // Sib. Electr. Math. Rep. 2022. Vol. 19, No 2. P. 784–791.

# СЕКЦИЯ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

## О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОЙ КОМПОЗИЦИИ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

А.Б. Антоневиц<sup>1</sup>, В.А. Борбут<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, механико-математический факультет  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
{antonevich, borbut}@bsu.by

Операторы взвешенной композиции (взвешенного сдвига) представляют самостоятельный интерес, а также с связи с их использованием в теории уравнений с отклоняющимся аргументом и теории динамических систем, поэтому исследованию их свойств посвящены работы многих авторов.

Оператор взвешенной композиции строится с помощью заданного отображения  $\alpha : X \rightarrow X$  множества  $X$  в себя и функции  $a(x)$ , которую обычно называют весом. Он действует на функцию  $u$  из заданного пространства функции  $F(X)$  по формуле

$$Vu(x) = a(x)u(\alpha(x)) \quad (1).$$

Спектральные свойства таких операторов существенно зависят от всех данных – динамики отображения  $\alpha$ , веса и заданного пространства функций.

В данной работе рассмотрен один конкретный класс таких операторов. Ниже считаем, что  $X = [0, 1]$ ,  $\alpha$  есть диффеоморфизм отрезка  $[0, 1]$ , такой, что  $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) > 1, \alpha(1) = 1, \alpha'(1) < 1$  и  $\alpha(x) > x$  при  $0 < x < 1$ . Также предполагается, что  $a(x)$  есть комплекснозначная бесконечно дифференцируемая функция и  $a(x) \neq 0$  для всех  $x$ .

Целью данной работы исследование спектральных свойств оператора (1) в шкале пространств Соболева  $H^s[0, 1]$  в зависимости от параметра  $s$ . В шкале пространств дифференцируемых функций  $C^k[0, 1]$  такое исследование проведено в [2].

Напомним определение пространств Соболева. В пространстве  $L_2[0, 1]$  оператор  $Su = u - u''$  с нулевыми граничными условиями является (неограниченным) самосопряженным и положительно определенным, поэтому для него определены все степени. В частности оператор  $\Lambda = \sqrt{S}$  также является самосопряженным и положительно определенным. Гильбертово пространство  $H^s[0, 1]$  может быть задано как область определения оператора  $\Lambda^s$ . При  $s > 0$  это векторное подпространство в  $L_2[0, 1]$ , при  $s < 0$  элементами пространства  $H^s[0, 1]$  являются обобщенные функции.

Вид спектра такого оператора в пространстве  $L_2[0, 1]$  известен [1].

**Предложение** Пусть

$$r_0(a) = \min\{|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2}, |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2}\}$$

$$R_0(a) = \max\{|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2}, |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2}\}.$$

Спектр оператора (1) в пространстве  $L_2[0, 1] = H^0[0, 1]$  есть кольцо

$$\sigma(B; H^0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_0(a) \leq |\lambda| \leq R_0(a)\}.$$

Если  $|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2} < |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2}$ , то при условии

$$|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2} < |\lambda| < |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2}$$

оператор  $B - \lambda I$  имеет бесконечномерное ядро и обратим справа.

Если  $|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2} > |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2}$ , то при условии

$$|a(1)|\alpha'(1)^{-1/2} < |\lambda| < |a(0)|\alpha'(0)^{-1/2}$$

оператор  $B - \lambda I$  имеет бесконечномерное дополнение и обратим слева.

Напомним некоторые определения.

Оператор называется *фредгольмовым*, если его образ замкнут, имеет конечномерное дополнение, а ядро конечномерно. *Фредгольмов спектр*  $\sigma_F(B)$  оператора  $B$  есть множество значений  $\lambda$ , при которых оператор  $B - \lambda I$  не является фредгольмовым.

Оператор называется  $\Phi^+$ -оператором, если его образ замкнут и имеет конечномерное дополнение, а ядро бесконечномерно.

Оператор называется  $\Phi^-$ -оператором, если его образ замкнут, имеет бесконечномерное дополнение, а ядро конечномерно.

**Теорема** Пусть  $b_s$  есть оператор в пространстве  $L_2$  задан формулой  $b_s u(x) = \alpha'(x)^s B u(x)$ , тогда  $\sigma_F(B; H^s) = \sigma(b_s; L_2)$ , а также  $\sigma_F^+(B; H^s) = \sigma(b_s; L_2)$ ,  $\sigma_F^-(B; H^s) = \sigma(b_s; L_2)$ .

**Следствие** Пусть

$$r_s(a) = \min\{|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s}, |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s}\}$$

$$R_s(a) = \max\{|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s}, |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s}\}.$$

*Фредгольмов спектр оператора (1) в пространстве  $H^s[0, 1]$  есть кольцо*

$$\sigma_F(B; H^s) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_s(a) \leq |\lambda| \leq R_s(a)\}.$$

*Если  $|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s} < |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s}$ , то при условии*

$$|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s} < |\lambda| < |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s}$$

*оператор  $B - \lambda I$  является  $\Phi^+$ - оператором.*

*Если  $|a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s} > |a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s}$ , то при условии*

$$|a(1)|\alpha'(1)^{-1/2+s} < |\lambda| < |a(0)|\alpha'(0)^{-1/2+s}$$

*оператор  $B - \lambda I$  является  $\Phi^-$ -оператором.*

В качестве следствия отметим, что при любом фиксированом  $\lambda$  при достаточно больших положительных  $s$  оператор  $B - \lambda I$  является  $\Phi^-$ - оператором в пространствах  $H^s[0, 1]$ , при достаточно больших по модулю отрицательных  $s$  является  $\Phi^+$ - оператором.

По аналогичной формуле определяется оператор взвешенной композиции в пространствах вектор-функций, в этом случае в качестве веса берется матрица-функция  $A(x)$ . Для таких операторов имеет место аналогичное теореме утверждение, формулировка которого требует введения еще ряда понятий. Но для получения явного вида соответствующих спектров нужны дополнительные исследования.

### Литература

1. Антоневиц А. Б. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*. М.: Университетское, 1988.
2. Антоневиц А. Б., Белицкий Г. *Существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений*. 1999. С. 25–27.

## ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГРАДУИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

А.Б. Антоневиц<sup>1</sup>, М.Д.Ежикова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, механико-математический факультет  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
antonevich@bsu.by; maya.yo1989banan@gmail.com

1. Множество будем называть *градуированным*, если оно представлено в виде объединения упорядоченной по включению счетной системы подмножеств. В частности, коммутативную группу  $L$

будем называть *градуированной*, если задана двусторонняя последовательность подгрупп  $L_m, m \in \mathbb{Z}$ , такая, что

$$L_m \supset L_{m+1}, L = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} L_m.$$

Аналогично определяется градуированное векторное пространство.

В работе предложен общий способ задания метрики на градуированных множествах. Такой способ задания метрики для одного конкретного случая (т.н. з алгебр мнемофункций) был использован в [1] и, следуя терминологии из [1], будем называть введенные метрики *sharp*–метриками.

Кроме градуировки, обычно на каждом из выделенных подмножеств задана своя топология, в случае групп или векторных пространств согласованная с алгебраическими операциями. В таком случае будем говорить, что определена структура *пространства с градуированной топологией*.

Множества с такой структурой возникают в ряде направлений анализа, в частности, при построении асимптотических разложений, исследовании уравнений с малым параметром, в теории т.н. новых обобщенных функций (мнемофункций). Отметим, что в случае градуированных векторных пространств топология, порожденная *sharp*–метрикой, не согласована с операцией умножения на число, т.е. они не являются топологическими векторными [3] и требуют отдельного изучения. Поэтому естественно провести систематическое исследование градуированных множеств и пространств с градуированной топологией с целью приложений этой теории к конкретным задачам.

2. Сначала рассмотрим градуированные множества следующего специального вида. Пусть задана двусторонняя последовательность множеств  $G_k, k \in \mathbb{Z}$ , каждое из которых содержит не менее двух точек, с отмеченной точкой, которую будем обозначать через 0. Пусть  $H_m$  есть множество двусторонних последовательностей  $\xi$  вида

$$\xi = (\dots, 0, 0, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots), \xi_k \in G_k, \quad (1)$$

и

$$H = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} H_m.$$

*Порядком отличия* элемента  $\xi \in H$  с координатами  $\xi_k$  от элемента  $\eta$  с координатами  $\eta_k$  будем называть число

$$v(\xi, \eta) = \begin{cases} \min\{k : \xi_k \neq \eta_k\}, & \xi \neq \eta; \\ +\infty, & \xi = \eta. \end{cases}$$

**Теорема 1. Формула**

$$\rho(\xi, \eta) = 2^{-v(\xi, \eta)} \quad (2)$$

задает *sharp*–метрику на  $H$ , относительно которой  $H$  является полным пространством. Для этой метрики выполнено усиленное неравенство треугольника:

$$\rho(\xi, \eta) \leq \max\{\rho(\xi, \zeta), \rho(\zeta, \eta)\} \quad \forall \xi, \eta, \zeta. \quad (3)$$

Метрика, для которой выполнено неравенство (3), называется *неархимедовой* или *ультраметрикой*. Как известно, геометрия пространств с неархимедовой метрикой обладает свойствами, нетипичными для евклидовых пространств. Например, любая точка шара в пространстве с неархимедовой метрикой является его центром [3].

3. Пусть  $L$  есть градуированная группа и  $H$  есть градуированное множество описанного выше вида, построенное по последовательности фактор-групп  $G_k = L_k/L_{k+1}$ . В частности, элемент из  $H_m$  есть последовательность вида (1), состоящая из элементов фактор-групп  $G_k$ . Строится отображение  $\pi : L \rightarrow H$ , которое согласовано с градуировкой (образ  $L_m$  принадлежит  $H_m$ ). Если выполнено условие

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} L_m = \{0\}, \quad (4)$$

то  $\pi$  является вложением и тем самым  $L$  можем отождествлять с  $\pi(L)$ , т.е. считать подмножеством в полном метрическом пространстве  $H$ . В частности, на  $L$  определена метрика  $r(x, y) = \rho(\pi(x), \pi(y))$ , индуцированная из  $H$ .

Если условие () не выполнено, то  $r(x, y)$  является полуметрикой, так как из равенства  $r(x, y) = 0$  следует, что

$$x - y \in L_\infty := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} L_m.$$

В этом случае рассматривается фактор-группа  $L/L_\infty$ , градуированная подгруппами  $L_m/L_\infty$ .

**Теорема 2.** *Операция сложения в  $L$  порождает операцию сложения в  $H$ , относительно которой  $H$  является группой. При этом в топологии, порожденной *sharp*-метрикой,  $H$  является полной топологической группой, а множество  $\pi(L)$  является всюду плотной подгруппой в  $H$ .*

4. Фактор-группа  $G_k$  состоит из классов эквивалентности. Выбрав в каждом классе эквивалентности  $\xi \in G_k$  элемент  $g \in L_k$ , получаем отображение  $\varphi_k : G_k \rightarrow L_k$ , которое биективно отображает  $G_k$  на множество выделенных элементов, которое обозначим  $E_k$ . В результате вместо последовательности элементов фактор-групп получаем последовательность аналогично вида из элементов  $\varphi(\xi_k)$  группы  $L$ . Это позволяет поставить в соответствие элементу из  $x \in L$  формальный ряд из выделенных элементов группы  $L$ : если  $x \in L_m$ , то

$$J(x) = \sum_m^\infty g_k, \quad g_k = \varphi(\xi_k) \in E_k \subset L_k \subset L. \tag{5}$$

Множество всех таких рядов (весьма специального вида) обозначим  $\hat{H}$  и пусть  $\hat{L} := J(L)$ .

**Теорема 3** *Операция сложения в  $L$  порождает операцию  $\hat{+}$  в множестве формальных рядов  $\hat{H}$ , относительно которой  $\hat{H}$  является группой. При этом в топологии, порожденной *sharp*-метрикой,  $\hat{H}$  является полной топологической группой, множество  $\hat{L}$  является всюду плотной подгруппой в  $\hat{H}$  и каждый формальный ряд вида () сходится.*

Описанная конструкция во-первых, показывает, что градуировка на группе позволяет ввести топологию, согласованную с алгебраической структурой и, во-вторых, вложить исходную группу в более широкую полную группу.

Показано, что в конкретных примерах описанная конструкция приводит к построению таких классических объектов, как поле  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  [4] и рядов Тейлора гладких функций. При этом показано, что разложение числа  $x \in \mathbb{R}$  в дробь по заданному основанию (например, десятичную) также связано с представлением  $\mathbb{R}$  в виде градуированного пространства, но это не градуированная группа и свойства таких разложений отличаются от описанных.

### Литература

1. Delcroix A., Scarpalezos D. *Sharp Topologies on  $(C, E, P)$ -Algebras*. in : Nonlinear theory of Generalized Function, Chaptman & Hall, Research Notes of Mathematics, Vol.401, 1999. P. 165–174.
2. Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства*. М., Изд-во иностр. лит. 1959.
3. Радына А. Я., Радына Я. М., Радына Я. В. *Пачаткі неархімедавага аналізу: дапам. для студентаў мех.-мат. фак. Мінск: БДУ, 2010. 111 с.*
4. Каток С.В.  *$P$ -адический анализ в сравнении с вещественным*. Москва: МЦНМО, 2004. 112 с.

**ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА  
С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ОТРЕЗКЕ**

А.И. Басик<sup>1</sup>, Т.А. Яцук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина,  
бульвар Космонавтов 21, 224016 Брест, Беларусь,  
alex-basik@yandex.ru

<sup>2</sup>Брестский государственный технический университет,  
Московская 267, 224017 Брест, Беларусь,  
khvorosttt@yandex.by

Рассмотрим краевую задачу

$$u''(x) - a\delta(x-b)u(x) = f(x) \quad (x \in [-1; 1]), \quad (1)$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

где  $b \in [0; 1)$ ,  $a > 0$ ,  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  – заданная непрерывная функция.

Левая часть уравнения (1), вообще говоря, не определена, потому что содержит слагаемое  $\delta(x-b) \cdot u(x)$ , которое на гладких функциях  $u(x)$  совпадает с обобщенной функцией  $u(b) \cdot \delta(x-b)$ . При этом, если  $u(b) \neq 0$ , то левая часть (1) не принадлежит  $L_2[-1; 1]$ . Если же у производной непрерывной функции в точке  $x = b$  имеется скачок, то обобщенная вторая производная такой функции содержит  $\delta$ -функцию в качестве слагаемого [1, с. 44]. Основная идея придания смысла левой части (1) состоит в том, чтобы рассматривать такие функции  $u(x)$ , для которых  $\delta$ -слагаемые уничтожаются. Поэтому принято считать [2] (см. также [3]), что областью определения левой части уравнения (1) является множество непрерывных функций  $u \in H^2[-1; b] \oplus H^2[b; 1]$ , для которых выполняется равенство

$$u'(b+0) - u'(b-0) = au(b). \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть  $f \in C[-1; 1]$ ,  $b \in [0; 1)$ ,  $a > 0$ , тогда функция, заданная формулой

$$u(x) = \int_{-1}^1 G(x; y) f(y) dy,$$

является единственным решением задачи (1), (2), где

$$G(x; y) = \tilde{G}(x; y) + \frac{1}{a(1-b^2) + 2} \cdot \tilde{\tilde{G}}(x; y),$$

$$\tilde{G}(x; y) = \begin{cases} G_-(x; y), & \text{при } x \in [-1; b], y \in [-1, b], \\ 0, & \text{при } x \in [-1; b], y \in (b, 1], \\ 0, & \text{при } x \in (b, 1], y \in [-1, b], \\ G_+(x; y), & \text{при } x \in (b, 1], y \in (b, 1], \end{cases}$$

$$G_-(x; y) = \begin{cases} \frac{(y-b)(1+x)}{1+b}, & \text{при } x \leq y \leq b, \\ \frac{(x-b)(1+y)}{1+b}, & \text{при } -1 \leq y < x, \end{cases}$$

$$G_+(x; y) = \begin{cases} \frac{(x-b)(y-1)}{1-b}, & \text{при } x \leq y \leq 1, \\ \frac{(y-b)(x-1)}{1-b}, & \text{при } b \leq y < x, \end{cases}$$



$$\tilde{G}(x; y) = \begin{cases} \frac{b-1}{b+1}(x+1)(y+1), & \text{при } x \in [-1; b], y \in [-1, b], \\ (x+1)(y-1), & \text{при } x \in [-1; b], y \in (b, 1], \\ (x-1)(y+1), & \text{при } x \in (b; 1], y \in [-1, b], \\ \frac{b+1}{b-1}(x-1)(y-1), & \text{при } x \in (b; 1], y \in (b, 1]. \end{cases}$$

Функцию  $G(x; y)$  назовем функцией Грина задачи (1), (2).

Авторы выражают благодарность профессору Белорусского государственного университета Антоневичу А. Б. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

### Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979.
2. Березин, Ф. А. *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
3. Басик А. И., Япук Т. А. *Об асимптотике одного дифференциального оператора с сингулярным потенциалом* // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике. 2024. С. 87–91.

## ЭРГОДИЧЕСКИЙ НОСИТЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И НАТУРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ШОКЕ ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

В.И. Бахтин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь, bakhtin@tut.by

Эргодический носитель  $X_0$  динамической системы с компактным метризуемым фазовым пространством  $X$  определяется как множество всех начальных точек, для которых последовательность эмпирических мер сходится (в слабом смысле) к некоторой эргодической мере. Доказывается, что всякая инвариантная вероятностная мера на пространстве  $X$  сосредоточена на эргодическом носителе  $X_0$ , и что ее распределение Шоке индуцируется естественной проекцией множества  $X_0$  на симплекс эргодических мер.

Пусть задано непрерывное отображение  $T : X \rightarrow X$  метрического компакта  $X$  в себя. Обозначим через  $M(X)$  множество борелевских вероятностных мер на  $X$ , через  $M_T(X)$  множество  $T$ -инвариантных вероятностных мер и через  $E_T(X)$  множество эргодических мер динамической системы  $(X, T)$ . Очевидно,  $E_T(X) \subset M_T(X) \subset M(X)$ .

Снабдим  $M(X)$  и  $M_T(X)$  слабой топологией, порождённой непрерывными функциями на  $X$ . В силу теоремы Алаоглу оба эти множества компактны. Кроме того, известно, что множество эргодических мер  $E_T(X)$  на метрическом компакте  $X$  является борелевским и имеет тип  $G_\delta$  [1, Предложение 1.3].

Пусть  $\delta_x$  обозначает единичную меру, сосредоточенную в точке  $x \in X$ . Эмпирические меры  $\delta_{x,n} \in M(X)$  определяются по правилу

$$\delta_{x,n} = \frac{\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}x}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, при фиксированном  $n$  мера  $\delta_{x,n}$  непрерывно зависит от  $x \in X$ . Кроме того, известно, что при  $n \rightarrow \infty$  все предельные точки последовательности  $\delta_{x,n}$  являются инвариантными мерами, т. е. принадлежат  $M_T(X)$ .

Для борелевских функций  $f$  и борелевских мер  $\mu$  на  $X$  введем обозначения

$$f(\mu) = \int_X f d\mu, \quad f(\delta_{x,n}) = \frac{f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n}.$$

По эргодической теореме Биркгофа–Хинчина для любой эргодической меры  $\mu \in E_T(X)$  и любой функции  $f \in L^1(X, \mu)$  при  $\mu$ -почти всех  $x$  имеет место сходимость  $f(\delta_{x,n}) \rightarrow f(\mu)$ .

Для всякой инвариантной меры  $\mu \in M_T(X)$  определим её *бассейн*

$$B(\mu) = \{x \in X : \delta_{x,n} \rightarrow \mu\},$$

где  $\delta_{x,n} \rightarrow \mu$  обозначает слабую сходимость.

**Лемма 1.** Множество  $B(\mu)$  является  $T$ -инвариантным и борелевским.

**Лемма 2.** Для каждой меры  $\mu \in E_T(X)$  выполняется равенство  $\mu(B(\mu)) = 1$ .

Отметим, что в случае неметризуемого компакта  $X$  лемма 2 неверна.

Эргодическим носителем динамической системы  $(X, T)$  мы будем называть множество

$$X_0 = \bigcup \{B(\mu) : \mu \in E_T(X)\}.$$

Введем также обозначения

$$X_1 = \bigcup \{B(\mu) : \mu \in M_T(X) \setminus E_T(X)\},$$

$$X_2 = \{x \in X : \nexists \lim \delta_{x,n}\} = X \setminus (X_0 \cup X_1).$$

Определим отображение  $V : X_0 \cup X_1 \rightarrow M_T(X)$ , положив  $V(x) = \mu$  для всех  $x \in B(\mu)$ :

$$V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{x,n}, \quad x \in X_0 \cup X_1.$$

**Лемма 3.** Множества  $X_0, X_1, X_2$  и отображение  $V$  борелевские и  $T$ -инвариантные.

Главное свойство эргодического носителя  $X_0$  динамической системы  $(X, T)$  заключается в том, что на нем сосредоточены все инвариантные меры. А именно, верна

**Теорема 4.** Если  $\mu \in M_T(X)$ , то  $\mu(X_0) = 1$ .

По теореме Шоке [1, с. 25] для всякой меры  $\mu \in M_T(X)$  существует борелевская вероятностная мера  $\mu^*$  на множестве  $E_T(X)$ , удовлетворяющая тождеству

$$f(\mu) = \int_{E_T(X)} f(\nu) d\mu^*(\nu), \quad f \in C(X). \quad (1)$$

Если выполняется (1), то тогда  $\mu^*$  называется *распределением Шоке* для меры  $\mu$ , а  $\mu$  называется *центром тяжести* для распределения  $\mu^*$ . Определяемое формулой (1) соответствие между инвариантными мерами  $\mu \in M_T(X)$  и борелевскими вероятностными мерами  $\mu^*$  на множестве  $E_T(X)$  является аффинной биекцией (см. [1]).

**Лемма 5.** Тождество (1) выполняется для всех ограниченных борелевских функций  $f$  на метрическом компакте  $X$ .

В силу леммы 3 отображение  $V$  переводит борелевские меры  $\mu$ , сосредоточенные на  $X_0$ , в борелевские меры  $\mu^* = V(\mu)$  на множестве  $E_T(X)$  по стандартному правилу

$$\mu^*(A) = \mu(V^{-1}(A)), \quad A \subset E_T(X). \quad (2)$$

Оказывается, формула (2) даёт распределения Шоке для инвариантных мер  $\mu \in M_T(X)$ , и поэтому её естественно считать *натуральным представлением* распределений Шоке.

**Теорема 6.** Для каждой меры  $\mu \in M_T(X)$  мера  $\mu^* = V(\mu)$  из (2) является распределением вероятностей на  $E_T(X)$  с центром тяжести  $\mu$ , и для каждой ограниченной борелевской функции  $f$  на  $X$  имеют место равенства

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X_0} f(V(x)) d\mu(x) = \int_{E_T(X)} f(\nu) d\mu^*(\nu), \quad \mu \in M_T(X). \quad (3)$$

Из левого равенства (3) следует, что функция  $\bar{f}(x) = f(V(x))$  является условным математическим ожиданием функции  $f(x)$ , а семейство эргодических мер  $\{V(x) \mid x \in X_0\}$  является условным распределением меры  $\mu \in M_T(X)$  по отношению к алгебре  $T$ -инвариантных борелевских подмножеств  $X$  (причём эти условное математическое ожидание и условное распределение одни и те же для всех мер  $\mu \in M_T(X)$ ).

Доказательства изложенных выше результатов приведены в [2].

## Литература

1. Фелпс Р. *Лекции о теоремах Шоке*. М.: Мир, 1968.
2. Bakhtin V. I. *An ergodic support of a dynamical system and a natural representation of Choquet distributions for invariant measures* // arXiv:2309.10573 [math.DS] 19 Sep 2023.

**SUP-SUMS ПРИНЦИПЫ ДЛЯ  $F$ -ДИВЕРГЕНЦИИ  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**В.И. Бахтин<sup>1</sup>, А.В. Лебедев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь,  
bakhtin@tut.by, lebedev@bsu.by

$F$ -дивергенция для пары вероятностных распределений  $Q, P$  таких, что  $Q$  – абсолютно непрерывно относительно  $P$  и  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  – выпуклая функция, и  $F(1) = 0$  была введена в [1,2,3] в связи с анализом вероятностных мер.

С момента введения  $F$ -дивергенция интенсивно используется и анализируется, так как выбирая подходящие функции  $F$  мы получаем многочисленные (практически все) стохастические дивергенции, такие как дивергенция Кульбака – Лейблера, расстояние Хеллингера, дивергенция Пирсона  $\chi^2$  и т.п.

Глубокий анализ  $F$ -дивергенции проведен в [4], где установлен также sup-sums принцип для пространственных разбиений.

В докладе введена и проанализирована общая  $F$ -дивергенция, ассоциированная с произвольной выпуклой функцией  $F$  на всей вещественной оси и произвольными (не обязательно положительными, нормированными и абсолютно непрерывными) мерами. Получен ряд новых sup-sums принципов, использующих как измеримые, так и непрерывные разбиения единицы. В частности, они раскрывают процедуру перехода от  $F$ -дивергенции на в конечном фазовом пространстве к  $F$ -дивергенции на произвольном измеримом пространстве. Этот переход включает дополнительные компоненты  $F'(\pm\infty)$ .

На базе полученных sup-sums принципов выведен соответствующий sup-sums принцип для дивергенции Кульбака – Лейблера, который естественным образом приводит к новому ее определению для мер не обязательно являющихся вероятностными.

В качестве еще одного принципиального приложения разработано новое “интегральное” определение  $t$ -энтропии, явно устанавливающее ее связь с дивергенцией Кульбака – Лейблера.

## Литература

1. Ali S. M., Silvey S. D. *A general class of coefficients of divergence of one distribution from another* // J. R. Stat. Soc. Ser. B. 1966. Vol. 28, No 1. P. 131–142.
2. Csizsar I. *Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizitat von Markoffschen Ketten* // Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl. 1963. Vol. 8. P. 85–108.
3. Morimoto T. *Markov processes and the H-theorem* // J. Phys. Soc. Jpn. 1963. Vol. 18, No 3. P. 328–331.
4. Liese F., Vajda I. *On divergences and informations in statistics and information theory* // IEEE Trans. Inf. Theory. 2006. Vol. 52, No 10. P. 4394–4412.

## ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФРЕДГОЛЬМА

Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,  
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, {vuv,irinat}@grsu.by

Обозначим  $\Delta = [\alpha, \beta]$ . Для любого натурального числа  $n$  определим обобщенную свертку непрерывной функций  $f$ , заданной на множестве  $\Delta^{n+1}$ , и непрерывной функций  $g$ , заданной на множестве  $\Delta^n$ , следующим образом:

$$(f \odot g)(t) = \int_{\Delta^n} f(t, s)g(s)ds, \quad (t \in \Delta).$$

Пусть  $X$  — пространство всех непрерывных функций на отрезке  $\Delta$ .

Полилинейным оператором Фредгольма степени  $n$ , действующим из пространства  $X^n$  в пространство  $X$ , будем называть оператор  $A$ , определяемый равенством

$$Ax = a \odot (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n)$$

При этом функция  $a \in X^n$  называется обобщенным ядром рассматриваемого оператора Фредгольма.

Отметим, что полилинейный оператор первой степени является линейным оператором, действующим из пространства  $X$  в пространство  $X$ , и определяется формулой

$$(Ax)(t) = \int_{\Delta} a(t, s)x(s)ds, \quad (x \in X, t \in \Delta).$$

Степенным оператором Фредгольма степени  $n$ , действующий из пространства  $X$  в пространство  $X$ , будем называть оператор  $A$ , определяемый равенством

$$Ax = a \odot x^{\otimes n}, \quad (x \in X).$$

Сумму степенных операторов Фредгольма в дальнейшем будем называть полиномиальным оператором Фредгольма, т.е. оператор , определяемый равенством

$$A = \sum_{n=1}^k A_n,$$

где  $A_n$  – степенные операторы Фредгольма степени  $n$ , действующий из пространства  $X$  в пространство  $X$ , называется полиномиальным оператором Фредгольма степени  $k$ .

Таким образом, полиномиальный оператор Фредгольма степени  $k$  определяется формулой

$$Ax = \sum_{n=1}^k a_n \odot x^{\otimes n}, \quad (x \in X)$$

где  $a_n (n = 1, 2, \dots, k)$  — обобщенные ядра соответствующих операторов Фредгольма степени  $n$ , что позволяет считать их аналогами полиномиальных эволюционных операторов [1, 2] с обобщенными импульсными характеристиками.

Одна из основных задач теории эволюционных операторов — исследование композиции эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками.

Естественно, что аналогичная задача ставится и для композиции полиномиальных операторов Фредгольма.

Заметим, что эта задача достаточно просто решается в случае линейных операторов Фредгольма. Действительно, пусть  $A$  и  $B$  — линейные операторы Фредгольма:

$$Ax = a \odot x, \quad (x \in X), \quad By = b \odot y, \quad (y \in X).$$

Рассмотрим композицию операторов  $C = B \circ A$ . Для любого  $x \in X$  имеем:

$$Cx = B(Ax) = b \odot (a \odot x) = (b \odot a) \odot x,$$

где функция  $(b \odot a)(t, s)$  определяется формулой

$$(b \odot a)(t, s) = \int_{\Delta} b(t, \tau) a(\tau, s) d\tau, \quad (t, s \in \Delta)$$

и называется обобщенной сверткой функций  $b$  и  $a$ .

Таким образом, композиция линейных операторов Фредгольма с обобщенными ядрами является линейным оператором Фредгольма с обобщенным ядром, которое равно обобщенной свертке ядер композилируемых операторов.

Если же  $A$  — полиномиальный оператор Фредгольма степени 2, т. е. определяется равенством  $A = A_1 + A_2$ , в котором  $A_1$  — линейный оператор Фредгольма и  $A_2$  — квадратичный оператор Фредгольма, то для любого  $x \in X$  имеем:

$$Cx = B(A_1x + A_2x) = B(A_1x) + B(A_2x) = b \odot (a_1 \odot x) + b \odot (a_2 \odot (x \otimes x)) = (b \odot a_1) \odot x + (b \odot a_2) \odot (x \otimes x),$$

где функция  $(b \odot a_1)(t, s)$  определяется формулой

$$(b \odot a_1)(t, s) = \int_{\Delta} b(t, \tau) a_1(\tau, s) d\tau, \quad (t, s \in \Delta)$$

а функция  $(b \odot a_2)(t, s_1, s_2)$  — формулой

$$(b \odot a_2)(t, s_1, s_2) = \int_{\Delta} b(t, \tau) a_2(\tau, s_1, s_2) d\tau, \quad (t, s_1, s_2 \in \Delta).$$

Рассмотрим теперь композицию  $C = B \circ A$ , когда  $A$  — линейный оператор Фредгольма, а оператор  $B$  — полиномиальный оператор Фредгольма степени 2, т. е. определяется равенством  $B = B_1 + B_2$ , в котором  $B_1$  — линейный оператор Фредгольма и  $B_2$  — квадратичный оператор Фредгольма. Тогда для любого  $x \in X$  имеем:

$$Cx = B_1(Ax) + B_2(Ax) = b_1 \odot (a \odot x) + b_2 \odot (Ax \otimes Ax) = (b_1 \odot a) \odot x + b_2 \odot ((a \odot x) \otimes (a \odot x)) = (b_1 \odot a) \odot x + (b_2 \odot (a, a)) \odot (x \otimes x),$$

где функции  $(b_1 \odot a)(t, s)$  и  $(b_2 \odot (a, a))(t, s_1, s_2)$  определяются формулами

$$(b_1 \odot a)(t, s) = \int_{\Delta} b_1(t, \tau) a(\tau, s) d\tau, \quad (t, s \in \Delta),$$

$$(b_2 \odot (a, a))(t, s_1, s_2) = \int_{\Delta^2} b_2(t, \tau_1, \tau_2) a(\tau_1, s_1) a(\tau_2, s_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (t, s_1, s_2 \in \Delta).$$

### Литература

1. Вувуникян Ю. М. *Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками*. Гродно: ГрГУ, 2007.
2. Вувуникян Ю. М. *Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы*. Гродно: ГрГУ, 2014.

**ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ  
ТИПА ГЕРАСИМОВА-КАПУТО**

**А.П. Гринько**

Барановичский государственный университет, Парковая 62, 225404 Барановичи,  
agrinko\_1999@yahoo.com

**Введение.** В работе изучаются свойства (см. [1]) правосторонних локализованных дробных производных типа Римана-Лиувилля

$$(\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \left( \frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}} dt, 0 < \alpha, -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \quad (1)$$

правосторонних локализованных дробных производных типа Маршо

$$(D^{\alpha, -\varepsilon} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\varphi(x) - \varphi(x - \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau, \quad (2)$$

и локализованных производных типа Герасимова-Капуто (см. [2])

$$({}^C \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f)(x + \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^{x+\varepsilon} \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x + \varepsilon - t)^{1+\alpha-n}}, \quad (3)$$

$$({}^C D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x + \varepsilon) = \frac{f^{(n)}(x + \varepsilon) - f^{(n)}(x)}{\Gamma(1 - \{\alpha\}) \varepsilon^{\{\alpha\}}} + \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_x^{x+\varepsilon} \frac{f^{(n)}(x + \varepsilon) - f^{(n)}(t)}{(x + \varepsilon - t)^{1+\{\alpha\}}} dt.$$

Эти дробные производные наряду с обобщёнными дробными производными, например классическими Римана-Лиувилля производными (см. [3], [4]),

$$(\mathcal{D}_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha},$$

дробными производными Маршо

$$(D_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau, 0 < \alpha < 1,$$

и локальными дробными производными  $T_i^\alpha$ , например

$$T_1^\alpha = \left( \overline{\mathcal{D}}_{a+}^\alpha (\varphi) \right) (a) = \lim_{x \rightarrow a} (\mathcal{D}_{a+}^\alpha (\varphi - \varphi(a)))(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \frac{(\varphi(t) - \varphi(a))}{\Gamma(1 - \alpha)} dt$$

см. [5],

$$T_2^\alpha = \varphi^{(\alpha)}(x-a) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x-a + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - \varphi(x-a)}{\varepsilon},$$

см. [6], являются третьим направлением развития дробных производных. Локализованная дробная производная содержит параметр, который отличает её от обычной дробной производной. Этот параметр можно интерпретировать как степень локализованности или точность производной. Производные типа Капуто определены на более хороших функциях, но имеют понятные физические интерпретации начальных условий при решении различных задач в физических приложениях [7], [8].

**Основные результаты.** Для правосторонних локализованных дробных производных типа Римана-Лиувилля (1) и правосторонних локализованных дробных производных типа Маршо (2) доказываются достаточные условия, при которых они совпадают, соответственно, с локализованными

производными типа Герасимова-Капуто. Предлагается в качестве локальной дробной производной типа Римана-Лиувилля, Маршо и Герасимова-Капуто брать предел, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  отношения локализованной дробной производных к разности гладкости и порядка производной. Обозначим через  $\mathcal{D}^{\alpha,\varepsilon}$  - локализованную дробную производную, заданную одним из равенств (1)-(3).

**Определение.** Пусть в точке  $x$  выполнено  $\sup_{0 < t < \varepsilon} |f(x) - f(x-t)| \leq \omega(\varepsilon)$ , где  $\omega(\varepsilon)$  - заданная непрерывная монотонная функция,  $\omega(0) = 0$ . Локальной дробной производной функции  $f(x)$ , соответствующей локализованной дробной производной  $\mathcal{D}^{\alpha,\varepsilon}$  назовём

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{D}}^\alpha f)(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1 + \log_\varepsilon \omega(\varepsilon) - \alpha)}{\omega(\varepsilon)} \varepsilon^\alpha (\mathcal{D}^{\alpha,\varepsilon} f)(x) = \\ &= \Gamma(1 + \alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(1 + \log_\varepsilon \omega(\varepsilon) - \alpha) \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\omega(\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Локальная дробная производная в точке  $x$  интерпретируется как мгновенная скорость равная пределу отношению изменения расстояния за время  $\varepsilon$  к значению характеристики  $\omega(\varepsilon)$ , умноженному на константу  $\Gamma(1 + \alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(1 + \log_\varepsilon \omega(\varepsilon) - \alpha)$ . Вид характеристики обобщённого гёльдеровского пространства, в точке в силу (4), можно получить, вычисляя локализованную производную. Естественно, что характеристика может иметь вид не только степенной функции. Далее, зная характеристику, мы можем вычислить локальную производную.

Получены достаточные условия существования локальные дробных производных типа Римана-Лиувилля Маршо и Герасимова-Капуто. Доказаны композиционные свойства дробных локализованных производных и обычных производных. Вычислены локальные производные для показательной, тригонометрической, степенной и Вейерштрасса функции.

#### Литература

1. Grinko A. P. *Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type* // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Vol. 32, No 12. P. 1002–1018.
2. Grinko A. P. *Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization* // Integral Transforms and Special Functions. 2022. Vol. 33, No 8. P. 623–636.
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and derivatives of the fractional order and their some applications*. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.
4. Seemab A. Ur Rehman M. Alzabut J., Hamdi A. *On the Existence of Positive Solutions for Generalized Fractional Boundary Value Problems* // Boundary Value Problems. 2019. No 186(2019).
5. Guebbai H., Ghiat M. *New Conformable Fractional Derivative Definition for Positive and Increasing Functions and its Generalization* // Advances in Dynamical Systems and Applications. 2016. Vol. 1, No 2. P. 105–111.
6. Camrud E. *The Conformable Ratio Derivative* // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal. 2016. Vol. 17, Iss. 2, Art. 10.
7. Kilbas A. A., Srivastava H., Trujillo J. *Theory and applications of fractional differential equations* // [B] North-Holland Mathematics Studies (204). Amsterdam: Elsevier. xv. 2006.
8. Luchko Y. F., Gorenflo R. *The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivatives* // Fachbereich Math. Und Inf. A 8. 1998. Vol. 98. P. 1–23.

### АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук<sup>1</sup>, Е.Н. Защук<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь  
aizhuk85@mail.com, shvichkina@tut.by

Рассмотрим следующую систему на отрезке  $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$ :

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), i = \overline{1, p} \tag{1}$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$  - некоторые функции,  $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ , а  $L^i(t), i = \overline{1, q}$  - функции ограниченной вариации на отрезке  $T$ . Без ограничения общности будем считать, что функции  $L^j(t), j = \overline{1, q}$  непрерывны справа,  $L^j(0) = L^j(0-) = 0$  и  $L^j(a-) = L^j(a), j = \overline{1, q}$ .

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1, p} \quad (2)$$

с начальным условием  $x_n(t)|_{[0, h_n]} = x_{n0}(t)$ . Здесь  $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s) \rho_n(s) ds$ , где  $\rho_n(t) = n\rho(nt)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\text{supp} \rho \subseteq [0, 1]$ ,  $\int_0^1 \rho(s) ds = 1$ , а  $f_n = f * \tilde{\rho}_n$ ,  $\tilde{\rho}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^{p+1} \tilde{\rho}(nx_0, nx_1, \dots, nx_p)$ ,  $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ ,  $\tilde{\rho} \geq 0$ ,  $\int_{[0, 1]^{p+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_p) dx_0 dx_1 \dots dx_p = 1$ ,  $\text{supp} \tilde{\rho} \subset [0, 1]^{p+1}$ .

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-)) dL^j(s), i = \overline{1, p} \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть  $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$  удовлетворяют условию линейного роста и ограничены.  $L^j(t), j = \overline{1, q}$  - непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при  $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$  так, что  $1/n = o(h_n)$ , решение  $x_n(t)$  задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в пространстве  $L^p(T)$ , если  $\frac{1}{h_n} (\int_0^{h_n} |x_{n0}(\tau_t) - x_0|^p dt)^{1/p} \rightarrow 0$ .

Аналогичные теоремы с другими условиями для функций  $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$  были рассмотрены в работах [1,2].

#### Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спаськов С. А. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізика, матэматыка, інфарматыка, біялогія, геаграфія. 2019. №4. С. 16–22.
2. Жук А. И., Хмызов А. К. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемифункций. Симметрический случай // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2010. №2. С. 87–93.

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УНИТАРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТРИПОТЕНТА В СОПРЯЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЙТРАЛЬНОГО SFS-ПРОСТРАНСТВА

М.М. Ибрагимов<sup>1</sup>, А.Д. Арзиев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Каракалпакский государственный университет, Ч.Абдилова 1, 230112 Нукус, Узбекистан, m.ibragimov1909@gmail.com

<sup>2</sup>Институт математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, Университетская 9, 100174 Ташкент, Узбекистан, allabayarziev@inbox.ru

Гранево симметричные пространства впервые введены и исследованы Я. Фридманом и Б. Руссо в работах [1-3] как геометрическая модель квантовой механики. Эти пространства обеспечивают соответствующую структуру, где изучается проблема характеристики единичного шара предсопряженного пространства  $JBW^*$ -тройки, описывая свойства выпуклого множества в геометрических терминах. В данной заметке мы покажем, что при некоторых геометрических условиях атомическое комплексное нейтральное сильно гранево симметричное пространство является линейно изометричным предсопряженному пространству конкретного спин фактора.

Спин фактор встречается в различных областях математики и физики. Существуют и используются несколько эквивалентных определений спин фактора. Мы приведем здесь определение,



данное Я. Фридманом и Б. Руссо в работе [1] на основе естественных алгебраических свойств спиновой решетки.

Пусть  $I$  множество индексов произвольной мощности. Базисом или спиновой решеткой является совокупность  $L$  линейно независимых элементов  $\{u_i, \tilde{u}_i\}_{i \in I}$  или  $\{u_0, u_i, \tilde{u}_i\}_{i \in I}$ . Определим тройное произведение  $\{uvw\}$  для элементов базиса следующим образом:

1.  $\{uuu\} = u$  для всех  $u \in L$ ;
2. для различных не нулевых  $i$  и  $j$  имеем

$$\begin{aligned} \{u_i u_i u_j\} &= \{\tilde{u}_i \tilde{u}_i u_j\} = \frac{1}{2} u_j, \quad \{u_j u_j u_i\} = \{\tilde{u}_j \tilde{u}_j u_i\} = \frac{1}{2} u_i, \quad \{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j\} = \frac{1}{2} \tilde{u}_j, \\ \{\tilde{u}_j \tilde{u}_j \tilde{u}_i\} &= \frac{1}{2} \tilde{u}_i, \quad \{u_i u_j \tilde{u}_i\} = -\frac{1}{2} \tilde{u}_j, \quad \{u_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j\} = -\frac{1}{2} u_i; \end{aligned}$$

3. случай, когда  $u_0$  существует, для каждого  $i \neq 0$

$$\{u_i u_i u_0\} = \{\tilde{u}_i \tilde{u}_i u_0\} = \frac{1}{2} u_0, \quad \{u_0 u_0 u_i\} = u_i, \quad \{u_0 u_0 \tilde{u}_i\} = \tilde{u}_i, \quad \{u_0 u_i u_0\} = -\tilde{u}_i, \quad \{u_0 \tilde{u}_i u_0\} = -u_i;$$

4.  $\{uvw\} = \{\omega vu\}$  для всех  $u, v, \omega \in L$ ;
5. все остальные умножения  $\{uvw\}$ , где  $u, v, \omega$  из базиса, равны нулю; в частности, для  $i \neq 0$

$$\{u_i \tilde{u}_i u\} = 0 = \{\tilde{u}_i u_i u\} \text{ для всех } u \in L.$$

Определим на  $spL$  внутреннее произведение

$$\langle a | b \rangle = \sum a_i \bar{b}_i + \sum \tilde{a}_i \bar{\tilde{b}}_i + 2a_0 \bar{b}_0, \quad (*)$$

где  $a = \sum a_i u_i + \sum \tilde{a}_i \tilde{u}_i + a_0 u_0$  и  $b = \sum b_i u_i + \sum \tilde{b}_i \tilde{u}_i + b_0 u_0$  – элементы  $L$ .

**Определение 1.** Множество  $spL$  с нормой  $\|\cdot\|_2$ , определенной внутренним произведением  $(*)$  называется конкретным спин фактором.

Пусть  $Z$  действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы  $f, g \in Z$  являются взаимно ортогональными, если  $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| + \|g\|$ , и обозначается  $f \diamond g$ . Выставленной по норме гранью единичного шара  $Z_1$  пространства  $Z$  является не пустое множество (обязательно  $\neq Z_1$ ) имеющий вид  $F_x = \{f \in Z_1 : f(x) = 1\}$ , где  $x \in Z^*$ ,  $\|x\| = 1$ . Для любого подмножества  $S \subset Z$  положим  $S^\diamond = \{f \in Z : f \diamond g, \forall g \in S\}$  и назовем  $S^\diamond$  ортогональным дополнением к  $S$ . Подмножества  $S, T \subset Z$  называются ортогональными ( $S \diamond T$ ), если  $f \diamond g$  для всех  $(f, g) \in S \times T$ . Элемент  $u \in Z^*$  называется проективной единицей, если  $\|u\| = 1$  и  $\langle u, F_u^\diamond \rangle = 0$ .

Определим симметричную грань как выставленную по норме грань  $F$  в  $Z_1$  со следующим свойством: существует линейная изометрия  $S_F$  из  $Z$  на  $Z$ , с  $S_F^2 = I$  (мы называем такое отображение симметрией) такая, что множество неподвижных точек  $S_F$  совпадает с  $\overline{sp}F \oplus F^\diamond$ .

**Определение 2.** Действительное или комплексное нормированное пространство  $Z$  называется слабо граниво симметричным пространством ( $WFS$ -пространством), если каждая выставленная по норме грань  $Z_1$  является симметричной.

Геометрическим (или обобщенным) трипотентом называется проективная единица  $u \in Z^*$  со свойством, что  $F := F_u$  является симметричной гранью и  $S_F^* u = u$  для некоторой симметрии  $S_F$  соответствующей  $F$ . Через  $G\mathcal{U}$  обозначим множество геометрических трипотентов в  $Z^*$ .

На  $WFS$ -пространстве  $Z$  по каждой симметричной грани  $F_u$  определяются геометрические (или обобщенные) Пирсовские проекторы  $P_k(u)$ ,  $k = \{0, 1, 2\}$  следующим образом:

$$P_1(u) = \frac{1}{2}(I - S_{F_u}), \quad P_1(u)(Z) = \{f \in Z : S_{F_u} f = -f\};$$

$P_0(u)$  и  $P_2(u)$  проектируют  $Z$  на  $F_u^\diamond$  и  $\overline{sp}F_u$ , соответственно.

Нормированное пространство  $Z$  называется нейтральным, если для каждой симметричной грани  $F_u$  соответствующий проектор  $P_2(u)$  является нейтральным.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$Z^* = U, \quad P_k(u)(Z) = Z_k(u), \quad Z_k^*(u) = U_k(u), \quad S_{F_u} = S_u, \quad \text{где } k \in \{0, 1, 2\}.$$

**Определение 3.** *WFS-пространство  $Z$  называется сильно граниво симметричным пространством (SFS-пространством), если для каждой симметричной грани  $F_u$  из  $Z_1$  и каждого  $v \in Z^*$  с  $\|v\| = 1$  и  $F_u \subset F_v$  имеем  $S_u^*v = v$ , где  $S_u$  – симметрия, соответствующая  $F_u$ .*

В нейтральном SFS-пространстве  $Z$  для  $f \neq 0$ , через  $v(f)$  обозначается единственный геометрический трипотент  $v$  для которого  $\langle f, v \rangle = \|f\|$  и  $\langle v, \{f\}^\circ \rangle = 0$

Пусть  $Z$  – WFS-пространство.

–  $Z$  называется *атомическим*, если каждая симметричная грань  $F_u$  из  $Z_1$  содержит экстремальную точку.

– геометрические трипотенты  $u$  и  $v$  являются *коллинеарными*, если  $u \in U_1(v)$  и  $v \in U_1(u)$ , обозначается  $u \top v$ .

– геометрический трипотент  $\omega \in Z^*$  называется *унитарным*, если  $Z_2(\omega) = Z$ .

**Определение 4.** *Говорят, что SFS-пространство  $Z$  удовлетворяет условию*

– *PE, если каждая экстремальная точка единичного шара  $Z_1$  является выставленной по норме точкой;*

– *FE, если  $Z$  является нейтральным и каждая замкнутая по норме грань  $Z_1$  (отличная от  $Z_1$ ) является выставленной по норме гранью;*

– *STP, если для любой пары экстремальных точек  $f$  и  $g$  выполняется равенство  $\overline{\langle f, v_g \rangle} = \langle g, v_f \rangle$ , где  $\overline{\langle f, v_g \rangle}$  – комплексное сопряженное числа  $\langle f, v_g \rangle$ ;*

– *ERP, если для каждого  $u \in G\mathcal{U}$  и каждого  $f \in \text{ext } Z_1$  существуют  $\alpha \in K$  и  $h \in \text{ext } Z_1$  такие, что  $P_2(u)f = \alpha h$ , где  $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ;*

– *JP, если для любой пары  $u$  и  $v$  взаимно ортогональных геометрических трипотентов выполняется равенство  $S_{u+v} = S_u S_v$ .*

**Предложение 1.** *Пусть  $Z$  – атомическое комплексное нейтральное SFS-пространство  $Z$  с условиями PE, FE, STP, ERP и JP. Пусть  $\omega$  унитарный геометрический трипотент и  $f \in \text{ext } F_\omega$ . Если существует геометрический трипотент  $u$  коллинеарный с  $v(f)$ , то  $Z$  является линейно изометричным предсопряженному пространству конкретного спин фактора.*

### Литература

1. Friedman Y., Russo B. *A geometric spectral theorem* // The Quarterly Journal of Mathematics. 1986. Vol. 37, No 2. P. 263–277.
2. Friedman Y., Russo B. *Affine structure of facially symmetric spaces* // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1989. Vol. 106, No 1. P. 107–124.
3. Friedman Y., Russo B. *Some affine geometric aspects of operator algebras* // Pacific Journal of Mathematics. 1989. Vol. 137, No 1. P. 12–144.

## 2-ЛОКАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР АРЕНСА

Т.С. Каландаров<sup>1</sup>, Б.О. Нуржанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,  
Ч.Абдирова 1, 230112 Нукус, Узбекистан, turaboy-kts@mail.ru

<sup>2</sup>Каракалпакское отделение Института математики им. В.И. Романовского АН РУз,  
Ч.Абдирова 1, 230112 Нукус, Узбекистан, nurjanov@list.ru

В теории операторов отображения играют важную роль при изучении алгебр операторов. Отображения, такие как изоморфизм, гомоморфизм, дифференцирование и автоморфизм, локальные дифференцирование и локальные автоморфизм на различных алгебрах операторов, определенных в гильбертовых пространствах, изучались в ряде исследований ([1]–[4]).

Понятия 2-локального дифференцирования и 2-локального автоморфизма, были введены впервые в работе [1]. Шемрлем было доказано, что каждый 2-локальный автоморфизм алгебры всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве, является автоморфизмом. В работе [2] было показано, что каждый 2-локальный

автоморфизм на алгебре всех ограниченных линейных операторов на произвольном гильбертовом пространстве, является автоморфизмом.

В [3] были изучены 2-локальные дифференцирования на  $AW^*$ -алгебрах, и было показано, что любое 2-локальное дифференцирование на произвольной  $AW^*$ -алгебре является дифференцированием. А в [4] был доказан аналог результата, полученный в работе [3] для 2-локальных дифференцирований на  $AW^*$ -алгебрах на случай 2-локальных автоморфизмов на  $AW^*$ -алгебрах. А именно, было доказано, что всякий 2-локальный автоморфизм на произвольной  $AW^*$ -алгебре без конечной прямой слагаемой типа I, является автоморфизмом.

Одним из важных классов неограниченных операторных алгебр являются алгебры Аренса, которые впервые в коммутативном случае были рассмотрены Аренсом [5]. Некоммутативные алгебры Аренса были рассмотрены Иноуи в работе [6].

Настоящая работа посвящена изучению 2-локальных внутренних автоморфизмов алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана.

Пусть  $S(M, \tau)$  – множество всех  $\tau$ -измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана  $M$ .

Для  $p \geq 1$  положим

$$L^p(M, \tau) = \{x \in S(M, \tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}.$$

Тогда множество  $L^p(M, \tau)$  – банахово пространство, относительно нормы

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M, \tau).$$

Рассмотрим множество  $L^\omega(M, \tau) = \bigcap_{p \geq 1} L^p(M, \tau)$ .

В работе [7] показано, что  $L^\omega(M, \tau)$  является полной локально выпуклой метризуемой  $*$ -алгеброй относительно топологии, порожденной системой норм  $\{\|\cdot\|_p\}_{p \geq 1}$ .

Алгебра  $L^\omega(M, \tau)$  называется алгеброй Аренса.

Отображение  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  (не обязательно линейное) называется 2-локальным внутренним автоморфизмом, если для каждой пары  $x, y \in \mathcal{A}$  существует унитарный элемент  $u \in \mathcal{A}$  такой, что

$$\Phi(x) = uxi^* \quad \text{и} \quad \Phi(y) = uyi^*.$$

Используя [Lemma 3.1, 8] и [Theorem H, 9] доказывается следующая

**Теорема 2.1.** Пусть  $M$  – произвольная полуконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом  $\tau$ . Тогда всякий сюръективный 2-локальный внутренний автоморфизм алгебры Аренса  $L^\omega(M, \tau)$  является автоморфизмом.

По этой теореме и теореме 3.1 из [10] получим следующий результат.

**Теорема 2.2.** Пусть  $M$  – произвольная алгебра фон Неймана типа I. Тогда всякий сюръективный 2-локальный внутренний автоморфизм  $\Phi : L^\omega(M, \tau) \rightarrow L^\omega(M, \tau)$  является внутренним автоморфизмом, т.е. существует унитарный элемент  $u \in L^\omega(M, \tau)$  такой, что

$$\Phi(x) = uxi^*$$

при всех  $x \in L^\omega(M, \tau)$ .

### Литература

1. Šemrl P. Local automorphisms and derivations on  $B(H)$  // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.
2. Ayupov Sh., Kudaybergenov K. 2-local derivations and automorphisms on  $B(H)$  // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395, No 1. P. 15–18.
3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. 2-Local derivations on matrix algebras over semi-prime Banach algebras and on  $AW^*$ -algebras // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 697. P. 1–10.
4. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Kalandarov T. 2-Local Automorphisms on  $AW^*$ -algebras, in book Positivity and Noncommutative Analysis. Springer Nature Switzerland AG, 2019. P. 1–13.
5. Arens R. The space  $L^\omega$  and convex topological rings // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 92. P. 931–935.
6. Inoue A. On a class of unbounded operator algebras II // Pacific J. Math. 1976. Vol. 66, No 2. P. 411–431.

7. Абдуллаев Р. З. *Пространства сопряженные к коммутативным алгебрам Аренса* // Узб. мат. журнал. 1997. № 2. С. 3–7.
8. Ayupov Sh. A., Kudaibergenov K. K., Nurjanov B. O., Alauadinov A. K. *Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras* // Mathematica Slovaca. 2014. Vol. 64, No 2. P. 423–432.
9. Herstein I. N. *Jordan homomorphisms* // Trans. Am. Math. Soc. 1956. Vol. 81. P. 331–351.
10. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К., Каландаров Т. С. *\*-автоморфизмы алгебры Аренса ассоциированной с алгеброй фон Неймана типа I* // Узб. Мат. Жур. 2007. № 4. С. 9–17.

## О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.Х.Каримов<sup>1</sup>, Дж.И.Набиев<sup>2</sup>,

<sup>1,2</sup>Институт математики им. А.Джураева НАНТ, 734063, Душанбе, Таджикистан,  
karimov\_olim72@mail.ru

Доклад посвящён коэрцитивной разрешимости систем дифференциальных уравнений четвёртого порядка в весовом пространстве. В работах [1]-[6] и имеющихся там ссылках исследуется разделимость и коэрцитивная разрешимость.

Пусть  $\rho(x)$  - положительная функция, определённая в  $R^n$ ,  $l$  - некоторое натуральное число. Символом  $L_{2,\rho}(R^n)^l$  - обозначим пространство вектор-функций  $u(x) = (u_1(x), \dots, u_l(x), u_j(x) \in L_2(R^n), (j = \overline{1, l})$  с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{j=1}^l \int_{R^n} \rho(x) |u_j(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим в пространстве  $L_{2,\rho}(R^n)^l$  дифференциальный оператор

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad (x \in R^n) \quad (1)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа и значения  $V(x)$  ( $x \in R^n$ ) являются положительно-определёнными эрмитовыми  $(l \times l)$  матрицами. За область определения оператора (1) примем множество всех  $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W_{2,loc}^4(R^n)^l$  таких, что  $L[u] \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ .

**Определение.** Уравнение (1) и соответствующий ему дифференциальный оператор называются разделимыми в  $L_{2,\rho}(R^n)^l$ , если  $\Delta^2 u(x), V(x)u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$  для всех  $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W_{4,loc}^2(R^n)^l$  таких, что  $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ .

Учитывая результат о разделимости оператора (1) (Теорема 1 [6]), получим следующий результат:

**Теорема.** Пусть оператор (1) разделяется в пространстве  $L_{2,\rho}(R^n)^l$ , а весовая функция  $\rho(x)$  и положительные функции  $\Psi(x) \in C^1(R^n)$   $\chi(x) \in C^1(R^n)$  удовлетворяют неравенствам с постоянными величинами  $\delta_1, \delta_2$ :

$$\begin{aligned} \|\Psi^{-1}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| &\leq 2\sqrt{\delta_1}, \\ \|\chi^{-1}(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| &\leq 2\sqrt{\delta_2}, \\ \|\rho^{-1}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| &\leq 2\sqrt{\delta_3}, \\ \|\chi^{\frac{1}{2}} \Psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\| &\leq 2\sqrt{\delta_4} \|\chi^{\frac{1}{2}} \Psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u\|. \end{aligned}$$

Тогда при выполнении условий

$$0 < \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 < \frac{\alpha}{2n}, \quad \alpha > 0,$$

система дифференциальных уравнения (1) при всех  $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$  имеет единственное решение в пространстве  $L_{2,\rho}(R^n)^l$ .

## Литература

1. Everitt W. N., Giertz M. *Some properties of the domains of certain differential operators* // London Math.Soc. 1971. Vol. 23, No 3. P. 301–324.
2. Бойматов К. Х. *Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
3. Zayed E. M. E. *Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with the existence and uniqueness theorem* // J.Math. Anal.Appl. 2008. No 337. P. 659–666.
4. Каримов О. Х. *О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом* // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 1. С. 55–62.
5. Karimov O. Kh. *On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces* // Journal of mathematical sciences. 2019. Vol. 241, No 5. P. 589–595.
6. Каримов О. Х. Набиев Дж. И. *Разделимость для бигармонического оператора с матричным потенциалом в весовом пространстве* // Известия НАНТ, Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2024. № 4 (189). С. 47–55.

## ФРЕДГОЛЬМОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Д.И. Кравцов <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, механико-математический факультет  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
kravtsov.dmitriy1506@yandex.by

1. Операторы взвешенной композиции (взвешенного сдвига) представляют самостоятельный интерес, а также с связи с их использованием в теории уравнений с отклоняющимся аргументом и теории динамических систем, поэтому исследованию их свойств посвящены работы многих авторов [1].

Оператор взвешенной композиции строится с помощью заданного отображения  $\alpha : X \rightarrow X$  множества  $X$  в себя и функции  $a(x)$ , которую обычно называют весом. Он действует на функцию  $u$  из заданного пространства функции  $F(X)$  по формуле

$$Vu(x) = a(x)u(\alpha(x)).$$

Общей целью является исследование порожденных такими операторами функциональных уравнений вида

$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \tag{1}$$

В данной работе рассматривается конкретный класс таких уравнений, когда  $X = [0, 1]$ ,  $\alpha$  есть диффеоморфизм отрезка  $[0, 1]$ , такой, что  $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) > 1; \alpha(1) = 1, \alpha'(1) < 1$  и  $\alpha(x) > x$  при  $0 < x < 1$  и предполагается, что  $a \in C^1[0; 1], a(x) \neq 0$ .

Известно [2], что в пространстве  $L_2[0, 1]$  при некоторых условиях на вес  $a$  существует такое кольцо  $K_0$  на комплексной плоскости, что оператор  $B - \lambda I$  обратим справа при  $\lambda \in K_0$ . При таких  $\lambda$  уравнение (1) разрешимо при любой правой части и при этом однородное уравнение имеет бесконечномерное пространство решений. Поэтому для однозначной разрешимости к уравнению нужно присоединить дополнительные условия которые, по аналогии со случаем дифференциальных уравнений, называют *краевыми условиями*. Обычно рассматриваются условия вида

$$\Gamma u = 0, \tag{2}$$

где  $\Gamma$  некоторый линейный оператор (т.н. *граничный оператор*), и основная проблема заключается в том, чтобы выяснить, какой вид должен иметь граничный оператор, чтобы у уравнения (1) существовало единственное решение, удовлетворяющее условию (2). В пространстве  $L_2[0; 1]$  вид таких операторов известен [2].

При рассмотрении уравнения (1) в пространствах Соболева  $H^s[0, 1]$  оказалось, что возникают зависящие от  $s$  кольца  $K_s$  на комплексной плоскости, такие что при  $\lambda \in K_s$  оператор  $B - \lambda I$  в

пространстве  $H^s[0, 1]$  является  $\Phi^+$  оператором — имеет замкнутый образ, бесконечномерное ядро и конечномерное коядро (см. тезис А.Б.Антоневича и В.А.Борбута в настоящем сборнике).

Возникает вопрос о том, как в пространстве Соболева задать краевые условия для уравнения (1), чтобы полученная задача была фредгольмовой. В данной работе такие краевые условия получены в случае пространства  $H^1[0, 1]$ .

2. Пусть  $\tilde{B}$  есть оператор взвешенного сдвига в пространстве  $L_2[0; 1]$ , заданный формулой

$$\tilde{B}u = \alpha'(x)a(x)u(\alpha(x)).$$

**Лемма.** Спектр оператора  $B$  в  $H^1[0, 1]$  может отличаться от спектра оператора  $\tilde{B}$  в  $L_2[0; 1]$ , но их фредгольмовы и полуфредгольмовы спектры совпадают.

**Следствие.** Оператор  $B - \lambda I$  в пространстве  $H^1[0, 1]$  является  $\Phi^+$ -оператором тогда и только тогда, когда оператор  $\tilde{B} - \lambda I$  в  $L_2[0; 1]$  обратим справа.

Для построенного оператора  $\tilde{B}$  значения  $\lambda$ , при которых оператор  $\tilde{B} - \lambda I$  обратим справа, существуют, если

$$\alpha'(0)^{1+\frac{1}{2}}|a(0)| < \alpha'(1)^{1+\frac{1}{2}}|a(1)|$$

и такие значения образуют кольцо

$$K_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha'(0)^{1+\frac{1}{2}}|a(0)| < |\lambda| < \alpha'(1)^{1+\frac{1}{2}}|a(1)|\}.$$

Таким образом, согласно следствию, краевые условия для уравнения (1) в  $H^1[0, 1]$  нужно задавать при таких  $\lambda$ .

3. Воспользовавшись результатами для  $L_2[0; 1]$ , получаем, что граничные операторы можно задавать в следующем виде.

Пусть  $\Omega = [1/2, \alpha(1/2))$ . Это одна из т.н. фундаментальных областей для отображения  $\alpha$  [2].

Среди операторов взвешенного сдвига, порожденных  $\alpha$  и действующих в  $L_2[0; 1]$ , выделим оператор, заданный формулой

$$(T_\alpha u)(x) = [\alpha'(x)]^{\frac{1}{2}}u(\alpha(x)),$$

который является обратимым изометрическим оператором.

В качестве граничных рассмотрим операторы  $\Gamma_\eta$ , действующие их  $H^1[0, 1]$  в пространство функций на  $\Omega$ , имеющие вид

$$(\Gamma_\eta u)(\tau) = \sum_k \eta_k(\tau)(T_\alpha^k u)'(\tau),$$

где  $\eta$  есть измеримая функция на  $\Omega$  со значениями в  $l_2(\mathbb{Z})$ , ее значения в точке  $\tau \in \Omega$  есть двусторонняя числовая последовательность  $\eta_k(\tau)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Для  $\lambda \in K_1$  и  $\tau \in \Omega$  числовая последовательность

$$\omega_{\lambda, \tau}(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(\alpha^j(\tau))}, & k \geq 0; \\ \frac{\prod_{j=k}^{-1} a(\alpha^j(\tau))}{\lambda^{-k}}, & k < 0, \end{cases}$$

принадлежит  $l_2(\mathbb{Z})$  и определена функция

$$Q_\eta(\tau, \lambda) = \langle \omega_{\lambda, \tau}, \eta(\tau) \rangle_{l_2}.$$

**Теорема.** При следанных выше предположениях, если

$$\alpha'(0)^{1+\frac{1}{2}}|a(0)| < |\lambda| < \alpha'(1)^{1+\frac{1}{2}}|a(1)|$$

то в пространстве  $H^1[0; 1]$  краевая задача для уравнения (1) с условием

$$\Gamma_\eta u(\tau) = 0$$

фредгольмова тогда и только тогда, когда при заданном  $\lambda$  величина  $\frac{1}{Q_\eta(\tau, \lambda)}$  ограничена почти всюду как функция переменной  $\tau$ .

Литература

1. Антоневиц А. Б. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*. М.: Университетское, 1988.
2. Антоневиц А. Б. *Правосторонняя обратимость двухчленных функциональных операторов и градуированная дихотомия* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67, № 2. С. 208–236

О СКОШЕННЫХ  $\mu$  - ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ

Е.Ю. Кузьменкова<sup>1</sup>, А.Р. Миротин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, katuha66@tut.by, amirotin@yandex.ru

В докладе рассматриваются четыре типа операторов, действующих между гильбертовыми пространствами, обобщающие как класс операторов, введенный в [1], так и класс операторов, введенный в [2]. Описывается связь между этими типами операторов и характеризующие их коммутационные соотношения.

Пусть  $\mu$  — комплексное число,  $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \geq 0}$ ,  $\beta = \{\beta_j\}_{j \geq 0}$ ,  $\gamma = \{\gamma_j\}_{j \geq 0}$ ,  $\delta = \{\delta_j\}_{j \geq 0}$  — последовательности комплексных чисел,  $p \in \mathbb{N}$ , и пусть  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  — сепарабельные гильбертовы пространства. Введем операторы следующих типов:

**Определение 1.** Оператор  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  назовем скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа [A] (порядка  $p$ ), если для некоторых ортонормированных базисов  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  и  $(e'_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{H}'$  матрица  $(a_{jk})_{k,j}$  этого оператора в этих базисах (напомним, что  $a_{jk} = \langle Ae_k, e'_j \rangle$ ; угловые скобки обозначают скалярное произведение) состоит из элементов вида

$$a_{jk} = \mu^k \alpha_{p k + j}.$$

**Определение 2.** Оператор  $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  назовем скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа [B] (порядка  $p$ ), если для некоторых ортонормированных базисов  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  и  $(e'_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{H}'$  матрица  $(b_{jk})_{k,j}$  этого оператора в этих базисах состоит из элементов вида

$$b_{jk} = \mu^k \beta_{k + p j}.$$

**Определение 3.** Оператор  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  назовем скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа [C] (порядка  $p$ ), если для некоторых ортонормированных базисов  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  и  $(e'_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{H}'$  матрица  $(c_{jk})_{k,j}$  этого оператора в этих базисах состоит из элементов вида

$$c_{jk} = \mu^j \gamma_{p k + j}.$$

**Определение 4.** Оператор  $D : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  назовем скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа [D] (порядка  $p$ ), если для некоторых ортонормированных базисов  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  и  $(e'_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{H}'$  матрица  $(d_{jk})_{k,j}$  этого оператора в этих базисах имеет вид

$$d_{jk} = \mu^j \delta_{k + p j}.$$

Связь между операторами указанных типов устанавливает следующая

**Лемма.** 1). Сопряженный к скошенному  $\mu$ -ганкелеву оператору  $A_{\mu, \alpha, p}$  типа [A] есть оператор  $B_{\nu, \beta, p}$  типа [B], где  $\nu = \frac{1}{\bar{\mu}^{1/p}}$ ,  $\beta_n = \bar{\mu}^{n/p} \bar{\alpha}_n$ .

2) Сопряженный к скошенному  $\mu$ -ганкелеву оператору  $C_{\mu, \gamma, p}$  типа [C] есть оператор  $D_{\nu, \delta, p}$  типа [D], где  $\nu = \frac{1}{\bar{\mu}^p}$ ,  $\delta_n = \bar{\mu}^n \bar{\gamma}_n$ .

Следующий результат характеризует типы скошенных  $\mu$ -ганкелевых операторов как операторы, удовлетворяющие некоторому коммутационному соотношению. Ниже  $S$  — оператор сдвига в  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .

**Теорема. 1.** (Ср. [3]). Ограниченный оператор  $A$  в пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  является скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа  $[A]$  в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$AS = \mu S^* P A.$$

2. (Ср. [3]) Ограниченный оператор  $B$  в пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  является скошенным  $\nu$ -ганкелевым типа  $[B]$  в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$BS^P = \nu^P S^* B.$$

3. Ограниченный оператор  $C$  в пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  является скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа  $[C]$  в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$CS = \frac{1}{\mu^P} S^* P C.$$

4. Ограниченный оператор  $D$  в пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  является скошенным  $\nu$ -ганкелевым типа  $[D]$  в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$DS^P = \frac{1}{\nu} S^* D.$$

#### Литература

1. Mirotin A. R., Kuzmenkova E. Yu.  $\mu$ -Hankel operators on Hilbert spaces // Opuscula Math. 2021. Vol. 41, No 6. P. 881—898.
2. Arora S. C., Batra R., Singh M. P. Slant Hankel operators // Arch. Math. (Brno). 2006. Vol. 42, No 2. P. 125–133.
3. Bholá J., Gupta B. Generalized  $(C, r)$ -Hankel operator and  $(R, r)$ -Hankel operator on general Hilbert spaces // Commun. Korean Math. Soc. 2023. Vol. 38, No 3. P. 821—835.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОСЬМИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина<sup>1</sup>, А.Б. Антоневиц<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Брестский государственный технический университет,  
Московская 267, 224017 Брест, Беларусь elena\_kuzmina@inbox.ru

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь antonevich@bsu.by

В работе [1] была построена иерархия уравнений со свойством Пенлеве, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Предметом исследования является третье уравнение из иерархии Риккати на комплексной плоскости

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0 \quad (1)$$

и такое же уравнение на вещественной прямой

$$u'''(x) + \gamma^3 u^4(x) + 6\gamma^2 u^2(x)u'(x) + 4\gamma u(x)u''(x) + 3\gamma u'^2(x) = 0. \quad (2)$$

Как показано в [1], уравнению (1) удовлетворяет формальный ряд вида

$$w = \frac{1}{\gamma(z-a)} + c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + c_4(z-a)^3 + c_5(z-a)^4 + \dots, \quad (3)$$

где  $c_1 = h_1$ ,  $c_2 = h_2$ ,  $c_3 = -\frac{3}{2}\gamma h_1 h_2 - \frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3$ ,  $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$ ,  $c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2$ , коэффициенты  $c_j$ ,  $j > 5$ , однозначно определяются через произвольные параметры  $a, h_1, h_2$ .



**Лемма.** Ряд в (3) сходится в области  $|z - a| < \rho$ , где  $\rho = \min \left\{ \frac{1}{|\gamma k_1|}, \frac{1}{|\gamma k_2|} \right\}$ ,

$$k_1 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2},$$

и его сумма есть функция

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)} + \frac{k_1}{1 + \gamma k_1(z-a)} + \frac{k_2}{1 + \gamma k_2(z-a)}, \quad (3)$$

где знаком  $\sqrt{\phantom{x}}$  обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции.

Функция (3), ввиду аналитичности, является решением уравнения (1) на всей комплексной плоскости, кроме точек  $a$ ,  $b = a - \frac{1}{\gamma k_1}$  и  $c = a - \frac{1}{\gamma k_2}$ , являющихся полюсами. Семейство решений (3) зависит от трех параметров и эти решения являются рациональными функциями. Такое решение однозначно определяется по условиям Коши в точке  $z_0$ , в частности, по условиям Коши однозначно определяются полюса решения.

Пусть  $u(x)$  есть решение задачи Коши на прямой для уравнения (2) с начальными условиями  $u(x_0) = C_1$ ,  $u'(x_0) = C_2$ ,  $u''(x_0) = C_3$ , где  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ , а  $w(z)$  есть решение уравнения (1) с теми же начальными условиями. Если  $w(z)$  имеет полюсы на прямой, то эти полюсы делят прямую на части и на вещественной оси решение задачи Коши с начальными условиями в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  однозначно определено только на одной из этих частей, содержащей точку  $x_0$ . Но аналитическое решение  $w(z)$  задает функцию, однозначно определенную на всей прямой, которую будем называть *формальным решением задачи Коши для уравнения (2)*.

В приложениях в качестве математических моделей ряда физических процессов используются дифференциальные уравнения и считается, что решение уравнения задает состояние рассматриваемой физической системы, например распределение вещества на прямой. Математическими объектами, наиболее адекватно задающими состояния, являются обобщенные функций, что подчеркивается в предложенном Л. Шварцем их названии *распределения*.

Если решение  $u(x)$  есть локально интегрируемая функция, то ей соответствует однозначно определенная обобщенная функция и она задает состояние. Но если полюсы  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат на вещественной прямой, то функция  $u(x)$  не является локально интегрируемой и ей соответствует семейство обобщенных функций (распределений), зависящее от трех произвольных постоянных.

Рассматриваемые ниже вопросы связаны с тем, что обобщенная функция не может быть подставлена в уравнение (2), так как для обобщенных функций не определена операция возведения в степень и непосредственная подстановка обобщенной функции в уравнение невозможна. Поэтому основная проблема заключается в том, чтобы придать смысл понятию обобщенного решения и выяснить, какие из распределений, соответствующих формальному решению, являются обобщенными решениями.

Применим подход, основанный на аппроксимации начальных условий, использованный в [2] и [3] для построения обобщенных решений первого и второго уравнений иерархии Риккати.

*Аппроксимацией начальных условий* будем называть три комплексно-значные функции  $C_1(\varepsilon)$ ,  $C_2(\varepsilon)$ ,  $C_3(\varepsilon)$  положительного малого параметра  $\varepsilon$ , такие, что

$$C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1, \quad C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2, \quad C_3(\varepsilon) \rightarrow C_3 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Пусть  $w_\varepsilon(x)$  есть решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями  $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$ ,  $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$ ,  $w''_\varepsilon(x_0) = C_3(\varepsilon)$ . Аппроксимацию начальных условий будем называть *допустимой*, если функции  $w_\varepsilon(x)$  не имеют особенностей на вещественной оси и в пространстве обобщенных функций на прямой существует предел семейства  $w_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Определение.** *Обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (2) с условиями  $u(x_0) = C_1$ ,  $u'(x_0) = C_2$ ,  $u''(x_0) = C_3$  при заданном допустимом способе аппроксимации начальных условий будем называть предел  $W$  семейства  $w_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Основной результат заключается в доказательстве того, что при наличии трех различных полюсов у формального решения существует ровно восемь качественно разных допустимых способов

аппроксимации и, соответственно, существует восемь разных обобщенных решений задачи Коши с заданными начальными условиями. Вид обобщенного решения зависит от расположения полюсов функции  $w_\varepsilon(x)$  выше или ниже вещественной оси.

В зависимости от начальных условий возможны также вырожденные случаи, когда формальное решение на прямой имеет один или два полюса. Тогда задача Коши имеет меньшее количество обобщенных решений.

### Литература

1. Грицук Е. В., Кузьмина Е. В. *Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве* // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізика. Матэматыка. 2017. № 2. С. 64–72.
2. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения уравнения Риккати* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58, № 2. С. 144–154.
3. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати* // Проблемы физики, математики и техники. 2022. № 2 (51). С. 68–75.

## ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ АДАМАРА И МЕТОДЕ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА – ЭЙТКЕНА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

А.В. Лебедев<sup>1</sup>, Ю.В. Трубников<sup>2</sup>, М.М. Чернявский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
lebedev@bsu.by

<sup>2</sup>Витебский государственный университет, Московский просп. 33, 210038 Витебск, Беларусь,  
yurii\_trubnikov@mail.ru, misha360ff@mail.ru

В докладе развит метод Эйлера – Лагранжа вычисления всех корней произвольного полинома  $P(z)$  с комплексными коэффициентами, на базе подсчёта пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли – Эйткиена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$ .

Пусть  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ;  $a_0, a_n \neq 0$  – произвольный полином степени  $n$ , для которого 0 не является корнем, т.е.

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_p)^{m_p},$$

где  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$  – сумма кратностей корней  $z_j$  и  $z_i \neq z_j$  при  $i \neq j$  и  $z_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Вместе с полиномом  $P(z)$  рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (1)$$

Здесь правая часть – разложение функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$  в ряд Тейлора в окрестности нуля.

По коэффициентам  $c_k$  ряда (1) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел  $(k, r)$ ,  $k \geq 0, r > 0$  определителем Адамара  $H_{k,r}$  называется определитель

$$H_{k,r} := \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+r-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+r-1} & c_{k+r} & \dots & c_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| < |z_{r+1}| \leq |z_{r+2}| \leq \dots \leq |z_p|$  (для  $r = p - 1$  условие записывается как  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_{p-1}| < |z_p|$ ). Тогда

$$\frac{H_{k,p}}{H_{k+1,p}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_p,$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_r.$$

При этом

$$\left| \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} - z_1 \cdot \dots \cdot z_r \right| < Cq^k,$$

где

$$0 < q = \frac{|z_r|}{|z_{r+1}|} < 1.$$

**Теорема 2.** Пусть  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| = |z_{r+1}| \leq |z_{r+2}| \leq \dots \leq |z_p|$ . Тогда не существует предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}$ .

Вышеприведённые результаты позволяют вычислять корни многочлена  $P(z)$ , начиная с наименьшего по модулю  $0 < |z_1| < |z_2| < \dots$ . Аналогичная процедура вычисления корней полинома, начиная с наибольшего по модулю осуществляется на базе разложения функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$  в ряд Лорана в окрестности бесконечности (т.е. для  $|z| > \max_{1 \leq j \leq p} |z_j|$ )

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \tag{2}$$

с помощью соответствующих определителей Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел  $(k, r)$ ,  $k \geq 0, r > 0$  определителем Адамара  $\mathbf{H}_{k,r}$  (для ряда (2)) называется определитель

$$\mathbf{H}_{k,r} := \begin{vmatrix} b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k+r-1} \\ b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k+r-1} & b_{k+r} & \dots & b_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $|z_p| \geq |z_{p-1}| \geq \dots \geq |z_{p-r+1}| > |z_{p-r}| \geq |z_{p-r-1}| \geq \dots \geq |z_1| > 0$  (для  $r = p - 1$  условие записывается как  $0 < |z_1| < |z_2| \leq \dots \leq |z_p|$ ). Тогда

$$\frac{\mathbf{H}_{k+1,p}}{\mathbf{H}_{k,p}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_p,$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} = z_{p-r+1} \cdot \dots \cdot z_p.$$

При этом

$$\left| \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} - z_{p-r+1} \cdot \dots \cdot z_p \right| < Cq^k, \tag{6}$$

где

$$0 < q = \frac{|z_{p-r}|}{|z_{p-r+1}|} < 1.$$

**Теорема 4.** Пусть  $|z_p| \geq |z_{p-1}| \geq \dots \geq |z_{p-r+1}| = |z_{p-r}| \geq |z_{p-r-1}| \geq \dots \geq |z_1| > 0$ . Тогда не существует предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}$ .

Доказательства этих результатов и просчёт на их базе конкретных примеров вычисления всех корней полиномов представлены в [1].

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор с БРФФИ № Ф23М- 003).

### Литература

1. Лебедев А. В., Трубников Ю. В., Чернявский М. М. Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов // Математические заметки. 2024. Т. 116, вып 1. С. 91–108.

**ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ  
АЛГЕБР РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

**И.Л. Люксембург**

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,  
Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
Luxemburg@im.bas-net.by

**Введение.** Объектом исследования являются алгебры  $R_A[0; 1]$  всех комплекснозначных функций, которые определены на сегменте  $[0; 1]$ , непрерывны слева в каждой точке, непрерывны в 0 и на  $(0; 1) \setminus A$ , а на  $A \subset (0; 1)$  и имеют разрывы лишь разрывы 1 рода. Операции сложения, произведения, а также умножения на скаляр вводятся стандартно, а норму определим следующим образом:  $\|x\| = \sup_{t \in [0; 1]} |x(t)|$ . Согласно общей теории коммутативных банаховых алгебр [см. с. 11, 3],

эти алгебры изоморфны алгебрам всех непрерывных функций на вспомогательных топологических пространствах, которые являются пространствами максимальных идеалов этих алгебр.

Целью работы является построение этих пространств в явном виде. В результате исследования обнаружено, что возникшее здесь пространство  $\mathfrak{T}$  имеет интересную топологическую структуру и изучалось ранее с разных точек зрения, впервые оно было описано Александровым и Урысоном в их классической работе [2] и использовалось как контрпример для одной из метризации теорем. Впоследствии обнаруживались все новые и новые свойства  $\mathfrak{T}$ , в частности известно, что  $\mathfrak{T}$  — сепарабельно, не имеет счетной базы, вполне несвязно, совершенно нормально, но не метризуемо, не является диадическим компактом. Последнее удалось установить после отрицательного разрешения гипотезы о диадических компактах Есениным-Вольпиным, а также серии работ Александрова, Пономарева, Шанина и других. За пространством  $\mathfrak{T}$  закрепилось название "две стрелки".

В данной статье рассматриваются только коммутативные алгебры с единицей. А алгебры функций автоматически снабжаются стандартными операциями и равномерной нормой.

Пусть в банаховой алгебре  $A$  имеется максимальный идеал  $M$ , фактор-кольцо  $A$  по  $M$  будем обозначать  $A \setminus M$ , поскольку идеал максимален,  $A \setminus M$  — поле, по теореме Гельфанда–Мазура это поле изоморфно  $\mathbb{C}$ . Введем теперь для каждого элемента  $x \in A$  функцию, определенную на множестве максимальных идеалов  $\mathfrak{M}(A)$ . Положим  $x(M) = [r] \in A \setminus M : x \in [r]$ . Алгебру таких функций  $x : \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathbb{C}$  обозначают  $\hat{A}$ . Отображение  $A$  в  $\hat{A}$ , которое каждому элементу  $x \in A$  ставит в соответствие  $x(M) \in \hat{A}$  называется **каноническим гомоморфизмом** [3].

На множестве максимальных идеалов вводится слабейшая топология, для которой определенные выше функции непрерывны, она превращает  $\mathfrak{M}(A)$  в компактное хаусдорфово топологическое пространство [3].

Хорошо известно, что для алгебры  $C(X)$  всех комплекснозначных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте  $X$ , пространство максимальных идеалов состоит из идеалов функций, обращающихся в нуль в некоторой фиксированной точке этого компакта, а само пространство  $\mathfrak{M}(A)$  гомеоморфно  $X$ . Поэтому пространство максимальных идеалов часто называют "естественной" областью определения функций, действительно, для алгебры непрерывных функций их собственная область определения является естественной.

Для построения пространства максимальных идеалов  $R_A[0; 1]$  нам придется привлечь такое мощное орудие как порядок.

Пусть  $\mathfrak{T} = \{0, 1, (0; 1) \times \{0, 1\}\}$  введем на этом множестве порядок по правилам:

1)  $0 < t < 1 \quad \forall t \in \mathfrak{T}$ .

2) Если  $t_1, t_2 \neq 0, 1, t_1 = (x_1; y_1), t_2 = (x_2; y_2)$ , тогда  $t_1 > t_2$ , если  $x_1 > x_2$  или если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 > y_2$ .

На  $\mathfrak{T}$  введем топологию индуцированную порядком. Заметим, что полученное пространство компактно, это можно доказать используя следующий критерий компактности упорядоченных пространств:

**Теорема 1.** *Упорядоченное пространство  $X$  компактно тогда и только тогда, когда  $X$  не имеет сечений типа щель.*

Кроме того в работе[5] показано, что упорядоченный диадический компакт вкладывается в  $\mathbb{R}$ , что очевидно не верно для  $\mathfrak{T}$ . Рассмотрим  $C(\mathfrak{T})$ , поскольку  $\mathfrak{T}$  имеет счетную базу в каждой своей точке, о непрерывности функций можно говорить на языке последовательностей. Более того, каждая точка  $t_1 = (x_1; 0) \in L \setminus \{1\}$  и каждая точка  $t_2 = (x_2; 1) \in R \setminus \{0\}$  имеют определяющую систему окрестностей вида:

$$U(t_1, \delta) = \{a \in \mathfrak{T} : (x_1 - \delta; 1) < a < (x_1; 1)\}$$

$$U(t_2, \delta) = \{a \in \mathfrak{T} : (x_2; 0) < a < (x_2 + \delta; 0)\}$$

Аналогично для 0 и 1:

$$U(0, \delta) = \{a \in \mathfrak{T} : a < (\delta; 0)\}$$

$$U(1, \delta) = \{a \in \mathfrak{T} : a > (1 - \delta; 1)\}$$

Кроме того, чем меньше  $\delta$  тем "меньше" и окрестность. Это позволяет нам сформулировать следующие критерии непрерывности функции на  $\mathfrak{T}$ :

**Теорема 2.** Для того, чтобы функция была непрерывна на  $\mathfrak{T}$  необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева на  $L$  и непрерывна справа на  $R$ .

**Теорема 3.**  $f \in C(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{T} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t' \in U(t, \delta) \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon$

Обозначим  $\mathfrak{T}_A = \{0, 1, (t; 0) : t \in (0; 1), (t; 1) : t \in A \cap (0; 1)\}$ . На  $\mathfrak{T}_A$  рассмотрим топологию порожденную индуцированным из  $\mathfrak{T}$  порядком. Отметим, что полученная топология слабее индуцированной.

**Теорема 4.** *Отображение  $\varphi$ , которое каждой  $f \in R_A[0; 1]$  ставит в соответствие функцию  $\hat{f}$  определенную на  $\mathfrak{T}_A$ , по правилам:*

$$1) \hat{f}(0) = f(0)$$

$$1) \hat{f}(1) = f(1)$$

$$3) \hat{f}(x; 0) = f(x)$$

$$4) \hat{f}(x; 1) = f^+(x), \forall x \in A$$

*является изоморфизмом алгебр  $R_A[0; 1]$  и  $C(\mathfrak{T}_A)$ , множество максимальных идеалов  $R_A[0; 1]$  состоит из  $M_\tau$ , состоящих из функций обращающихся в нуль в точке  $\tau$  и идеалов  $M_\tau^+$ ,  $\tau \in A$ , состоящих из функций предел которых справа в точке  $\tau$  равен нулю, более того  $\mathfrak{M}(R_A[0; 1])$  гомеоморфно пространству  $\mathfrak{T}_A$ .*

Если  $A = \emptyset$ ,  $\mathfrak{T}_A$  есть исходный отрезок  $[0; 1]$ , если  $A = (0; 1)$ , то  $\mathfrak{T}_A = \mathfrak{T}$ . Если  $A$  не более чем счетно, то  $\mathfrak{T}_A$  имеет счетную базу, следовательно метризуемо (так как вполне регулярно), значит является диадическим компактом, поэтому вкладывается в действительную прямую (так как упорядочено). В противном случае, если  $A$  несчетно, то  $\mathfrak{T}_A$  есть не диадический компакт. Интерес представляет случай когда  $A$  есть множество двоичнорациональных чисел сегмента. В этом случае  $\mathfrak{T}_A$  гомеоморфно множеству Кантора и может быть представлено как множество двоичных разложений действительных чисел вида:  $0, a_1 a_2 a_3 \dots, a_i \in \{0; 1\}$  с топологией индуцированной лексикографическим порядком.

### Литература

1. Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Александров П. С., Урысон П. С. *Мемуар о компактных топологических пространствах*. М.: Наука, 1971. 144 с.
3. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. *Коммутативные нормированные кольца* // УМН. 1946. Т. 1, № 2(12). С. 48–146.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986. 752 с.
5. Александров П. С., Пономарев В. И. *О диадических бикompактах* // Fundamenta Mathematicae. 1962. Т. 50, № 4. С. 419–429.
6. Глаз А. Н. *Некоторые инвариантные подалгебры в пространствах ограниченных функций и их приложения*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ. Минск: БГУ, 2014. 144 с.

## ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

А.А. Махамут<sup>1</sup>, Э.Л. Шишкина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»),  
ул. Победы, 85, 308015 г. Белгород, Россия

<sup>2</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, 394018 г. Воронеж, Россия  
ilina\_dico@mail.ru

**Введение.** Рассмотрим оператор Бесселя

$$(B_\gamma)_y = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\gamma}{y} \frac{d}{dy}.$$

Явное определение отрицательной дробной степени оператора Бесселя в терминах гипергеометрических функций Гаусса с различными приложениями к УЧП было дано в [1]. В [2] рассмотрены дробные степени гипер-бесселева оператора, которые включают в себя рассматриваемые в этой статье операторы.

Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$ . **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси  $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$**  для  $f \in L[0, \infty)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} (B_{\gamma,0+}^{-\alpha} f)(x) &= (IB_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha + \frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса, которую можно представить в виде ряда

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad (p)_n = p(p+1) \cdots (p+n-1).$$

Для наших целей удобно использовать следующую модификацию преобразования Мейера

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = \frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{\gamma+1}{2}} K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) f(x) dx,$$

где функция  $K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left[ I_{-\nu}(z) - I_\nu(z) \right],$$

а модифицированная функция Бесселя первого рода имеет вид

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Свертка для преобразования Мейера имеет вид

$$\begin{aligned} &\ll f * g \gg_\gamma = \\ &= (\gamma+1) \int_x^\infty \tau^{3-2\gamma} (x^2 - \tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}} d\tau \int_0^{\tau^2/4} u^{\frac{\gamma-1}{2}} (\tau^2 - 4u)^{\frac{\gamma-1}{2}} du \int_0^1 f(2\sqrt{uv}) g\left(\sqrt{(\tau^2 - 4u)(1-v)}\right) dv. \end{aligned}$$

**Решение уравнения с дробной степенью оператора Бесселя.**

Функция Фокса–Райта  ${}_p\Psi_q$  определяется рядом

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_l, \alpha_l)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^p \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!},$$

$$z \in \mathbb{C}, a_l, b_j \in \mathbb{C}, \alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}, l = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$$

в случае, если этот ряд сходится.

**Теорема.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ ,  $g \in L_{loc}(0, \infty)$ , существуют такие константы  $C$  и  $\ell$ , что  $|g(x)| < Ce^{2\ell x}$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0+) < \infty$ . Тогда решение уравнения

$$(\mathcal{B}_{\gamma, 0+}^\alpha)_x f(x) - \lambda f(x) = g(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

при  $f(0+) = C$  имеет вид

$$f(x) = \ll G_\gamma^\alpha(\lambda, x) * g(x) \gg_\gamma + C \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma + 1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2\alpha} \right],$$

где

$$G_\gamma^\alpha(\lambda, x) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} x^{2\alpha - \frac{\gamma+3}{2}} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} \left(\frac{\gamma+1}{4} + \alpha, \alpha\right), (1, 1) \\ \left(\frac{1-\gamma}{4} + \alpha, \alpha\right), \left(2\alpha + \frac{\gamma-1}{2}, 2\alpha\right) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2\alpha} \right].$$

### Литература

1. Sprinkhuizen-Kuiper I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Analysis and Applications. 1979. Vol. 72. P. 674–702.
2. McBride A. C. Fractional calculus and integral transforms of generalized functions Fractional calculus and integral transforms of generalized functions. London: Pitman, 1979.

## УЗКИЕ БАССЕЙНЫ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ СДВИГА НА ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИГНАЛОВ

Б. Садок<sup>1</sup>

<sup>1</sup>The John Paul II Catholic University of Lublin, Al. Raclawickie 14, 20-950 Lublin, Poland, bruno.bonitas@gmail.com

Рассмотрим множество  $X = \{1, \dots, r\}$ . Ниже оно будет называться *алфавитом*, а его элементы *буквами*. Всякие последовательности букв (конечные и бесконечные) мы будем называть *сигналами*. Совокупность конечных сигналов длины  $n$  естественно обозначить как  $X^n$ , а множество всех бесконечных сигналов как

$$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in X\}.$$

Любую начальную часть сигнала будем называть его *префиксом*.

Определим на  $X^{\mathbb{N}}$  отображение левого сдвига  $T$ :

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Обозначим через  $M(X^{\mathbb{N}})$  совокупность всех борелевских вероятностных мер на  $X^{\mathbb{N}}$ , а через  $M_T(X^{\mathbb{N}})$  — совокупность всех  $T$ -инвариантных вероятностных мер на  $X^{\mathbb{N}}$ . Снабдим эти множества слабой топологией (которая, как известно, метризуема).

Очевидно, оба множества  $M(X^{\mathbb{N}})$  и  $M_T(X^{\mathbb{N}})$  выпуклы. Из теоремы Алаоглу следует, что они компактны в слабой топологии.

Для каждого бесконечного сигнала  $x \in X^{\mathbb{N}}$  обозначим через  $\delta_x$  единичную меру, сосредоточенную в точке  $x$ . Определим *эмпирические меры*  $\delta_{x,n} \in M(X^{\mathbb{N}})$  по правилу

$$\delta_{x,n} = \frac{\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}x}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть  $V(x)$  — множество всех предельных точек последовательности  $\delta_{x,n}$ . Из компактности  $M(X^{\mathbb{N}})$  следует, что это множество непусто и компактно.

**Лемма 1.** Для каждого  $x \in X^{\mathbb{N}}$  множество  $V(x)$  связно и содержится в  $M_T(X^{\mathbb{N}})$ .

Каждое множество инвариантных мер  $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$  порождает следующие подмножества в пространстве  $X^{\mathbb{N}}$ : бассейн  $B(W)$ , узкий бассейн  $NB(W)$  и широкий бассейн  $WB(W)$ , определяемые соответственно формулами

$$\begin{aligned} B(W) &= \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid V(x) \subset W\}, \\ NB(W) &= \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid V(x) = W\}, \\ WB(W) &= \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid V(x) \cap W \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Иначе говоря,  $B(W)$  — это совокупность таких бесконечных сигналов  $x$ , для которых множество предельных точек последовательности эмпирических мер  $\delta_{x,n}$  содержится в  $W$ ,  $NB(W)$  — это совокупность таких бесконечных сигналов  $x$ , для которых множество предельных точек последовательности  $\delta_{x,n}$  совпадает с  $W$ , а  $WB(W)$  — это совокупность таких бесконечных сигналов  $x$ , для которых последовательность  $\delta_{x,n}$  имеет хотя бы одну предельную точку в  $W$ . При этом, очевидно,

$$NB(W) \subset B(W) \subset WB(W) \subset X^{\mathbb{N}}.$$

Из вышеупомянутой компактности и связности  $V(x)$  следует, что узкий бассейн может быть непуст только тогда, когда множество  $W$  непусто, компактно и связно. С другой стороны, верна следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любого непустого связного компакта  $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$  порождённый им узкий бассейн  $NB(W)$  непуст.

Что касается бассейнов  $B(W)$  и  $WB(W)$ , то они непусты для любого  $W \neq \emptyset$  (поскольку содержат узкие бассейны  $NB(\mu)$  для всех  $\mu \in W$ ).

Теорема 2 доказывается путём построения модельного подмножества  $D_{\infty} \subset NB(W)$ . В процессе построения  $D_{\infty}$  используется следующая лемма.

**Лемма 3.** Пусть  $W$  — непустое компактное связное подмножество метрического пространства  $(M, \rho)$ , и функция  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна сверху. Тогда существует последовательность точек  $x_i \in W$ , обладающая следующими свойствами:

а) множество её предельных точек совпадает с  $W$ ;

б)  $\rho(x_i, x_{i+1}) \rightarrow 0$ ;

в) для любой точки  $x^* \in W$  существует такая подпоследовательность  $x_{i_k}$ , которая сходится к  $x^*$ , и при этом  $h(x_{i_k}) \geq h(x^*)$ .

Опишем кратко конструкцию модельного множества  $D_{\infty}$ .

Вначале для множества  $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$  следует выбрать последовательность мер  $\mu_i \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ , удовлетворяющую лемме 3 (где в качестве  $h$  берётся энтропия), и сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел  $\varepsilon_i$ .

Затем для каждого  $i$  строится такое множество  $A_i \subset X^{n_i}$ , что для любого  $x \in X^{\mathbb{N}}$ , у которого префикс длины  $n_i$  принадлежит  $A_i$ , выполняется неравенство  $\rho(\delta_{x,n_i}, \mu_i) < \varepsilon_i$ . Из информационной теоремы [1] следует, что при достаточно больших  $n_i$  множества  $A_i$  непусты. Последовательность  $n_i$  выбирается настолько быстро растущей, чтобы выполнялись условия  $n_i > in_{i-1}$  и  $n_{i+1} > 2n_i/\varepsilon_i$ .

После этого определяются множества

$$\begin{aligned} D_i &= A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \dots \times A_i^{n_{i+1}} \subset X^{n_1 n_2 + n_2 n_3 + \dots + n_i n_{i+1}}, \\ D_{\infty} &= A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \dots \subset X^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Очевидно, любой сигнал из  $D_{\infty}$  имеет префиксы в каждом из  $D_i$ .

Доказательство теоремы 2 завершает следующая лемма.

**Лемма 4.** Если  $w \in D_{\infty}$ , то  $V(w) = W$ .

Подробности построения множества  $D_{\infty}$  и доказательства изложены в [2].

### Литература

1. Бахтин В. И. Информационный смысл энтропии неэргодических мер // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 304–312.



2. Bakhtin V.I., Sadok B. *Packing dimensions of basins generated by invariant measures on a sequence space* // *Differential Equations*. 2022, Vol. 58, No 6. P. 717–726.

**ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО  $H$ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ПО ЛЕБЕГУ ФУНКЦИЙ**

**О.В. Скоромник<sup>1</sup>, М.В. Папкович<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,  
Блохина 29, 211440 Новополоцк, Беларусь,  
{o.skoromnik,m.parkovich}@psu. by

Рассматривается многомерное интегральное  $H$ -преобразование [1]:

$$(Hf)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[ \mathbf{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(\mathbf{t}) dt, \quad \mathbf{x} > 0. \tag{1}$$

Здесь (см., например, [1]; [2, §28.4])  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$ ;  $\mathbf{x} > \mathbf{t}$  означает  $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$ ;  $\int_0^\infty = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$ ;  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ;  $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$ ;  $d\mathbf{t} = dt_1 \dots dt_n$ ;  $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ;  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $m_1 = \dots = m_n$ ;  $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$ ;  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ ;  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $q_1 = q_2 = \dots = q_n$  ( $0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$ ,  $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$ );  $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ ,  $1 \leq i \leq \mathbf{p}$ ,  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$ );  $\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$ ,  $1 \leq j \leq \mathbf{q}$ ,  $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$  ( $j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$ );  $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$ ,  $1 \leq i \leq \mathbf{p}$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$ );  $\bar{\beta}_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$ ,  $1 \leq j \leq \mathbf{q}$ ,  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$  ( $j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$ ). Функция

$$H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[ \mathbf{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[ x_k t_k \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right. \right] \tag{2}$$

представляет собой произведения  $H$ -функций  $H_{p,q}^{m,n}[z]$  (см., например, [3, §1.1]).

Введем постоянные, определяемые через параметры  $H$ - функции (2):  $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ ,  $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$  и  $a_k^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_k} \alpha_{i_k} - \sum_{i=\bar{n}_k+1}^{p_k} \alpha_{i_k} + \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{j_k} - \sum_{j=m_k+1}^{q_k} \beta_{j_k}$ ,  $\Delta_k = \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{j_k} - \sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{i_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ );  $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  и  $\mu_k = \sum_{j=1}^{q_k} b_{j_k} - \sum_{i=1}^{p_k} a_{i_k} + \frac{p_k - q_k}{2}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ );

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_k \leq m_k} \left[ \frac{\text{Re}(b_{j_k})}{\beta_{j_k}} \right], & m_k > 0, \\ -\infty, & m_k = 0, \end{cases} \quad \tilde{\beta}_k = \begin{cases} \min_{1 \leq i_k \leq \bar{n}_k} \left[ \frac{1 - \text{Re}(a_{i_k})}{\alpha_{i_k}} \right], & \bar{n}_k > 0, \\ \infty, & \bar{n}_k = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\alpha_0^k = \begin{cases} 1 + \max_{m_k+1 \leq j_k \leq q_k} \left[ \frac{\text{Re}(b_{j_k}) - 1}{\beta_{j_k}} \right], & q_k > m_k, \\ -\infty, & q_k = m_k, \end{cases} \quad \beta_0^k = \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_k+1 \leq i_k \leq p_2} \left[ \frac{\text{Re}(a_{i_k})}{\alpha_{i_k}} \right], & p_k > \bar{n}_k, \\ \infty, & p_k = \bar{n}_k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Получены формулы обращения  $H$ - преобразования (1):

$$f(\mathbf{x}) = \bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \times \\ \times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}, \mathbf{p}-\mathbf{n}+1} \left[ \mathbf{xt} \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1 - \mathbf{a}_i - \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i) \mathbf{n} + 1, \mathbf{p}, (1 - \mathbf{a}_i - \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i)_{1,n} \\ (1 - \mathbf{b}_j - \bar{\beta}_j, \bar{\beta}_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1 - \mathbf{b}_j - \bar{\beta}_j, \bar{\beta}_j)_{1, \mathbf{m}}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] (Hf)(\mathbf{t}) dt \tag{3}$$

и

$$f(\mathbf{x}) = -\bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1, \mathbf{p}-\mathbf{n}} \left[ \mathbf{x} \mathbf{t} \left| \begin{array}{l} (1 - \mathbf{a}_i - \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i)_{\mathbf{n}+1, \mathbf{p}}, (1 - \mathbf{a}_i - \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, \mathbf{n}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (1 - \mathbf{b}_j - \bar{\beta}_j, \bar{\beta}_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1 - \mathbf{b}_j - \bar{\beta}_j, \bar{\beta}_j)_{1, \mathbf{m}} \end{array} \right. \right] (\mathbf{H}f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (4)$$

в весовых пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{r}}}$  измеримых по Лебегу функций  $f(\mathbf{x})$ :

$$\|f\|_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{r}}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left[ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty,$$

где  $\bar{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq \bar{\mathbf{r}} < \infty$ ,  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ ;  $\bar{\mathbf{v}} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$ , когда постоянные  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) \leq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**Теорема.** Пусть  $a_k^* = 0$ ,  $\bar{\alpha}_k < 1 - \nu_k < \bar{\beta}_k$ ,  $\alpha_0^k < \nu_k < \beta_0^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) > 0$ .

(a) Если  $\Delta_k [1 - \nu_k] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{r}}}$ , то формула обращения (3) справедлива при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu} \bar{h} - 1$ , а формула (4) при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu} \bar{h} - 1$ .

(b) Если  $\Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{r}}}$ ,  $1 < \bar{\mathbf{r}} < \infty$ , то формула обращения (3) справедлива при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu} \bar{h} - 1$ , а формула (4) при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu} \bar{h} - 1$ .

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ "Конвергенция - 2025 подпрограмма "Математические модели и методы задание 1.2.01.

#### Литература

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. *Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces* // Mathematics. 2024. Vol. 12. Art. 1829.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Kilbas A. A. and Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications*. Chapman and Hall, Boca Raton, 2004.

### О МОДИФИКАЦИИ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА

А.Н. Таныгина

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
anastmink@gmail.com

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $f$  и  $g$  — определенные на замкнутом шаре  $\overline{B(x_0, R)} \subset X$  и принимающие значения из  $Y$  нелинейные операторы, причем  $f$  дифференцируем в каждой внутренней точке шара  $B(x_0, R)$ , а  $g$  — недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} (f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где  $x_0$  — заданное начальное приближение.

Среди известных оценок скорости сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) наиболее точными являются оценки, полученные в работе [1], где для анализа скорости сходимости процесса (2) был применен метод мажорант Л.В. Канторовича [2]. В случае, когда  $g = 0$ , наиболее точные оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах А. Гальперина и З. Ваксмана [3, 4] при новом предположении о гладкости оператора  $f$ , названном авторами регулярной гладкостью, а в работе [5] эти результаты были обобщены на уравнения вида

(1) при предположении, что оператор  $f$  является регулярно гладким, а оператор  $g$  удовлетворяет модифицированному условию Липшица

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)}, \quad (3)$$

где  $\psi$  — неубывающая функция на промежутке  $[0, R]$ .

Следует отметить, что смысл понятия регулярной гладкости из [3, 4] является достаточно сложным и в ходе рассуждений в работе [4] на самом деле используется не свойство регулярной гладкости, а другое, вытекающее из него условие. В работе [6] было показано, что условие регулярной гладкости для оператора  $f$  может быть заменено более простым условием, где приращение производной оператора  $f$  оценивается приращением непрерывной строго возрастающей вогнутой функции  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  со свойством  $\omega(0) = 0$ :

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|) - \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+). \quad (4)$$

Здесь  $x', x'' \in \overline{B(x_0, R)}$ ,  $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ ,  $r = \|x' - x_0\|$ ,  $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$ . Также предполагается без ограничения общности, что  $f'(x_0) = I$ .

При увеличении  $\chi$  величина  $(\chi - r - \|x'' - x'\|)^+$  увеличивается и, следовательно, правая часть неравенства (4) уменьшается. Поэтому чем больше  $\chi$ , тем лучше оценка для  $\|f'(x'') - f'(x')\|$ , что дает возможность получить более точные оценки и для последовательных приближений.

Приведем основной результат о сходимости процесса (2) к точному решению  $x_*$  уравнения (1) при предположении, что оператор  $f$  удовлетворяет модифицированному условию регулярной гладкости (4), а оператор  $g$  — условию (3).

Пусть  $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ ,  $\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ ,  $a$  — положительное число, удовлетворяющее неравенству  $a \geq \|f(x_0) + g(x_0)\|$ . Обозначим через  $W$  функцию числового аргумента  $t$ :

$$W(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t), \quad (5)$$

и определим числовую последовательность  $\{t_n\}$  следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{W(t_n)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]} \quad (n = 0, 1, \dots; t_0 = 0). \quad (6)$$

**Теорема.** Пусть существует постоянная  $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ , удовлетворяющая условию

$$a < \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi - \Psi(\chi),$$

оператор  $f$  удовлетворяет на  $\overline{B(x_0, R)}$  условию (4) с таким  $\chi$ , оператор  $g$  удовлетворяет условию (3) и функция (5) имеет единственный нуль  $t_* \leq R$  на отрезке  $[0, \chi]$ . Тогда

- 1) уравнение (1) имеет единственное решение  $x_*$  в шаре  $B(x_0, t_*)$ ;
- 2) последовательные приближения (2) определены для всех  $n = 0, 1, \dots$ , принадлежат шару  $B(x_0, t_*)$  и сходятся к  $x_*$ ;
- 3) при всех  $n = 0, 1, \dots$  справедливы оценки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n,$$

$$\|x_* - x_n\| \leq t_* - t_n,$$

где последовательность  $\{t_n\}$  определена по правилу (6), монотонно возрастает и сходится к  $t_*$ .

### Литература

1. Забрейко П. П., Злепко П. П. Об обобщении метода Ньютона–Канторовича на уравнения с нелинейными операторами // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 3. С. 365–369.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
3. Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35, No 1–3. P. 207–215.
4. Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, No 7–8. P. 813–858.

5. Таныгина А. Н. *Обобщенный метод Ньютона–Канторовича для уравнений с недифференцируемыми операторами* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 6. С. 17–22.

6. Забрейко П. П., Таныгина А. Н. *Модификация условия Гальперина–Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона–Канторовича* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.

## СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЫ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

С.М. Ташпулатов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт ядерной физики Академии наук республики Узбекистан, ул. У. Гулямова 1, 100214 Ташкент, Узбекистан, sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.com

Рассматривается оператор энергии четырех электронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы для второго синглетного состояния системы. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид [1]

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Здесь  $A$  ( $A_0$  – энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки;  $B > 0$  ( $B_0 > 0$ )-интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями);  $\tau = \pm e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu$ , где  $e_j$  – единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям;  $U$  ( $U_0$  –) параметр кулоновского взаимодействия двух электронов, соответственно в регулярном (примесном) узле решетки;  $\gamma$  – спиновый индекс,  $\gamma = \uparrow$  или  $\gamma = \downarrow$ , через  $\uparrow$  и  $\downarrow$  обозначены значения спина  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ ;  $a_{m,\gamma}^+$  и  $a_{m,\gamma}$  – соответственно, операторы рождения и уничтожения электрона в узле  $m \in Z^{\nu}$ .

В четырехэлектронных систем существует квинтетное состояние, три типа триплетных и два типа синглетных состояний. Гамильтониан  $H$  действует в антисимметрическом пространстве Фока  $\mathcal{H}_{as} = l_2^{as}((Z^{\nu})^4)$ , где  $l_2^{as}$  есть подпространство антисимметрических функций из  $l_2((Z^{\nu})^4)$ . Пусть  $\varphi_0$  вакуумный вектор в пространстве  $\mathcal{H}_{as}$ . Второму синглетному состоянию соответствует взаимодействие четырех электронов в решетке, и ему отвечают следующие базисные функции  ${}^2s_{p,q,r,t \in Z^{\nu}}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$ . Подпространство  ${}^2\mathcal{H}_s^0$ , соответствующее второму синглетному состоянию, есть множество всех векторов вида  ${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^{\nu}} f(p,q,r,t) {}^2s_{p,q,r,t \in Z^{\nu}}^0$ ,  $f \in l_2^{as}$ , где  $l_2^{as}$  – подпространство антисимметричных функций из пространства  $l_2((Z^{\nu})^4)$ . Обозначим через  ${}^2H_s^0$  сужение оператора  $H$  на подпространство  ${}^2\mathcal{H}_s^0$ .

**Теорема 1.** *Подпространство  ${}^2\mathcal{H}_s^0$  инвариантно относительно оператора  $H$ , и оператор  ${}^2H_s^0$  является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор  ${}^2\bar{H}_s^0$ , действующий в пространстве  $l_2^{as}$  по формуле*

$${}^2\bar{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 = 4A f(p,q,r,t) + B \sum_{\tau} [f(p+\tau,q,r,t) + f(p,q+\tau,r,t) + f(p,q,r+\tau,t) + f(p,q,r,t+\tau)] + U[\delta_{p,q} + \delta_{q,r} + \delta_{p,t} + \delta_{r,t}] f(p,q,r,t) + (A_0 - A)[\delta_{p,0} + \delta_{q,0} + \delta_{r,0} + \delta_{t,0}] f(p,q,r,t) + (B_0 - B) \sum_{\tau} [\delta_{p,0} \times f(\tau,q,r,t) + \delta_{q,0} f(p,\tau,r,t) + \delta_{r,0} f(p,q,\tau,t) + \delta_{t,0} f(p,q,r,\tau) + \delta_{p,\tau} f(0,q,r,t) + \delta_{q,\tau} f(p,0,r,t) + \delta_{r,\tau} f(p,q,0,t) + \delta_{t,\tau} f(p,q,r,\tau)] + (U_0 - U)[\delta_{p,q} \delta_{p,0} + \delta_{p,t} \delta_{p,0} + \delta_{q,r} \delta_{q,0} + \delta_{r,t} \delta_{r,0}] f(p,q,r,t), \quad (2)$$

где  $\delta_{k,j}$  – символ Кронеккера. Сам оператор  ${}^2H_s^0$  на вектор  ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\mathcal{H}_s^0$  действует по формуле

$${}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^{\nu}} ({}^2\bar{H}_s^0 f)(p,q,r,t) {}^2s_{p,q,r,t \in Z^{\nu}}^0. \quad (3)$$

**Лемма 1.** Спектры операторов  ${}^2H_s^0$  и  ${}^2\bar{H}_s^0$  совпадают.

Обозначим через  $\mathcal{F}$  преобразование Фурье:  $\mathcal{F} : l_2((Z^v)^4) \rightarrow L_2((T^v)^4) \equiv {}^2\mathcal{H}_s^0$ , где  $T^v - v$ -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега  $d\lambda, \lambda(T^v) = 1$ . Положим  ${}^2\tilde{H}_s^0 = \mathcal{F}{}^2\bar{H}_s^0\mathcal{F}^{-1}$ . Обозначим  $\varepsilon_1 = A_0 - A, \varepsilon_2 = B_0 - B, \varepsilon_3 = U_0 - U$ .

Следующая теорема описывает изменение спектра оператора  ${}^2H_s^0$  в одномерном случае.

**Теорема 2.** Пусть  $v = 1$ . Тогда

а). Если  $\varepsilon_2 = -B$  и  $\varepsilon_1 < -2B$  (соответственно,  $\varepsilon_2 = -B$  и  $\varepsilon_1 > 2B$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения восьми отрезков:  $\sigma_{ess}({}^2H_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$ , а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из шести собственных значений:  $\sigma_{disc}({}^2H_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4, \}$  где  $z = A + \varepsilon_1$  и  $z_3$  и  $z_4$  – некоторые числа.

б). Если  $\varepsilon_1 < 0$  и  $\varepsilon_2 = -2B$  или  $\varepsilon_2 = 0$  (соответственно,  $\varepsilon_1 > 0$  и  $\varepsilon_2 = -2B$  или  $\varepsilon_2 = 0$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из шести собственных значений.

в). Если  $\varepsilon_1 = 0$  и  $\varepsilon_2 > 0$  или  $\varepsilon_1 = 0$  или  $\varepsilon_2 < -2B$ , тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения шестнадцати отрезков:  $\sigma_{ess}({}^2H_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2, 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2, A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2, A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4]$ , а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из одиннадцати собственных значений:  $\sigma_{disc}({}^2H_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, z_1 + 3z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, \}$  где  $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$  и  $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$  и  $E = \frac{\varepsilon_2+B}{\varepsilon_2+2B\varepsilon_2}$ .

г). Если  $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$  (соответственно,  $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из шести собственных значений.

д). Если  $\varepsilon_2 > 0$  и  $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$  (соответственно,  $\varepsilon_2 < -2B$  и  $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из шести собственных значений.

е). Если  $\varepsilon_2 > 0$  и  $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$  (соответственно,  $\varepsilon_2 < -2B$  и  $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения шестнадцати отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из одиннадцати собственных значений.

ж). Если  $\varepsilon_2 > 0$  и  $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$  (соответственно,  $\varepsilon_2 < -2B$  и  $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из шести собственных значений.

з). Если  $\varepsilon_2 > 0$  и  $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$  (соответственно,  $\varepsilon_2 < -2B$  и  $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ ), тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения шестнадцати отрезков, а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из одиннадцати собственных значений.

и). Если  $-2B < \varepsilon_2 < 0$ , тогда существенный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из объединения трех отрезков:  $\sigma_{disc}({}^2H_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4]$ , а дискретный спектр оператора  ${}^2H_s^0$  состоит из трех собственных значений:  $\sigma_{disc}({}^2H_s^0) = \{2z_3, 2z_4, z_3 + z_4.\}$

### Литература

1. Tashpulatov S. M., Parmanova R. T. Spectra of the energy of four-electron systems in the impurity Hubbard Model. Triplet state // Journal of applied mathematics and physics. 2021. Vol. 9, No 11. P. 2776–2795.

## ОБ ОДНОЙ МАТРИЧНОЙ НОРМЕ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

П.Н. Шведков<sup>1</sup>, К.В. Лыков<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, shvedkovpavel@gmail.com<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь, alkv@list.ruМногомерная матрица  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})_{1 \leq i_k \leq n_k}$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ , определяет формулой

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_d) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_d=1}^{n_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{di_d}$$

полилинейный функционал на декартовом произведении  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d}$  (или, эквивалентно, линейный функционал на тензорном произведении  $\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{n_d}$  этих же пространств). Здесь  $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}) \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ . Если снабдить пространства  $\mathbb{R}^{n_k}$  нормой пространства  $\ell_\infty = \ell_\infty^{n_k}$ :

$$\|x_k\|_\infty := \max_{i_k=1, 2, \dots, n_k} |x_{ki_k}|, \quad k = 1, 2, \dots, d,$$

то для нормы функционала  $f$  получим равенство

$$\|f\| = \sup \left\{ \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_d=1}^{n_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{di_d} : \|x_k\|_\infty \leq 1, k = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Если теперь воспользоваться тем, что крайними точками шара пространства  $\ell_\infty$  являются векторы с координатами  $\pm 1$ , то получим более удобную для вычислений (но по-прежнему алгоритмически сложную) формулу

$$\|f\| = \max \left\{ \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_d=1}^{n_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} \varepsilon_{1i_1} \varepsilon_{2i_2} \dots \varepsilon_{di_d} : \varepsilon_{ki_k} = \pm 1, k = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Оказывается, так определенная норма функционала  $f$ , или, равносильно, норма  $\|A\|_\otimes$  матрицы  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})_{1 \leq i_k \leq n_k}$ , соответствующая пространству  $\ell_\infty^{n_1} \otimes \ell_\infty^{n_2} \otimes \dots \otimes \ell_\infty^{n_d}$ , эквивалентна так называемой cut-норме матрицы  $A$ , определяемой формулой

$$\|A\|_{cut} := \max \left\{ \left| \sum_{i_1 \in I_1} \sum_{i_2 \in I_2} \dots \sum_{i_d \in I_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} \right| : I_k \subset \{1, 2, \dots, n_k\}, k = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

cut-норма матрицы имеет много приложений в теории алгоритмов и вычислительной математике, особенно в теории графов. В случае, когда  $d = 2$ , результат об эквивалентности норм  $\|A\|_\otimes$  и  $\|A\|_{cut}$ , связывающий задачи функционального анализа и дискретной математики, доказан в работе [1]. В настоящей работе доказана аналогичная теорема для произвольного  $d \in \mathbb{N}$ .

**Теорема.** Для произвольных  $d \in \mathbb{N}$  и многомерной матрицы  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})_{1 \leq i_k \leq n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ ,  $n_k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|A\|_{cut} \leq \|A\|_\otimes \leq 2^d \|A\|_{cut}.$$

Полученное в теореме соотношение позволяет, в частности, из геометрических свойств полиномиального хаоса Радемахера в банаховых пространствах получать результаты об уклоне-нии для гиперграфов, аналогичных результатам для обычных графов на основе случая  $d = 2$ , анонсированным в работе [2].

Будем называть кубическую ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ) матрицу  $A$  симметричной, если для ее элементов выполняются следующие условия:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(k)}}$$

для произвольной перестановки  $\pi$  на множестве  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

Если дополнительно предположить, что  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$  при совпадении хотя бы двух индексов  $i_l = i_m, 1 \leq l < m \leq n$ , то, оказывается, для многих задач cut-норму такой матрицы можно заменить на

$$\|A\|_{\square} := \max \left\{ \left| \sum_{i_1 \in I} \sum_{i_2 \in I} \dots \sum_{i_d \in I} a_{i_1 i_2 \dots i_d} \right| : I \subset \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Более точно, справедлив следующий результат.

**Теорема 2.** *С некоторой константой  $C_d$ , не зависящей от  $n$  и элементов кубической симметричной  $d$ -мерной матрицы  $A$ , у которой  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$  при совпадении хотя бы двух индексов  $i_l = i_m, 1 \leq l < m \leq n$ , выполняются неравенства*

$$\|A\|_{\square} \leq \|A\|_{cut} \leq C_d \|A\|_{\square}.$$

Работа Лыкова К.В. была поддержана НАН Беларуси в рамках ГПНИ “Конвергенция-2025”.

**Литература**

1. Alon N., Naor A. *Approximating the cut-norm via Grothendieck’s inequality* // STOC’04: Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing. P. 72–80.  
 2. Асташкин С. В., Лыков К. В. *Об одном свойстве кратной системы Радемахера и его применении к задачам об уклонении в графах* // УМН. 2024. Т. 79, № 4 (478). С. 173–174.

**ОБОБЩЁННЫЕ ШКАЛЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ**

**М.А. Шубарин<sup>1</sup>,**

<sup>1</sup>Южный Федеральный Университет, Мильчакова 8а, 344090 Ростов-на-Дону, Россия, mas102@mail.com

**Введение**

**1.** Обобщённые шкалы банаховых пространств представляют интерес в рамках структурной теории пространств Фреше. Под структурной теорией пространств Фреше автор подразумевает раздел функционального анализа, посвящённый изоморфной классификации пространств Фреше и изучению условий существования базисов в этих пространствах. Полный перечень задач, рассматриваемых структурной теорией пространств Фреше приводится в [6]. Многие задачи структурной теории решаются в термина пространственных идеалов  $(D_j)$  и  $(\Omega_j)$ . Автор предполагает использовать для этих идеалов обозначения, принятые в ростовской математической школе, в которой были заложены основы теории этих классов.

Например, принадлежность ненормируемого пространства Фреше  $X$  (топология которого задаётся счётным набором норм  $(\|\cdot\|_p)$ ) классу  $(D_1)$  равносильна следующему условию:

$$\exists p_0 \forall p \exists p_1 \exists C > 0 : \forall x \in X \|x\|_p \leq C \|x\|_{p_0}^{1/2} \|x\|_{p_1}^{1/2}. \tag{1}$$

**2.** В докладе рассматривается новый подход к построению обобщённой шкалы банаховых пространств, определяемые характеристической функцией интерполяционного функтора. Необходимые сведения из теории интерполяции линейных операторов взяты в [2,3].

Определение шкалы банаховых пространств было сформулировано С. Г. Крейном и Ю. И. Петуниным [4], определение 1.2. Пусть дано семейство банаховых пространств  $\bar{E} = [E_\alpha]_{\alpha \in [0,1]}$  и  $\|\cdot\|_\alpha$  — норма в  $E_\alpha$ .

**Определение 1.** Семейство  $\bar{E}$  называют шкалой банаховых пространств, если выполняются следующие условия:

А. если  $1 \geq \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$ , то пространство  $E_{\alpha_1}$  непрерывно и плотно вкладывается в  $E_{\alpha_0}$ , другими словами, пространство  $E_{\alpha_1}$  является всюду плотным векторным подпространством в  $E_{\alpha_0}$  и оператор вложения  $E_{\alpha_1}$  в  $E_{\alpha_0}$  непрерывен:

$$\exists C = C(\alpha_0, \alpha_1) > 0 : \forall x \in E_{\alpha_1} \|x\|_{\alpha_0} \leq C \|x\|_{\alpha_1};$$

В. существует постоянная  $R = R(\alpha_0, \alpha, \alpha_1) > 0$  такая, что

$$\|x\|_\alpha \leq R \|x\|_{\alpha_0}^\tau \|x\|_{\alpha_1}^{1-\tau}, \tau = \tau(\alpha_0, \alpha, \alpha_1) = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \quad (2)$$

для любого  $\forall x \in E_{\alpha_1}$ .

Выполняются для любой тройки индексов  $\alpha_0, \alpha, \alpha_1$ . Если  $C \equiv 1$  и  $R \equiv 1$ , то шкалу  $\bar{E}$  называют нормированной.

Из(1) и (2) следует что пространства  $X_{p_0}, X_p, X_{p_1}$  принадлежат одной и тоже шкале банаховых пространств (определяемой индексами  $p_0 < p < p_1$ ) в смысле определения 1.

Пусть  $X \in (D_1)$  и  $X_p$  — пополнение этого пространства по норме  $\|\cdot\|_p$ . Из определения

**2.** Доказательство интерполяционных свойств шкал банаховых пространств существенно опирается на свойстве выпуклости на интервале  $(0, 1)$  функции  $t \mapsto (1-t)a + tb$  ( $a, b$  — вещественные числа). Поэтому возможное обобщение определения 1 основано на рассмотрении модифицированного свойства выпуклости [4, 5]. Это свойство формулируется в терминах характеристических функций интерполяционного функтора [2].

**Определение 2.** Функцию  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  называют характеристической функцией интерполяционного функтора (в дальнейшем — характеристической функцией), если

1.  $\varphi$  — неубывает по каждой переменной,

2.  $\varphi$  — однородная степени 1, т.е.  $\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$  для произвольных положительных чисел  $\lambda, x, y$ .

Характеристическую функцию  $\varphi$  будем называть нормированной, если  $\varphi(1, 1) = 1$ .

Будем говорить, что нормированные характеристические функции  $\Phi_\tau, \tau \in (0, 1)$  образуют семейство (которое обозначим через  $\bar{\Phi} = [\varphi_\tau]_{\tau \in (0,1)}$ ), если выполняются следующие условия:

1.  $\varphi_{\tau'}(x, y) < \varphi_{\tau''}(x, y)$  для любых  $x < y$  из  $[a, b]$ ,

2.  $\varphi_{\tau'}(x, y) > \varphi_{\tau''}(x, y)$  для любых  $x < y$  из  $[a, b]$

для произвольных  $\tau' < \tau''$  из  $[0, 1]$ .

**Пример 1.** Пусть  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — непрерывная, возрастающая функция. Положим

$$\varphi_\tau(x, y; \Phi) = \varphi_\tau(x, y) := \frac{1}{\lambda(d)} \inf_{t>0} \left[ \varphi^d(t)x + \frac{1}{t}y \right]. \quad (3)$$

для произвольных  $\tau \in (0, 1]$  и положительных  $x, y$ . Здесь

$$d = d(\tau) := \frac{\tau}{1-\tau}, \lambda(d) := \inf_{t>0} \left[ \varphi_d(t) + \frac{1}{t} \right].$$

Можно показать, что построенные функции являются нормированными характеристическими функциями.

**3.** Пусть данное семейство нормированных характеристических функций  $\bar{\Phi} = [\Phi_\tau]_{\tau \in [0,1]}$ . Семейство банаховых пространств  $\bar{E} = [E_\alpha]_{\alpha \in [0,1]}$  будем называть  $\bar{\Phi}$ -шкалой, если выполняются следующие условия:

A' если  $1 \geq \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$ , то пространство  $E_{\alpha_1}$  непрерывно и плотно вкладывается в  $E_{\alpha_0}$ ;

B' если  $1 \geq \alpha_1 > \alpha > \alpha_0 \geq 0$ , то

$$\exists C > 0 : \forall x \in E_{\alpha_1} \forall t > 0 \|x\|_\alpha \leq C \Phi_\tau(\|x\|_{\alpha_0}, \|x\|_{\alpha_1})$$

На основе семейств характеристических функций из примера 1 строятся классы пространств Фреше, в терминах которых можно дать определение пространственных идеалов  $S_j^-(f), Q_j^-(f)$ , в терминах которых были описаны подпространства и фактопространства в пространствах М. М. Драгилева. Все необходимые определения содержатся в [7].

### Литература

1. Шубарин М. А. *Инвариантные классы пространств Фреше и их применение в структурной теории пространств II* в сб. Совр. методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV: мат. Международной Воронежской весенней математической школы, Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. С. 418.



2. Крейн С. Г., Семёнов Е. М., Брудный Ю. А. *Интерполяция линейных операторов* // Мат. анализ, Итоги науки и техники, М. ВИНТИ, Т. 24. 1986. С. 3–164.
3. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*. М., Наука, 1978.
4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. *Шкалы банаховых пространств* // УМН. 1966. Т. 21, вып. 2. С. 89–168.
5. Шубарин М. А. *Обобщенные шкалы банаховых пространств* // Интегро-диффер. опер. и их прил. 2008. Вып. 8. С. 128–136.
6. Шубарин М. А. *Свойство обобщенной выпуклости, определяемые семействами характеристических функций интерполяционных функторов* // Scientific Light. Vol. 1, No 1. P. 23–28.
7. Kocatepe M., Nurlu Z. *Some spetial Köthe spaces*. In: Terzionlu T. (eds). *Adv. Theory of Frechet Spaces*. NATO ASI Series, vol. 287. Dordrecht: Springer, 1989. P. 269–296.

**ON THE RIEMANN – HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR ONE ELLIPTIC SYSTEM OF THE BIHARMONIC TYPE**

**R.N. Kozinets<sup>1</sup>, D.A. Basik<sup>1</sup>, A.I. Basik<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Brest State A.S. Pushkin University  
Kosmonavtov Boulevard Street 21, 224016 Brest, The Republic of Belarus,  
{ruslankozinets.rk, 2018asada}@gmail.com, alex-basik@yandex.ru

In a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  whose boundary is a sufficiently smooth two-dimensional manifold  $\partial\Omega$ , we consider the Riemann – Hilbert boundary value problem of finding a solution  $U = U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))^T$  of the elliptic system of differential equations

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

satisfying the boundary conditions

$$\mathfrak{B}(y)U(y) = f(y), \quad y \in \partial\Omega, \tag{2}$$

where the  $A_j (j = 1, 2, 3)$  are some constant real  $4 \times 4$  matrices,  $T$  is for transpose,  $\mathfrak{B}$  and  $f$  are the given Hölder continuous on the surface  $\partial\Omega$  matrix-function of size  $2 \times 4$  and the two-component vector-function respectively.

Let the coefficients of the system (1) be

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Since  $\det \sum_{j=1}^3 A_j \xi_j = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 \neq 0$  for all  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , the system (1), (3) is elliptic. Obviously, it isn't an orthogonal type system [1]. Since  $A_1 A_2^{-1} + A_2 A_1^{-1} \neq 0$ , the system (1) with coefficients (3) is not a three-dimensional analogue of the Cauchy-Riemann system [2]. Nevertheless, each component of an arbitrary continuously differentiable solution of system (1) with coefficients (3) in the domain  $\Omega$  satisfies the equation  $\Delta^2 u = 0$ , where  $\Delta$  is the Laplace operator in  $\mathbb{R}^3$  [3] (such systems are called biharmonic type systems).

**Theorem.** *The Riemann-Hilbert problem for system (1) with coefficients (3) and boundary condition matrix*

$$\mathfrak{B}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_1(y) & 0 & \nu_2(y) & \nu_3(y) \end{pmatrix}$$

*is not regularisable, where  $\nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y), \nu_3(y))$  is the unit field of internal normals on the surface  $\partial\Omega$ .*

To prove the theorem, it is shown that at the point of the surface  $\partial\Omega$ , in which the internal normal is parallel to the axis  $Ox_2$ , rank of the Lopatinskiy matrix [4] of the problem (1), (3), (2), (4) is less than 2.

The results were obtained with the financial support of the Ministry of Education (as part of the research work with state registration number 20240574).

## References

1. Басик А. И., Грицук Е. В., Грицук Т. А. *Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbb{R}^3$*  // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56, № 1. С. 7–16.
2. Усс А. Т. *Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши–Римана*. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1118–1125.
3. Basik D. A., Kozinets R. N., Basik A. I. *On the one biharmonic type elliptic system in  $\mathbb{R}^3$*  // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике, ред. А.И. Басик, БрГУ им. А.С.Пушкина, 2024. С. 91–92.
4. Агранович М. С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 5. С. 3–120.

**D-STABILITY OF MATRICES: A SIMPLE DETERMINANTAL TEST**O.Y. Kushel<sup>1</sup>

<sup>1</sup>The Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, 11 Surganov str., Minsk, 220072,  
kushel@mail.ru

The concept of matrix  $D$ -stability, introduced in 1958 by Arrow and McManus [1] is of major importance due to the variety of its applications. However, characterization of matrix  $D$ -stability for dimensions  $n > 4$  is considered as a hard open problem. In this paper, we propose a simple way for testing matrix  $D$ -stability, in terms of the inequalities between principal minors of a matrix. The conditions are just sufficient but they allow to test matrices of an arbitrary size  $n$ , are easy to verify and can be used for the analysis of parameter-dependent models.

## References

1. Arrow K. J., McManus M. *A note on dynamical stability* // Econometrica. 1958. Vol. 26. P. 448–454.

**ON SPECTRA OF DISCRETE HAUSDORFF OPERATORS**A. R. Mirotin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Francisk Skorina Gomel State University  
Sovietskaya 104, 246000 Gomel, Belarus, amirotin@yandex.ru

Spectral theory of general normal Hausdorff operators on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  was developed in [1,2]. The talk will be devoted to some important special case of such operators, the so-called discrete Hausdorff operators. It is based on the work [3].

**Definition 1.** Discrete Hausdorff operators over  $\mathbb{R}^d$  have the form

$$(\mathcal{H}_{c,A}f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)f(A(k)x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

where  $c(k) \in \mathbb{C}$ ,  $A(k) \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ , provided the series converges absolutely.

There are at least two reasons for considering this class of operators:

I. There are functional differential equations with discrete Hausdorff operators. Here are two examples of such equations.

1. The multypantograph equation (see, e.g., [4] and the bibliography therein)

$$y'(t) = \sum_{k=0}^N c(k)y(a_k t) \quad (a_k > 0 \quad \forall k).$$

2. The cell grouse equation (see, e.g., [5] and the bibliography therein)

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} + q \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = c(0)n(x,t) + c(1)n(\alpha x, t) \quad (q \geq 0, \alpha > 0)$$

(here  $n(x,t)$  denotes the density distribution of cells structured by size  $x$  at time  $t$ ).

II. The spectra of discrete Hausdorff operators have specific features.

To investigate the spectra, we need some preparation.

**Lemma 1.** *If*

$$N_2(c,A) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)| |\det A(k)|^{-1/2} < \infty,$$

then  $\mathcal{H}_{c,A}$  is bounded in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . This condition cannot be weakened in general, and  $\|\mathcal{H}_{c,A}\| \leq N_2(c,A)$ .

In the following we shall assume that

- 1)  $\mathcal{H}_{c,A}$  is considered in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ;
- 2)  $N_2(c,A) < \infty$ ;
- 3) all  $A(k)$  are self-adjoint and form a commuting family.

**Theorem 1.** *Let the numbers  $\log |a_j(k)|$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) are linear independent over  $\mathbb{Z}$  for some fixed  $j$ . Then the spectrum  $\sigma(\mathcal{H}_{c,A})$  is rotationally invariant.*

The proof is based on results from [1,2] where the diagonalization of general normal Hausdorff operators was proved.

**Corollary 1** *Let  $X$  be closed and  $\mathcal{H}_{c,A}$ -invariant subspace of  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , and the assumptions of Theorem 1 hold. If  $\mathcal{H}_{c,A}$  is a minimal normal extension of  $S := \mathcal{H}_{c,A}|_X$ , then  $\sigma(S)$  is rotationally invariant.*

Recall that the essential Weyl spectrum  $\sigma_{ew}(T)$  of a closed operator  $T$  in a complex Banach space  $X$  can be defined as

$$\sigma_{ew}(T) := \mathbb{C} \setminus \Delta_w(T),$$

where  $\Delta_w(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ is Fredholm and } \text{ind}(T - \lambda I) = 0\}$ .

Let  $\pi_{00}(T)$  be the set of isolated points of  $\sigma(T)$  that are eigenvalues of finite geometric multiplicity.

**Corollary 2.** *Let  $\mathcal{H}_{c,A} \neq O$  and the assumptions of Theorem 1 hold. Then*

$$\sigma_{ew}(\mathcal{H}_{c,A}) = \begin{cases} \sigma(\mathcal{H}_{c,A}), & 0 \notin \pi_{00}(\mathcal{H}_{c,A}) \\ \sigma(\mathcal{H}_{c,A}) \setminus \{0\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular,  $\sigma_{ew}(\mathcal{H}_{c,A})$  is rotationally invariant.

**Definition 2.** The scalar symbol of  $\mathcal{H}_{c,A}$  is the function

$$\varphi(s) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) |\det A(k)|^{-1/2} e^{-i \sum_{j=1}^d s_j \log |a_j(k)|}$$

where  $(a_1(k), \dots, a_d(k))$  stands for the family of all eigenvalues (with their multiplicities) of  $A(k)$ .

**Corollary 3.** *Let the assumptions of Theorem 1 hold and  $(\forall k) A(k) \geq 0$ , or  $(\forall k) A(k) \leq 0$ . Then*

(i)  $\sigma(\mathcal{H}_{c,A})$  is an annulus (or a disc) of the form

$$\left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \inf_{\mathbb{R}^d} |\varphi| \leq |\zeta| \leq \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi| \right\},$$

(ii)  $\sigma_{ew}(\mathcal{H}_{c,A}) = \sigma(\mathcal{H}_{c,A})$ . In particular,  $\sigma(\mathcal{H}_{c,A})$  is invariant under compact perturbations of  $\mathcal{H}_{c,A}$ .

(iii)  $\|\mathcal{H}_{c,A}\| = \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi|$  if  $(\forall k) A(k) \geq 0$ .

**Corollary 4.** *Let the scalar symbol  $\varphi$  of  $\mathcal{H}_{c,A}$  be real analytic. Then (below  $Jf(x) := f(-x)$ )*

$$\lambda \in \sigma_p(\mathcal{H}_{c,A}) \iff \mathcal{H}_{c,A} = \lambda I, \text{ if } (\forall k) A(k) \geq 0;$$

$$\lambda \in \sigma_p(\mathcal{H}_{c,A}) \iff \mathcal{H}_{c,A} = \pm \lambda J, \text{ if } (\forall k) A(k) \leq 0.$$

Let  $A(k) = \text{diag}(a_k, \dots, a_k)$  ( $a_k \neq 0$ ). Then

$$\mathcal{H}_{c,a} f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) f(a_k x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Every one-dimensional (this means that  $d = 1$ ) discrete Hausdorff operator has this form.

As above, we introduce the *scalar symbol*  $\varphi$  and also the *conjugate scalar symbol*  $\varphi^*$  of  $\mathcal{H}_{c,a}$  as

$$\varphi(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) |a_k|^{-d/2 - i \sum_{j=1}^d s_j}, \varphi^*(s) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \operatorname{sgn}(a_k) |a_k|^{-d/2 - i \sum_{j=1}^d s_j}.$$

**Theorem 2.** *The following assertions hold.*

(i)

$$\sigma(\mathcal{H}_{c,a}) = \operatorname{cl}(\varphi(\mathbb{R}^d) \cup \varphi^*(\mathbb{R}^d))$$

(ii) *If the numbers  $\log |a_k|$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) are linear independent over  $\mathbb{Z}$ , then  $\sigma(\mathcal{H}_{c,a})$  is an annulus (or a disc) of the form  $\{r(c,A) \leq |\zeta| \leq \|\mathcal{H}_{c,a}\|\}$ . Moreover,  $\sigma_{ew}(\mathcal{H}_{c,a}) = \sigma(\mathcal{H}_{c,a})$ . Thus,  $\sigma(\mathcal{H}_{c,a})$  is invariant under compact perturbations of  $\mathcal{H}_{c,a}$ .*

(iii)  $\|\mathcal{H}_{c,a}\| = \max\{\sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi|, \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^*|\}$ .

The work is supported by the State Program of Scientific Research of Republic of Belarus, project No. 20211776

### References

1. Mirotin A. R. *On the Structure of Normal Hausdorff Operators on Lebesgue Spaces* // Functional Analysis and Its Applications. 2019. Vol. 53. P. 261–269. arXiv:1812.02680v2
2. Mirotin A. R. *On the description of multidimensional normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces* // Forum Math. 2020. Vol. 32. P. 111–119. arXiv:1902.07671v2
3. Mirotin A. R. *On the spectra of multidimensional normal discrete Hausdorff operators* // Math. Meth. Appl. Sci. 2024. Vol. 47, No 7. P. 6652–6665. arXiv:2307.03271v2
4. Bellen A., Zennaro M. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
5. Mirotin A. R. *Some remarks on the solution of the cell growth equation* // Proc. Royal. Soc. A. 2023. Vol. 479, No 2279. P. 1–5.

## ON THE GEOMETRIC CRYPTOGRAPHY OF NONWANDERING CONTINUA POSSESSING WADA PROPERTY

D.W. Serow

S. M. Budyonny Military Academy of the Signal Corps,  
194064 Tichorezki prospect 3, Saint Petersburg (Hero Sity Leningrad) RUSSIA  
National Centre for Dynamic Systems Research RAS, 188300 Military Glory City Gatchina, RUSSIA,  
dimusum@yandex.ru

Recently I have announced the correction of my misconceptions about the Birkhoff curve topology. I made a fundamental mistake by allowing the existence of more than the only fixed point belonging to the Birkhoff curve.

K. Kuratowski (1928) proved that an indecomposable continuum cutting a plane into two regions turns out to be monostratic (monostratique) [1]. This means that it does not allow cyclic decomposition. Therefore, *the Birkhoff curve has no more than the only fixed point with an index being equal to zero.*

So that, the Birkhoff curve is consisted to be nonwandering indecomposable continuum turning out to be two invariant regions boundary with respect to dynamic system acting on the plane. The Birkhoff curve geometric model has been constructed based on the Knaster example indecomposable continuum having two composants [2]. Then the *composants tails* have been connected. It is simple.

Now, on the assumption of the principle of constructing the Birkhoff curve geometric model, geometric models of the nonwandering continua turning out to be three regions common boundary have been constructed as follows:

fit the first, — the indecomposable continuum having four composants has been constructed

fit the second, — now let us expand this continuum in polar coordinates with respect to point (0,0) into the street as follows

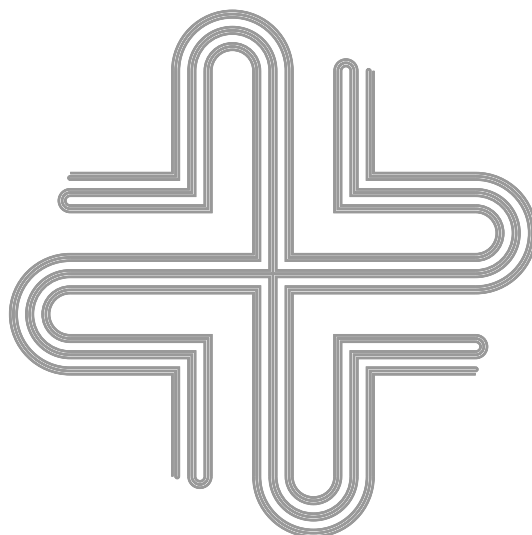


Fig 1. Indecomposable continuum having four composants

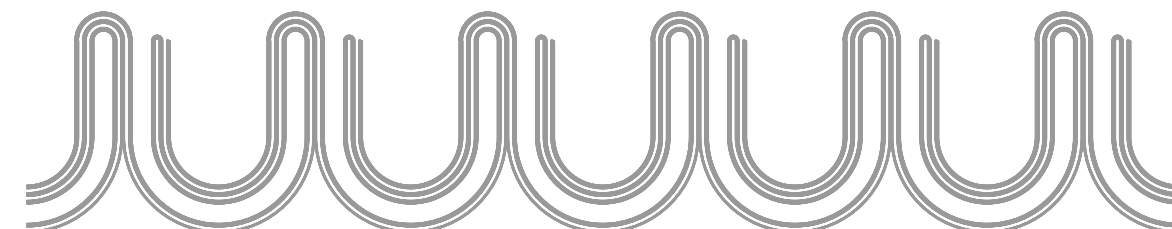
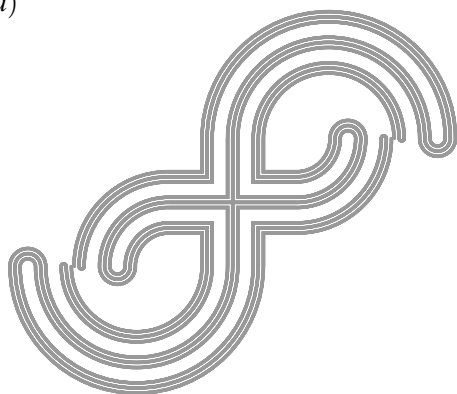


Fig 2. Expanding of continuum upon Fig. 1 in polar coordinates with respect to point  $(0,0)$ ;

fit the third, — now the endpoints of in pairs have been glued

a)



b)

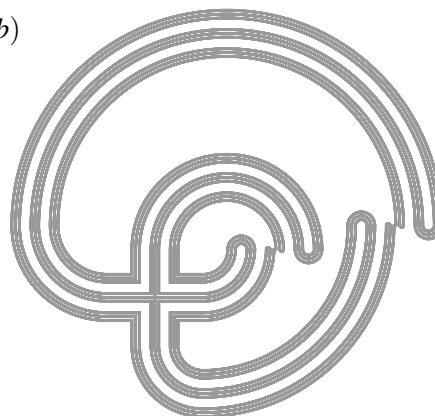


Fig 3. There exist only two ways to glue the endpoints;

the continua in Fig. 3 turn out to be three regions common boundary. Moreover, these constructions turn out to be more adapted to dynamic systems (compare with the examples from [3]) than the well-known Brower and Wada examples (following this path, can be got a common border of more than three regions); fit the fourth, — for instance, let us either glue in pairs tails of the neighbour composants in fig. 2, or constructs expanding of continuum in Fig. 3 a in polar coordinates with respect to point  $(0,0)$  as follows

It is clear that many examples of indecomposable continua like these can be constructed, but it is important that they allow us to decipher the structure of a nonwandering continuum. At any rate, all the examples given here correspond to the result of the specific dynamic systems action (see [3]). As an example, the simplest «five-tiling» model of a suitable indecomposable continuum is announced here. One can apply « $N_k$ -tiling» constructions with the same success, so that numbers  $N_k$  are forming

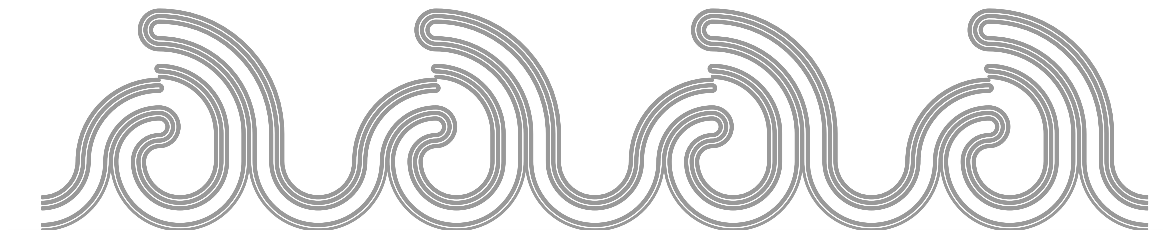


Fig 4. Expanding of continuum upon Fig. 3a in polar coordinates with respect to point  $(0, 0)$ ;

the recurrence sequence such, that

$$N_{k+1} = 2N_k - 1, \quad N_1 = 5,$$

if only it would fits to the specific dynamic system action. Moreover there exist the nonwandering continua possessing the Wada property having zero Lebesgue measure as well as positive Lebesgue measure. It is quite simple to simulate both one and the other situations. However a meaningful statement runs into the Erdős conjecture on arithmetic progression.

#### References

1. Kuratowski C. *Sur la structure des frontières communes à deux régions* // Fund. Math. 1928. Vol. 12, No 1. P. 21–42.
2. Knaster B. *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable* // Fund. Math. 1922. Vol. 3. P. 247–286.
3. Serow D. W., *Nonwandering Continuum Possessing the Wada Property* // Theor. and Math. Phys. 2021. Vol. 207, No 3. P. 841–853.

# СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

## УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СЛОЁВ К ТРЁХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Е.В. Авдейчик<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, zhenya\_avdeychik@mail.ru

В работе рассматриваются осесимметричные ограниченные слои жидкости, имеющие односвязную свободную поверхность и находящиеся в состоянии относительного покоя на верхней стороне вращающейся горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести. Изучению устойчивости данных равновесных форм к осесимметричным возмущениям посвящена статья [1], где используется принцип минимума потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений. При этом осуществляется анализ влияния, оказываемого наложение запрета на движение края капли, на теоретическую оценку устойчивости. Сравнение результатов, полученных в предположении неподвижной и подвижной трёхфазной линии, показало, что первое допущение обеспечивает лучшее согласие расчётных и экспериментальных данных.

Для получения верхней оценки запаса устойчивости описанных слоёв в трёхмерной постановке в настоящей работе исследуются возмущения, при которых все компоненты вектора перемещения некоторой точки свободной поверхности пропорциональны расстоянию до подложки, что обеспечивает условие фиксированного края капли. При этом рассматриваются два типа отклонений от равновесного состояния: радиальное растекание слоя по синусоидальному закону относительно окружной координаты и сдвиг горизонтальных срезов жидкости параллельно твёрдой поверхности. Первый тип соответствует распаду слоя на струи, исследованному экспериментально в статье [2], второй – направленному срыву капли.

На основании принципа минимума потенциальной энергии определено, что увеличение статического краевого угла смачивания и вращательного числа Вебера ведёт к уменьшению запаса устойчивости равновесной формы жидкости по отношению к обоим видам возмущений. Произведена оценка количества радиальных струй, образующихся в ходе распада слоя при постоянной угловой скорости диска и при её резком увеличении. В последнем случае полагалось, что за время изменения угловой скорости и её стабилизации на большем значении капля сохраняет форму, близкую к изначальной равновесной. При этом верхняя оценка квадрата максимального количества струй линейно зависит от отношения нового и старого чисел Вебера.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ «Энергетические и ядерные процессы и технологии» (подпрограмма «Энергетические процессы и технологии», задание 2.11 «Волновые течения капиллярных струй, слоев, плёнок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах»).

### Литература

1. Audzeichyk Y. V., Konon P. N. *Stability of a bounded liquid layer on a rotating horizontal plane* // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2023. Vol. 11, No 2. P. 11–32.
2. Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон Н. П. *Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске* // *Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник*. 2016. Т. 31, С. 87–94.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ НАНОИНДЕНТИРОВАНИЯ

С.М. Айзикович<sup>1</sup>, И.А. Панфилов<sup>1</sup>, П.А. Лапина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, пл. Гагарина 1, 344000 Ростов-на-Дону, Россия,  
saizikovich@gmail.com, mechanic\_rgu@mail.ru, polina\_azarova86@mail.ru

Одним из методов неразрушающих испытаний для определения упругих свойств материалов является наноиндентирование. В настоящей работе анализируется особенность использования решения, полученного с учётом полного пластического нелинейного поведения материала, при математическом моделировании процесса наноиндентирования.

В работе рассматриваются задачи о внедрении сферического и конического штампов в упругопластическое полупространство в статической осесимметричной постановке. Численно реализуется модель пластической деформации. Для верификации численного решения задач о внедрении сферического и конического инденторов в упругое однородное полупространство проведено сравнение решения, построенного численно, с известными аналитическими решениями. Численно задачи решаются методом конечных элементов в программном комплексе Ansys.

Контактные задачи относятся к нелинейным задачам из-за изменяющегося статуса контакта и матрицы жесткости, и требуют особого внимания к точности и сходимости. В отличие от аналитических теорий, где учитывается только контактная нелинейность при гипотезе малых деформаций, численно можно реализовать все три типа нелинейности: контактную, геометрическую (большие деформации) и физическую (пластику). Проведенное исследование показало, что для упругой задачи численный метод дает практически полное совпадение с аналитическими результатами. Погрешность возростала с увеличением деформации и для вертикальной силы для максимальных значений составила около 2 процентов.

Стоит отметить, что данные нагрузки для упругой задачи существенно превышают допустимые по пределу текучести и были рассмотрены как модельные задачи для сравнения моделей. В пределах упругих деформаций погрешность численных результатов составила менее 0.1 процента.

Зона контакта для упругой и упругопластической моделей существенно отличается. При пластичности материал «выдавливается» из-под инденторов и существенно увеличивает зону контакта. Для сферического индентора для максимального смещения отличие по радиусу контакта составило около 30 процентов, для конического – 45 процентов.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда, номер гранта РНФ 22-49-08014.

## ВОЛНА-СТУПЕНЬКА В СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЁНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.Н. Белоглазкин<sup>1</sup>, И.В. Шишкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, 119991  
beloglazkin@yandex.ru, shishkin.ignacy@yandex.ru

**Введение.** Широкое применение жидких плёнок в промышленности породило интерес к их теоретическому исследованию. Имея толщину всего доли миллиметра, они могут выступать в роли химически активного вещества или использоваться для отвода тепла. Поверхность слоя, как правило, покрыта системой нелинейных волн. За счёт этого увеличивается площадь поверхности, что значительно ускоряет физико-химические процессы на границе раздела газ-жидкость. Изучение волновых режимов, возникающих в течениях плёнок вязкой жидкости, помимо практической ценности имеет общетеоретический интерес в области нелинейной теории гидродинамической устойчивости.

Основной задачей в теории плёнок является стекание тонкого слоя вязкой жидкости по твёрдой поверхности в поле силы тяжести. П.Л. Капица положил начало экспериментальному и



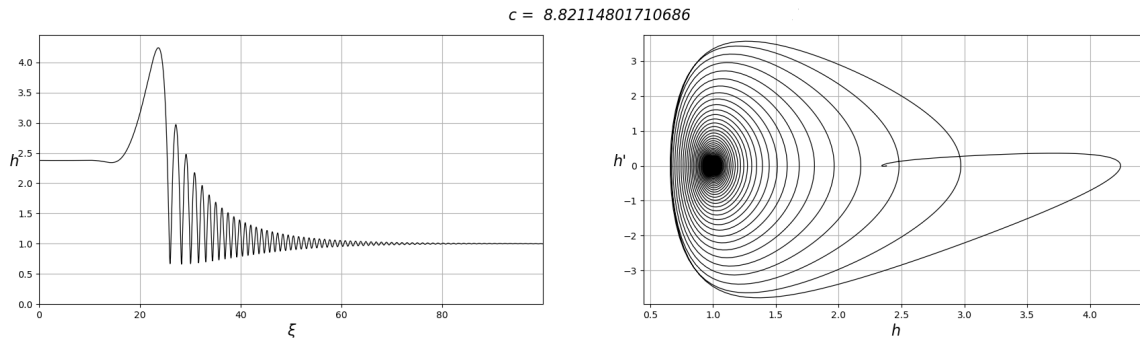


Рис. 1: Представитель первого семейства быстрых волн «сжатия»  
 $(c_1: c = 8.821148, h \rightarrow 1 + a, \text{ при } \xi \rightarrow -\infty \text{ и } h \rightarrow 1, \text{ при } \xi \rightarrow +\infty, a = 1.378)$

теоретическому исследованию [1]. В работе [2] В.Я. Шкадов первым предложил математическую модель, учитывающую нелинейность явления. В [3] были получены решения в виде уединённых волн. Была выведена система эволюционных уравнений Капицы-Шкадова. Она легла в основу теории подобных течений. Подробное описание математической модели, метод решения и анализ полученных результатов с экспериментальными данными изложены в работах [4–6]. Теория получила широкое развитие и известность [7].

Существует три вида возникающих в плёнках волн: периодические и уединённые волны (солитоны), а также волны-ступеньки. Настоящая работа посвящена исследованию волновых режимов последнего типа. Рассматривается течение тонкой плёнки вязкой жидкости вдоль внешности вертикальной цилиндрической поверхности.

**Волны-ступеньки.** Рассматриваемое течение описывается уравнением Шкадова (1):

$$h^3 h''' + h' \left( h^2 \frac{5\delta_\varepsilon}{1 + \varepsilon h/2} (c^2(1 + \varepsilon h) - M_h') + \left( \frac{\varepsilon}{\kappa(1 + \varepsilon h)} \right)^2 h^3 \right) + h^3 - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon h)} \left( \frac{c\varepsilon}{2} (h^2 - 1) + c(h - 1) + 1 \right) = 0, \quad (1)$$

где  $h$  – безразмерная толщина слоя,  $\delta_\varepsilon$  – параметр, характеризующий действующие силы,  $\varepsilon$  – геометрический параметр, равный отношению толщины плёнки к радиусу цилиндра,  $c$  – безразмерная фазовая скорость волны. Важным параметром в задаче является число Капицы  $\gamma$ .

Уравнение (1) имеет в фазовом пространстве  $(h, h', h'')$  три особые точки, две из которых – вещественные:  $O_1 = (1, 0, 0)$  и  $O_2 = (1 + a, 0, 0)$ . Волна-ступенька – это гетероклиническая траектория в фазовом пространстве, асимптотическая к особым точкам  $O_1$  и  $O_2$ . Для реализации данного решения необходим плавный переход между решениями, затухающими к 1 и  $1 + a$  на разных концах. Переход осуществляется за счёт нелинейности уравнения (1). Параметр  $a$  является безразмерной высотой ступеньки.

**Результаты.** Были построены многочисленные решения для различных значений параметров задачи. Накопленные данные позволили выявить общие черты солитонов и волн-ступенек. Удалось построить области существования решений для режимов с волнами-ступеньками.

$$\gamma = 2700, \quad \varepsilon = 0.1$$

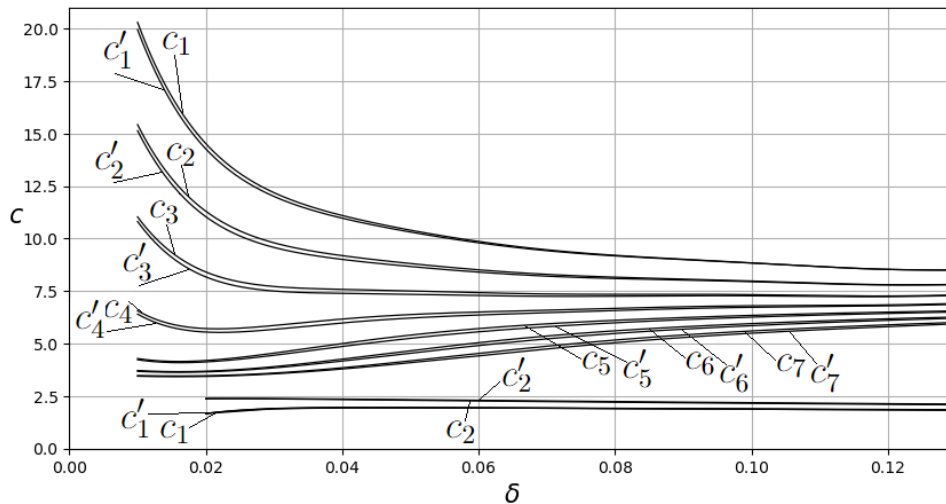


Рис. 2: Области существования первых семи семейств быстрых волн «сжатия»: полосы  $(c_1, c'_1)$ ,  $(c_2, c'_2)$ ,  $(c_3, c'_3)$ ,  $(c_4, c'_4)$ ,  $(c_5, c'_5)$ ,  $(c_6, c'_6)$ ,  $(c_7, c'_7)$ ; и первых двух семейств медленных волн «сжатия»: полосы  $(c_1, c'_1)$ ,  $(c_2, c'_2)$  – эти полосы практически сливаются в одну линию, так как отличие фазовых скоростей составляет для них величину порядка  $10^{-3}$  и меньше, при  $\gamma = 2700$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

### Литература

1. Капица П. Л. *Волновое течение тонких слоёв вязкой жидкости*. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
2. Шкадов В. Я. *Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести*. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
3. Шкадов В. Я. *Уединенные волны в слое вязкой жидкости*. // Изв. АН СССР, МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
4. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. *О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое*. // ПММ. 1984. Т. 48, № 4. С. 691–696.
5. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. *Бифуркации уединенных волн в стекающем слое жидкости*. // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. 1986. № 2. С. 73–78.
6. Шкадов В. Я., Белоглазкин А. Н., Герасимов С. В. *Уединенные волны в пленке вязкой жидкости, стекающей по тонкому вертикальному цилиндру*. // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 39–45.
7. Kalliadasis S., Ruyer-Quil C., Scheid B., Velarde M. G. *Falling liquid films*. Springer-Verlag London Limited, 2012.

## ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ВЛАСОВА В ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В.В. Веденяпин<sup>1</sup>, Н.Н. Фимин<sup>1</sup>, В.М. Чечёткин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. 4, 125047 Москва, Россия, vicveden@yahoo.com, oberon@kiam.ru, chechetv@gmail.com

В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия [5–11]. Получающийся вывод уравнений типа Власова дает уравнения Власова–Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее [12–13]. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5–8], как это делалось раньше уже самим А.А. Власовым [4]. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона–Якоби, как это делалось уже в квантовой механике

Е. Маделунгом, а в более общем виде В.В. Козловым. Таким образом, получаются в нерелятивистском случае решения Милна–МакКри, а также нерелятивистский и релятивистский анализ решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет проанализировать смысл  $\Lambda$ -члена Эйнштейна и темной энергии как причины ускоренного расширения Вселенной и построить теорию космологических решений. Это позволило переосмыслить и уточнить многие классические и новые вопросы расширяющейся Вселенной [5–13].

### Литература

1. Фок В. А. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: ЛКИ, 2007.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
3. Вейнберг С. *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1975.
4. Власов А. А. *Статистические функции распределения*. М.: Наука, 1966.
5. Веденяпин В. В., Негматов М. А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тожество Лагранжа и форма Годунова* // Теоретическая и математическая физика. 1994. 2012. Т. 170, № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В. В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н. Н. *Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия* // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В. В., Негматов М. А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса* // СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. Веденяпин В. В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*. М.: Физматлит, 2001.
9. Веденяпин В. В. *Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 188. С. 20.
10. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. *The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits* // International Journal of Modern Physics D. 2020. Vol. 29, No 1. P. 23.
11. Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V. *The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models* // European Physical Journal Plus. 2020. No 400. P. 14.
12. Cercigniani C., Kremer G. M. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2002.
13. Choquet–Bruhat Y. *Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology*. New York: Oxford University Press. 2015.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ С ГИДРООПОРОЙ

Н.А. Докукова<sup>1</sup>, П.П. Ситковская<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
dokukova@mail.ru, spp12022004@gmail.com

Комплексное технологическое проектирование амортизаторов мобильных машин тесным образом связано с математическим моделированием гасителей динамических колебаний. В лабораторных условиях подобные мероприятия сопровождаются установкой эластичных многослойных материалов, пневмо- и гидроамортизаторов, пружинных модулей и других компонентов. Такие элементы способны гасить или минимизировать передачу высокоамплитудных колебаний, исходящих от источника, и подавлять низкие частоты. Наиболее эффективным является использование совокупности таких устройств, образующих один общий блок [1]. Система виброизоляции технического сооружения включает в себя несколько упругодемпфирующих элементов, соединенных последовательно или параллельно и выполняющих различные функциональные назначения. Упругие металлические звенья смягчают биения и поддерживают конструкцию, являясь частью несущей опоры. Демпфирующая составляющая обеспечивает плавность хода за счёт поглощения излишней кинетической энергии.

Исследуется влияние дополнительной инерционной массы внутри гидроопоры на затухание собственных и вынужденных колебаний изолируемого объекта. Рассматривается разновидность

виброизоляции с цилиндрической упругой пружиной, гидравлическим амортизатором и гидропорой с инерционной массой. Динамическая схема воссоздает движения двухмассовой механической системы на упругом основании с коэффициентами упругостей и демпфирований в количестве четырех неизвестных переменных. Это приводит к многопараметрической задаче оптимизации и нахождения физических характеристик всех элементов из общего блока виброизолятора. Критериями задачи оптимизации являются нелинейные относительно физических коэффициентов неравенства, составленные на основании известных алгебраических принципов В.С. Воронова [2], обеспечивающие динамическую устойчивость рассматриваемой механической системы и асимптотическую устойчивость быстрого затухания колебаний. Появляются восемь трансцендентных соотношений для определения шести показателей задачи оптимизации [3–5]. В общем случае не представляется возможным выбрать наилучшую концепцию определения физических переменных. Для упрощения аналитических вычислений предлагается рассматривать их безразмерными в виде отношений физических величин с одинаковой размерностью. Это существенно облегчает оценочно-критериальную зависимость и приводит к общей методике выбора физических параметров и коэффициентов, обеспечивающих быстрое асимптотическое гашение высокоамплитудных динамических режимов. Разработанная методика может быть использована конструкторскими организациями промышленной отрасли народного хозяйства РБ. Примеры реализации полученного комплекса мероприятий на основе динамических схем, математических моделей, поставленных задач математической оптимизации, разработанных программ и алгоритмов, приведены ниже и подтверждают её достоверность.

Самые жесткие требования и условия устойчивости с запасом, накладываемые на физические параметры, приводят к полному асимптотическому гашению собственных колебаний двухмассовой системы на рисунке 1, и существенному снижению вынужденных колебаний на рисунке 2.

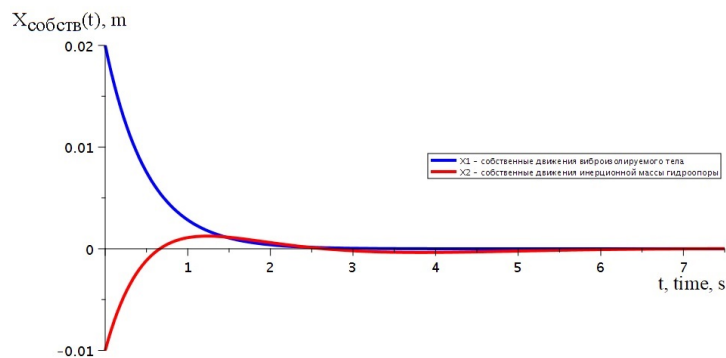


Рисунок 1. Собственные законы движений виброизолируемого тела и инерционной массы гидропоры

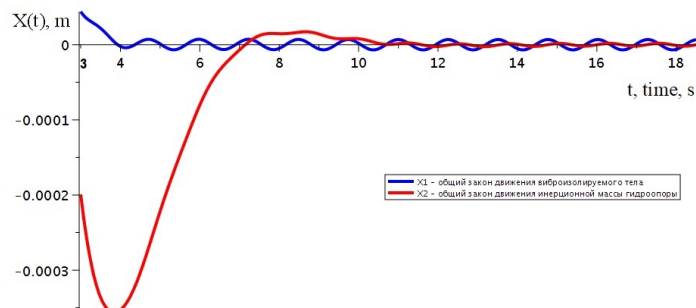


Рисунок 2. Общие законы движений виброизолируемого тела и инерционной массы гидропоры

Из сравнения двух моделей виброгашения двухкаскадной с гидропорой на рисунке 2 и однокаскадной без гидропоры на рисунке 3 следует, что использование дополнительной инер-

ционной массы в их конструкциях существенно повышает сопротивляемость среды, снижает вибронегруженность объекта, изолируемого от нежелательных колебаний.

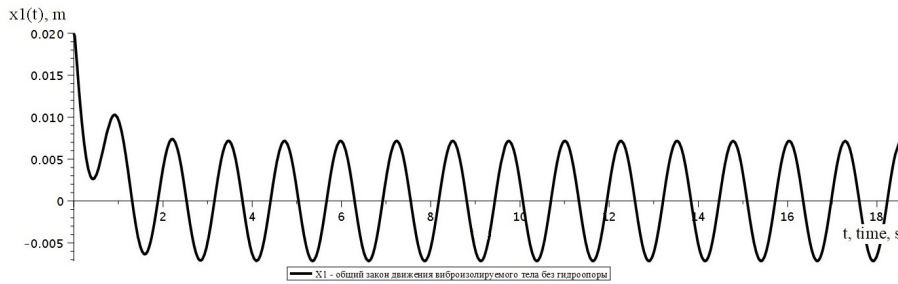


Рисунок 3. Общий закон движения виброизолируемого тела без гидропоры

Работа выполнена в рамках задания ГПНИ "Конвергенция - 2025 "Математические модели и методы – 1.7.01.7".

### Литература

1. Biderman V. L. *Theory of Mechanical Oscillations*. Moscow: Higher School, 1980.
2. Voronov, V. S. *Stability indicators of robust control systems* // *Izv. RAS. Theory and control systems*. 1995. No 6. P. 49–54.
3. Dokukova N. A., Konon P. N. *Dynamic vibrations of a deformable elastic cylindrical spring with a free end*. // VIII All-Russian Conference with international participation problems with free boundaries: theory, experiment and applications. Tomsk. 2023. P. 88–89.
4. Докукова Н. А. *Выбор рациональных параметров гидропоры с пористым элементом* // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2003. No 4, P. 15–18.
5. Dokukova N. A., Martynenko M. D., Kaftaikina E. N. *Nonlinear vibrations of hydraulic shock absorbers* // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2008. Vol. 81, No 6. P. 1197–1200.

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ВАЛКОВ НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ВАЛЬЦЕВАНИЯ

М.А. Журавков<sup>1</sup>, М.А. Николайчик<sup>1</sup>, А.Д. Пронько<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
zhuravkov@bsu.by, NikolaitchikMA@bsu.by, pronko345@gmail.com

**Введение.** При внесении калийных удобрений в почву имеют место достаточно большие потери исходного продукта вследствие его порошкообразного состояния. Этот факт инициировал разработку и внедрение в производственный цикл изготовления удобрений прессов различной конструкции, служащих для соединения мелкодисперсной смеси частиц концентрата хлорида калия в плитку [1].

В настоящий момент существует много конструкций прессов, но наибольшее распространение получили валковые прессы (валки), как наиболее простые в эксплуатации и по конструкции. При описании процессов прессования дисперсной массы на валковых прессах, используются главным образом четыре базовые модели: модель Йохансона, модель Каташинского и Штерна, энергетическая модель Шима и Ямада, моделирование на основе построения конечно-элементной численной модели. Среди данных подходов к моделированию процесса вальцевания был выбран конечно-элементный, это обусловлено тем, что численное моделирование позволяет получить представление о напряжённо-деформированном состоянии (НДС) сжимаемого материала с учётом реального физически нелинейного деформирования [2].

Особенность исследования, представленного в данной работе, состоит в том, что подаваемая грануляционная смесь моделируется деформируемым твердым телом с физико-механическими свойствами, имитирующими дискретную среду.

С точки зрения механики деформируемого твердого тела решается задача контактного взаимодействия валков и плитки. При этом, валки, прессуя подаваемый материал, непосредственно влияют на его НДС. Как следствие этого влияния, плитка приобретает определенную форму и остаточные деформации, зависящие от поверхностей прессующих валков.

**Постановка задачи.** Цель настоящего исследования заключалась в построении численной конечно-элементной модели процесса вальцевания. При этом моделировалось влияние формы валков на НДС системы «вальц-пресс – плитка». В частности, рассматривались две задачи контактного взаимодействия: 1 – прессование плитки круглыми валками с коэффициентом трения 0,33 [3] и без трения; 2 – прессование плитки зубчатыми валками с коэффициентом трения 0,33 и без трения (рисунок 1) [4].

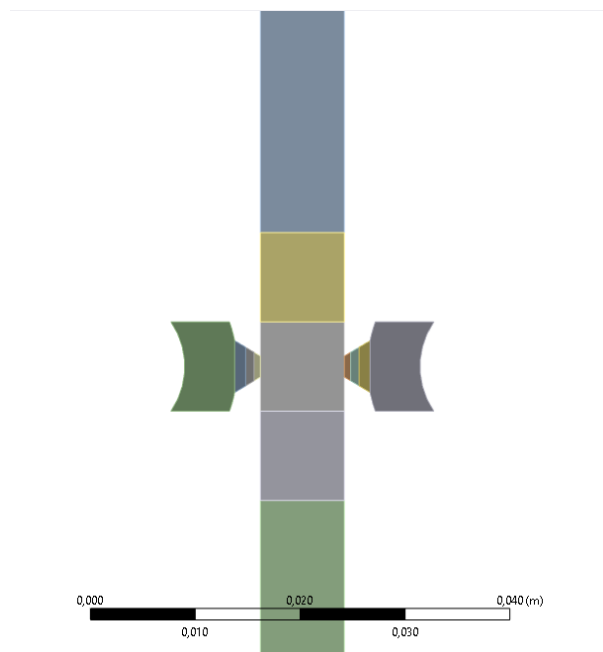


Рисунок 1. Твёрдотельная модель рассматриваемой системы

Полная система разрешающих уравнений математической модели рассматриваемой системы представляет собой модель динамической теории упругости и включает в себя: уравнения движения, соотношения Коши, уравнения совместности деформаций, закон Гука [5]. В виду того, что контактное взаимодействие происходит только в плоскости  $XU$ , целесообразно решать поставленную задачу в плоскодеформированной постановке, то есть компонента тензора напряжений  $\varepsilon_{ZZ} = 0$ .

Для моделирования поведения плитки под давлением валков использовалась упругопластическая модель Кулона-Мора, которое описывает уравнение (1) [6]:

$$\tau = \sigma \tan \varphi + c \quad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой билинейную зависимость касательных напряжений материала от величины приложенных нормальных напряжений, где  $c$  – сцепление.

#### Граничные условия.

Рассмотрим ситуацию, когда прессуемая плитка не перемещается и ее нижнее ребро зафиксировано по нормали. Тогда для реализации нескольких контактных взаимодействий между валками и плиткой в разные моменты времени необходимо задать вертикальные и горизонтальные перемещения валков.

Левый валок имеет как горизонтальные, так и вертикальные перемещения. Правый валок движется строго вертикально. Нижнее ребро плитки ограничено по нормали.

**Заключение.** По результатам проведения конечно-элементного анализа можно сделать вывод о влиянии формы валков на НДС рассматриваемой системы: острые ребра, находящиеся на поверхности валков, оказывают значительное влияние на получаемые значения эквивалентных

напряжений, максимальных сжимающих напряжений, контактных давлений, эквивалентных пластических деформаций, увеличивая их.

В работе описана процедура построения конечно-элементной модели и представлены результаты численного моделирования на ее основе процесса вальцевания в динамической постановке с разными типами валков: круглыми и зубчатыми. Рассмотрены два вида контактов валц-прессов с прессуемым материалом: с трением ( $\mu = 0,33$ ) и без трения. В качестве физико-механических свойств прессуемой гранулируемой смеси взяты свойства мергеля. При моделировании поведения руды под давлением валков была использована упругопластическая модель Кулона-Мора.

Рассмотрена задача динамической теории упругости с учетом граничных и начальных условий, соответствующих физическому процессу вальцевания. Граничные условия для валков и сжимаемой плитки записаны в виде перемещений.

#### Литература

1. Комаров О. С., Ковалевский В. Н., Чаус А. С., Хренов О. В., Данилко Б. М., Чигринов В. Е. *Технология конструкционных материалов*. Минск: Новое знание, 2005.
2. Coube O., Riedel H. *Numerical simulation of metal powder die compaction with special consideration to cracking* // Powder Metallurgy. 2000. Vol. 43, No 2. P. 123–131.
3. Александров А. А., Броневицкий А. П., Кузнецов В. А. *Справочник по управлению кораблем*. Военное издательство Министерства обороны СССР, 1974.
4. Баял К. В. *Аналитическое исследование влияния геометрических параметров формирующих элементов валковых прессов на процесс брикетирования* // Порошковая металлургия. 2012. № 3/4. С. 38–49.
5. Журавков М. А., Старовойтов Э. И. *Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учеб. пособ. для вузов по спец. «Механика»*. Минск: БГУ, 2011.
6. Brinkgreve R. B. J *Selection of soil models and parameters for geotechnical engineering application* // Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection, and Calibration. Ed. J.A. Yamamuro, V.N. Kaliakin. – American Society of Civil Engineers, 2005. Vol. 128. P. 69–98.

## МЕХАНИЗМ ВОЛОКНООБРАЗОВАНИЯ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВОЛОКОН ПРИ ОБТЕКАНИИ СТРУЕК РАСПЛАВА ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ

П.Н. Конон<sup>1</sup>, А.Е. Кулаго<sup>2</sup>, А.В. Доронина<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, kononpn@mail.ru, doroninaline@yandex.by

<sup>2</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,  
Стремянный переулок 36, 115054 Москва, Россия, andrej-artem@mail.ru

Из практики хорошо известны несколько способов получения минеральной ваты путем обтекания высокоскоростным газовым потоком со скоростью порядка 200–500 м/с струек минерального высокотемпературного до 1500 °С расплава. Этому вопросу посвящено достаточно большое количество работ и не меньшее количество различных объяснений данного явления. Большой литературный обзор данного вопроса представлен Г.Ф. Тобольским [1]. Из других исследований стоит отметить работу [2], где образование минерального волокна обусловлено «петлеванием» продольно обтекаемой струйки в набегающем потоке, ее торможением и дальнейшим вытягиванием в окончательное волокно, а также работу [3], где волокно получается благодаря кавитационному взрыву газовых пузырьков, находящихся в струйке расплава. Следует отметить работы [4–6] в исследовании механизмов волокнообразования. Нелинейное развитие возмущений в струе при наличии переменного давления исследовано в [7–10].

Исследованы процессы образования минеральных и металлических волокон дутьевым способом. Установлено, что при продольном обтекании струи газовым потоком на ее поверхности появляются малые возмущения, которые благодаря неустойчивости Тейлора–Гельмгольца нарастают.

Предложены формулы для расчета диаметра получаемых волокон в зависимости от физических и технологических параметров процесса. Исследован механизм образования неволоконистых включений в минеральной вате и даны формулы определения длины волокна. Сравнения с экспериментальными данными по длинам и диаметрам волокон дает хорошее соответствие.

## Литература

1. Тобольский Г. Ф. *Минеральная вата и изделия из нее*. Челябинск: Южно-Уральское кн.изд-во, 1968.
2. Полевой П. П. *Теплообменные процессы при получении волокна раздувом минеральных нитей высокотемпературными газовыми потоками*. Автореф. на соиск. учен. степени канд. тех. наук. Киев: Ин-т теплофизики АН УССР, 1983.
3. Тихонов Р. Д. [и др.] *Ультразвук в технологии минеральной ваты* // Строительные материалы. 1982. № 6.
4. Кулаго А. Е. *О механизме волокнообразования при центробежно-валковом способе производства минеральной ваты* // Строительные материалы. 1974. № 11.
5. Кулаго А. Е. *О длине волокна и неволоконистых включений минеральной ваты* // Строительные материалы. 1984. № 1.
6. Кулаго А. Е., Мясников В. П. *Расчет диаметра струй при неустойчивости Тейлора-Гельмгольца* // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 229, № 2. С. 322–324.
7. Епихин В. Е., Кулаго А. Е., Шкадов В. Я. *Движение неизотермических струй в поле центробежных сил* // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газов. 1980. № 5. С. 26–37.
8. Кулаго А. Е., Конон П. Н. *Определение ускорений точек поверхности возмущенной струи*. // Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект «Конструкция и строительство специальных сооружений». 1983. С. 39–48.
9. Конон П. Н., Макоед А. Г. *Об устойчивости струйных течений с учетом внешнего воздействия* // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». 2018. Вып. 33. С. 426–429.
10. Конон П. Н., Макоед А. Г., Шкадов В. Я. *Влияние переменного внешнего давления на развитие возмущений в капиллярной струе жидкости* // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 2019. Т. 2. С. 156–158.

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ  
МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ОБЖАТИЯ СЛОЕВ**

**В.В. Королевич**

Международный центр современного образования (ICME) (Прага, Чехия),  
ul. Štepanská 61, Praha 1, PSČ 110 00, Česká republika,  
v.korolevich@mail.ru

Исследуется напряженно-деформированное состояние конической оболочки с металлическими фланцами на нижнем и верхнем срезах оболочки. Оболочка изготавливается путем непрерывной намотки на оправку композиционного материала. Однонаправленные слои препрега укладываются по геодезическим линиям поверхности. При этом в окрестностях фланцев слой препрега касается нижнего и верхнего срезов оболочки [1].

Оболочка нагружена постоянным внутренним давлением  $p_0$  газа или жидкости. Кроме того, такая оболочка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг нормальной оси, совпадающей с геометрической осью конуса. Конические оболочки являются конструктивными элементами экстракторов, применяемых в химической, металлургической, пищевой, фармацевтической и целлюлозной промышленности. Под действием приложенных внешних усилий многослойная анизотропная коническая оболочка будет испытывать осесимметричную деформацию.

Для расчета напряжений и перемещений в многослойной ортотропной конической оболочке используется модель слоистой оболочки, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие слоев материала [2]. В результате получим нормальную систему из 12 дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d\bar{N}}{dz} = A(z)\bar{N} + \bar{f}(z),$$

где  $\bar{N}(z) = \{N_z, N_{z\theta}, Q_z, M_z, M_{z\theta}, P_z, u, v, w, \psi_z, \psi_\theta, \psi_\gamma\}$  – вектор-столбец неизвестных величин (усилия и моменты в оболочке, перемещения координатной поверхности, углы поворота и деформации прямолинейного элемента) в системе координат  $z\theta\gamma$ ;  $A(z) = \|a_{ij}(z)\|$ ,  $i, j = \overline{1, 12}$ , – матрица коэффициентов;  $\bar{f}(z) = \{f_1(z), f_2(z), \dots, f_{12}(z)\}^T$  – вектор-столбец нагрузок на оболочку.



Данная система уравнений решалась численными методами для конической оболочки из углепластика. Напряжения в слоях оболочки рассчитывались по известным формулам.

### Литература

1. Комков М. А., Буланов И. М. *Определение конструктивно-технологических параметров оболочек, намотанных из композиционных материалов*. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1992.
2. Василенко А. Т., Савченко П. И. *Осесимметричная деформация слоистых анизотропных оболочек вращения с учетом поперечных сдвигов и обжатия* // Прикл. механика. 1988. Т. 24, № 5. С. 75–80.

## ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ В ТЕПЛОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННЫХ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В.В. Королевич<sup>1</sup>, Д.Г. Медведев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Международный центр современного образования (ИСМЕ) (Прага, Чехия),  
ul. Štepanská 61, Praha 1, PSČ 110 00, Česká republika,  
v.korolevich@mail.ru

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь)  
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь,  
medvedev@bsu.by

В современном турбостроении облопаченные диски рабочих колес турбомашин и турбокомпрессоров являются наиболее ответственными деталями этих конструкций [1]. Выполненные из сверхпрочных композиционных материалов, они вращаются с большой угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг нормальной оси. Как правило, диск и обод с лопатками турбины находятся в интенсивных тепловых полях. Следовательно, диск, обод и лопатки турбины одновременно будут испытывать механическую деформацию от действия центробежных сил и температурную деформацию от теплового поля.

Ниже рассматривается ротор турбины в виде профилированного полярно-ортотропного кольцевого диска, который на внешнем контуре радиуса  $R$  соединен с ободом, несущем  $N$  равноотстоящих одинаковых лопаток. Теплообмен с внешней средой происходит через оба основания диска. Ротор насаживается с натягом на вал, так что на внутреннем его контуре радиуса  $r_0$  действует контактное давление  $p_0$ . Либо диск жестко соединен с валом, так что отсутствуют перемещения точек внутреннего контура диска.

Действие обода с лопатками на диск представим в виде равномерно распределенной постоянной осесимметричной нагрузки интенсивностью  $p = \text{const}$ , приложенной на внешнем контуре диска. Предполагается, что распределение температуры  $T(r)$  в диске тоже осесимметричное и зависит только от радиуса  $r$ .

Термоупругое напряженное состояние вращающегося профилированного полярно-ортотропного кольцевого диска описывается системой интегральных уравнений Вольтерры второго рода для радиального перемещения  $u(t)$  и функции температуры  $\Theta_0(t) = T - T_0$  в безразмерной координате  $t = \ln(r/r_0)$ :

$$u(t) = \lambda_1 \int_0^t K_0^{(u)}(t, \tau) u(\tau) d\tau + F_1(t), \quad \Theta_0(t) = \lambda_2 \int_0^t K_0^{(T)}(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau + f_2(t), \quad (1)$$

где  $\lambda_1 = 1/k$ ,  $\lambda_2 = 1/\Omega$  – числовые параметры,  $k = \sqrt{E_\theta/E_r} > 1$ ,  $\Omega = \sqrt{2Hr_0/\lambda_r}$ ;

$$K_0^{(u)} = \left\{ \left[ \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' - \nu_{\theta r} \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \text{sh}(k(t-\tau)) - k \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \text{ch}(k(t-\tau)) \right\},$$

$$K_1^{(T)} = \left\{ \left[ \left( \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) - \nu_{\theta r} \right) \alpha_r + \left( \nu_{\theta r} \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) - k^2 \right) \alpha_\theta \right] \text{sh}(k(t-\tau)) + \right. \\ \left. + k[(\alpha_r + \nu_{\theta r} \alpha_\theta) r_0 e^\tau] \text{ch}(k(t-\tau)) \right\},$$

$$K_0^{(T)} = \left\{ \left[ \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left[ 1 + \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right] \right] \sin(\Omega(t - \tau)) - \Omega \left( \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cos(\Omega(t - \tau)) \right\}$$

– ядра интегральных уравнений (1);

$$F_1(t) = \lambda_1 \int_0^t K_0^{(T)}(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau - \frac{k^2 - \nu_{\theta r}^2}{E_\theta} \rho \omega_0^2 r_0^3 \int_0^t e^{3\tau} \operatorname{sh}(k(t - \tau)) d\tau + C_1 \operatorname{sh}(kt) + C_2 \operatorname{ch}(kt),$$

$f_2(t) = C_3 \sin(\Omega t) + C_4 \cos(\Omega t)$  – свободные члены интегральных уравнений системы (1), в которых постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из силовых граничных условий, а постоянные  $C_3$  и  $C_4$  – из температурных граничных условий;  $E_r, E_\theta$  – модули Юнга растяжения (сжатия) полярно-ортотропного тела в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно;  $\nu_{\theta r}$  – коэффициент Пуассона;  $\rho$  – плотность композитного материала диска;  $T_0$  – температура окружающей среды;  $H$  – коэффициент теплоотдачи поверхности композитного диска;  $\lambda_r$  – радиальный коэффициент теплопроводности композитного материала диска;  $\alpha_r$  и  $\alpha_\theta$  – радиальный и тангенциальный коэффициенты линейного температурного расширения композитного материала диска соответственно.

Компоненты радиального  $\sigma_r(t)$  и тангенциального  $\sigma_\theta(t)$  напряжений выражаются через радиальное перемещение  $u(t)$  и функцию температуры  $\Theta_0(r)$  по формулам

$$\sigma_r(t) = \frac{E_\theta}{k^2 - \nu_{\theta r}^2} \left[ \left( \frac{du}{dr} + \frac{\nu_{\theta r}}{r} u(r) \right) - (\alpha_r + \nu_{\theta r} \alpha_r) \Theta_0(r) \right],$$

$$\sigma_\theta(t) = \frac{E_\theta}{k^2 - \nu_{\theta r}^2} \left[ \left( \nu_{\theta r} \frac{du}{dr} + \frac{k^2}{r} u(r) \right) - (\nu_{\theta r} \alpha_r + k^2 \alpha_r) \Theta_0(r) \right].$$

Общие решения интегральных уравнений системы (1) записываются с помощью *резольвент*  $R_0^{(u)}(t, s; \lambda_1)$  и  $R_0^{(T)}(t, s; \lambda_2)$  соответственно [2]:

$$u(t) = \lambda_1 \int_0^t R_0^{(u)}(t, s; \lambda_1) f_1(s) ds + f_1(t) + \lambda_1 \int_0^t [\lambda_1(t - s) R_0^{(u)}(t, s; \lambda_1) K_1^{(T)}(s, s) + K_1^{(T)}(t, s)] \Theta_0(s) ds,$$

$$\Theta_0(t) = \lambda_2 \int_0^t R_0^{(T)}(t, s; \lambda_2) f_2(s) ds + f_2(t).$$

Здесь функции  $R_0^{(u)}(t, s; \lambda_1)$  и  $R_0^{(T)}(t, s; \lambda_2)$  определяются функциональными рядами

$$R_0^{(u)}(t, s; \lambda_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_1^m K_{0, m+1}^{(u)}(t, s), \quad R_0^{(T)}(t, s; \lambda_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_2^m K_{0, m+1}^{(T)}(t, s),$$

которые для непрерывных ядер  $K_{0, m}^{(u)}(t, s)$  и  $K_{0, m}^{(T)}(t, s)$  сходятся абсолютно и непрерывно.

*Повторяющиеся, или итерированные, ядра*  $K_{0, m}^{(u)}(t, s)$  и  $K_{0, m}^{(T)}(t, s)$  вычисляются по известным формулам [2].

В качестве примера рассчитывались напряжения  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\theta(r)$  и радиальное перемещение  $u(r)$  в полярно-ортотропном диске степенного профиля из углепластика, вращающегося в тепловом поле.

#### Литература

1. Малинин Н. Н. *Прочность турбомашин*. М.: ЮРАЙТ, 2018.
2. Краснов М. П., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями*. М.: КомКнига, 2007.

## СИМУЛЯТОР СИНТЕЗА И РАСЧЕТА ЛЕТУЧЕСТИ $\beta$ -ДИКЕТОНАТОВ МЕТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНО-ГРАФОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н.Н. Костюк<sup>1</sup>, Т.А. Дик<sup>1</sup>, Ю.М. Метельский<sup>1</sup>, К.А. Шинкарёв<sup>1</sup>, А.Р. Цыганов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,

{nnkostyuk,dick,metelsky}@bsu.by, shynkarou\_bsu@mail.ru

<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет,

Свердлова 13а, 220006 Минск, Беларусь, tziganov@belstu.by

В настоящее время особую роль в научных исследованиях, в сфере высоких технологий и производстве играет CVD-метод (Chemical Vapor Deposition). Суть CVD-метода заключается в разложении летучих веществ из газовой фазы на подложки различных типов с получением металлосодержащих покрытий и плёнок [1]. Расширение сферы использования технологий на базе CVD-метода требует наличия высококачественных прекурсоров в промышленном масштабе.

Из всех известных классов соединений, используемых при реализации CVD-метода, наиболее технологично состоятельны  $\beta$ -дикетонаты металлов. Они обладают высокой степенью летучести при умеренных температурах, устойчивостью к влаге и кислороду воздуха [2, 3]. Вместе с тем, для научных исследований и в сфере высоких технологий требуются не просто летучие соединения, а ультрачистые. Такое положение дел ведет к возврату исследования методов получения  $\beta$ -дикетонатов переходных металлов. Возникает необходимость провести огромный объём химического эксперимента с использованием дорогостоящих  $\beta$ -дикетонатов и большого количества переходных металлов, большинство из которых представляют собой дорогостоящие реагенты. Сокращение объёмов химического эксперимента возможно за счёт моделирования процессов синтеза  $\beta$ -дикетонатов переходных металлов с заданными физико-химическими свойствами.

Одним из путей решения поставленной задачи может быть создание симулятора синтеза хелатных соединений на основе  $\beta$ -дикетонатов металлов. Симулятор может быть реализован на базе графового моделирования, так как любой химический синтез подразумевает некоторые состояния веществ и переходы между ними, что удобно представить в виде вершин и рёбер специального графа-модели.

На базе языка C# и технологий WPF был создан симулятор методов получения  $\beta$ -дикетонатов металлов и расчета условного коэффициента их летучести с помощью комбинаторно-графового моделирования реальных синтетических процессов. Граф-модель представляет собой взвешенный ориентированный граф, вершины которого помечены как вершины-источники (исходные реагенты), вершины-квазиреакции (неполные уравнения и схемы реакций получения  $\beta$ -дикетонатов металлов), а также вершины-продукты ( $\beta$ -дикетонаты металлов – продукты синтеза). Заметим, что некоторые вершины, в частности, большинство  $\beta$ -дикетонатов металлов, являются как вершинами-источниками, так и вершинами-продуктами одновременно. Описанные вершины соединены между собой ребрами, ориентированными от вершин-источников к вершинам-реакциям и от вершин-реакций к вершинам-продуктам. Веса ребер определяются рядом численных критериев, отражающих препаративную состоятельность синтеза, возможность синтеза ультрачистых веществ, степень экологичности реакций, а также возможность исключения гидролиза и гидратации целевого продукта.

Для хранения графа-модели была сформирована база данных, состоящая из четырех таблиц. В первой таблице хранится множество вершин-источников и информация о них (тип химического соединения, а так же летучесть и степень фторированности для источников-хелатов). Вторая таблица хранит вершины-квазиреакции и информацию о соответствующих реакциях (побочные продукты, целевой продукт и его степень фторированности). Третья таблица описывает рёбра графа. Она основывается на паре ключей из двух предыдущих таблиц (пара ключ вершины-источника и ключ вершины-квазиреакции). В ней также хранится информация о направлении ребра и о типе реакции. Последняя таблица дает представление о типах реакций. Она хранит номера реакций и соответствующие веса.

Разработанный симулятор при помощи алгоритма Дейкстры способен находить оптимальные пути между любым выбранным реагентом и любым выбранным хелатом с учетом дополнительных параметров летучести и особенностей протекания химических реакций. Дальнейшим развитием программы может стать добавление в базу данных большего количества металлов и лигандов, с помощью чего можно будет существенно расширить информационное поле рассматриваемых соединений и реакций, но при этом принцип работы программы не изменится.

Созданный симулятор синтеза  $\beta$ -дикетонатов металлов может быть использован на факультетах химического профиля УВО при проведении практических занятий для студентов в рамках курсов “Неорганический синтез” и “Синтез координационных соединений”, а также на предприятиях химической промышленности. Симулятор может быть полезен для заводских технологов, осуществляющих контроль синтетических процессов непосредственно в цехах профильных промышленных предприятий.

### Литература

1. Сыркин В. Г. *CVD-метод. Химическая парофазная металлизация*. М.: Наука, 2000.
2. Вертопрахов В. Н., Круподер С. А. *Получение тонких пленок меди из фазы летучих производных меди(I) и меди(II) CVD-методом // Успехи химии*. 2000. Т. 69, № 12. С. 1149–1177.
3. Цыганова Е. И., Дягилева Л. М. *Реакционная способность  $\beta$ -дикетонатов металлов в реакциях термораспада // Успехи химии*. 1996. Т. 65, № 4. С. 334–349.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА СЛОИСТУЮ ГЕОСРЕДУ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

С.Н. Лопатин<sup>1</sup>, П.С. Передрий<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
lopatinsn@tut.by, pavelpiaredriy@gmail.com

Рассмотрим задачу о действии динамической нагрузки на слоистую геосреду. Уравнения движения для данного случая запишем в виде [1]:

$$\operatorname{div} \sigma = \rho_c \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}|_{x_3=-h} = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=-h} = P(x_1, x_2, t) = Ma(x_1, x_2, t), \\ \sigma_{3i}|_{x_3=0} = \sigma_{33} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) выполним при помощи метода асимптотического интегрирования. Для этого введем малый параметр  $\varepsilon$  и введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi_i = \frac{x_i}{L}, \quad \eta = \frac{x_3}{h}, \quad \tau = \frac{tc_{2c}}{L}, \quad u_i = hu_i^*, \quad u_3 = Lu_3^*, \quad v_3 = Lv_3^*, \quad \sigma_{ii} = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \varepsilon \sigma_{ii}^* \\ \sigma_{33} = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \varepsilon \sigma_{33}^*, \quad \sigma_{3i} = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \varepsilon^2 \sigma_{3i}^*, \quad \sigma_{12} = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \varepsilon^2 \sigma_{12}^*, \quad P = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \varepsilon P^* \end{aligned}$$

Далее выполним асимптотическое разложение искомых компонент тензора напряжений и вектора перемещений:

$$\begin{pmatrix} u_m^* \\ \sigma_{mn}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_m^{(0)} \\ \sigma_{mn}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_m^{(1)} \\ \sigma_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

В результате интегрирования получаем следующее выражение для компоненты нормальных напряжений  $\sigma_{33}$  [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \rho_c h \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{\rho_c h^3}{6} (2c_{2c}^2 (1 - k_c^2) \Delta^2 v_3 - k_c^2 \Delta \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} - 2c_{1c}^{-2} \frac{\partial^4 v_3}{\partial t^4}) \\ + \frac{h^2}{2} ((1 - 2k_c^2) \rho_c \operatorname{div} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_{1c}^{-2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}) \end{aligned}$$

Где  $w$  - двухмерный вектор «касательных» перемещений пограничного слоя при  $x_3 = 0$ ,  $c_{1c}, c_{2c}$  - продольная и поперечная волновые скорости,  $k_c - \frac{c_1}{c_2}$ ,  $\rho_c$  - плотность геосреды.

Подставляя значения физико-механических свойств рассматриваемой геосреды (3) получаем решение (4).

$$c_{1c} = 931.844 \frac{\text{М}}{\text{с}}, c_{2c} = 570.636 \frac{\text{М}}{\text{с}}, k_c = 0.612, \rho_c = 2043 \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \quad (3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, t) = 10.5e^{0.612i(x_1 - 0.157t) + 0.612ix_2} \quad (4)$$

### Литература

1. Kaplunov J. D., Prikazhnikov D. A. *Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves* // Advances in Applied Mechanics. 2017. Vol. 50. P. 1–106.

2. Bratov V. A., Kaplunov J. D., Lapatsin S. N., Prikazhnikov D. A. *Elastodynamics of a coated half-space under a sliding contact* // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27, No 8. P. 1480–1493.

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МУНИ-РИВЛИНА ДЛЯ ГИПЕРУПРУГОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДАМИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Д.Е. Мармыш<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, marmyshdenis@mail.ru

**Модель гиперупругого материала.** Гиперупругие материалы или эластомеры, такие как каучук, резина, пена и биологические материалы, являются широко распространенными практически в любой отрасли промышленности. Возникает необходимость в исследовании напряженно-деформированного состояния объектов, использующих подобные материалы.

Модель Муни-Ривлина – это модель, описывающая поведение гиперупругих материалов через потенциал энергии деформации. Модель учитывает характеристики материала, используя упругие константы. Модель Муни-Ривлина получается из полиномиальной модели потенциала плотности энергии [1]

$$W = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{d_k} (\bar{J}_e - 1)^{2k},$$

где  $c_{ij}$ ,  $d_k$ ,  $N$  – это константы материала,  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  – первый и второй инварианты девиаторных деформаций.

В данном исследовании проводилась оценка для двухпараметрической модели, которая выглядит следующим образом [2]

$$W = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3).$$

**Построение и оценка ИНС.** Численный эксперимент проводился на брусе подверженном осевому растяжению. Для оценки параметров  $c_{10}$  и  $c_{01}$  использовалась трехслойная искусственная нейронная сеть (ИНС) с активационной функцией  $ReLU(x) = \max(0, x)$ . В качестве входных параметров нейронной сети использовались следующие данные: 1) осевое усилие, 2) напряжение в сечении, 3) деформация сечения, 4) перемещение сечения. Исходные входные данные масштабировались, чтобы их значения принадлежали промежутку  $[0, 1]$ . Для масштабирования использовался минимаксный метод [3]

$$y_i = \frac{x_i - \min x}{\max x - \min x},$$

где  $y_i$  – прошкалированный элемент,  $x_i$  – не прошкалированный элемент,  $\min x$  и  $\max x$  – наибольший и наименьший элемент среди всех нешкалированных значений, соответственно.

Для сравнения численная оптимизация проводилась с помощью четырех методов: Adam, AdaGrad, RMSProp, SGD [4]. Наибольшую точность при оценке функции потерь показал метод Adam, поэтому он был выбран в дальнейшем для оценки весовых коэффициентов нейронной сети.

**Результат.** При проведении численного эксперимента варьировались значения количества образцов для обучения ИНС, количество нейронов в скрытом слое, количество данных для обучения. Для наиболее оптимальных данных удалось достигнуть точности обучения сети в 96,7%. Средние предсказанные значения точности для упругих констант  $c_{10}$  и  $c_{01}$  равны 0,58% и 0,48%, соответственно. Таким образом, построенная ИНС является эффективным методом оценки параметров модели по экспериментальным данным для имеющегося эластомера. Кроме того, подход можно использовать и для подбора материала по известным заранее характеристикам.

#### Литература

1. Ogden R. W. *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984. 532 p.
2. Rivlin R. S. *Some applications of elasticity theory to rubber engineering* // Collected Papers of R.S. Rivlin, 1997. Vol. 1. P. 9–16.
3. Haykin S. *Neural network: a comprehensive foundation. 2nd edition*. Prentice Hall, 1998. 842 p.
4. Каширина И. Л., Демченко М. В. *Исследование и сравнительный анализ методов оптимизации, используемых при обучении нейронных сетей* // Вестн. Ворон. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационных технологии. 2018. № 4. С. 123–132.

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЬЕВ С ПОКРЫТИЯМИ В ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ ИЗ КОМПОЗИТОВ

В.В. Можаровский<sup>1</sup>, Д.С. Кузьменков<sup>1</sup>, С.В. Киргинцева<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,  
val-mozh@yandex.ru, {kuzmenkov, torgonskaya}@gsu.by

**Введение.** Эксплуатация деталей элементов конструкций напрямую зависит от износостойкости и долговечности используемых материалов. Это требует разработки более детальных подходов к новым алгоритмам расчета выбора оптимальных свойств композиционных материалов [1–3]. Разработан алгоритм и проведен расчет напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из современных композиционных материалов на основе имеющейся теории о математических моделях ортотропных тел и функционально-градиентных материалов (ФГМ) [2, 3].

**Математическая модель.** На основании [1] строим функцию напряжений  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  соответственно для ортотропной полосы и изотропной полуплоскости, которые удовлетворяют бигармоническим уравнениям:

$$S_{11} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + S_{22} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} = 0; \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}; S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии:  $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $E_x = E_1$ ,  $E_y = E_2$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{12}$ . Здесь  $E_j$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu$  – технические постоянные материала, модули упругости и коэффициенты Пуассона. Примем физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}; \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  – компоненты тензора напряжений и деформаций.

Решения уравнений (1) и (2) для слоистого композита ищем в виде интегралов Фурье соответственно:

$$\Phi_1 = \int_0^{\infty} (Ach(\alpha y \gamma_1) + Bch(\alpha y \gamma_2) + Nsh(\alpha y \gamma_1) + Ksh(\alpha y \gamma_2)) \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha; \quad (3)$$

$$\Phi_2 = \int_0^{\infty} (C + D\alpha y) e^{-\alpha y} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha; \quad (4)$$

Здесь  $\gamma_i, i = 1, 2$  – действительные корни характеристического уравнения. Неизвестные коэффициенты  $A, B, N, K, C, D$  находим из граничных условий [1].

$$\gamma_i = 1/\beta_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}}.$$

**Практическая реализация методики. Результаты расчета.** Построены графики изменения напряжений  $\sigma_y/p_0, \sigma_x/p_0, \tau_{max}/p_0$  по глубине от поверхности контакта для различных материалов, а также линии уровня максимального касательного напряжения  $\tau_{max}/p_0$  для изотропного, ортотропного и функционально-градиентного материалов. Расчет напряжений в упругом теле зубьев зубчатых колес из композита показал совпадение с известными данными расчета для зубьев из изотропных материалов, в частном случае, при выбранных определенных параметрах. Предложенный алгоритм и результаты расчета могут найти применение в вычислениях напряженного состояния зубьев зубчатых колес из композитов для зубчатых передач.

Рассмотрим реализацию решения задачи об определении напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим зубом. Сначала рассмотрим случай для ортотропного покрытия на жестком основании (рисунок 1).

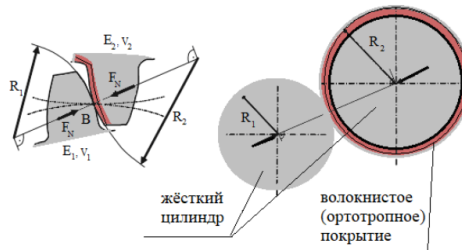


Рисунок 1. Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием

Характер изменения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по глубине покрытия под центром загрузки показан на рисунке 2. Из рисунка следует, что напряжения  $\sigma_y$  практически линейно убывают по глубине, а напряжения  $\sigma_x$  имеют максимальные значения на поверхности при  $y = 0$  и на границе раздела с жестким основанием.

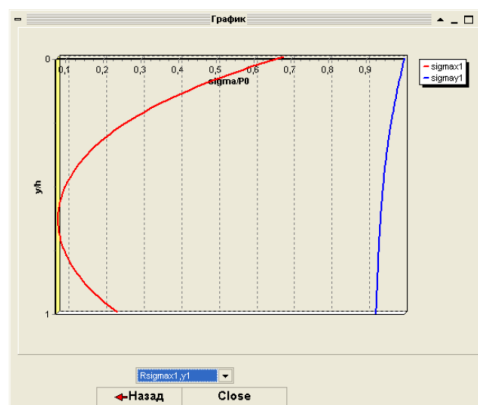


Рисунок 2. Изменение напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  в покрытии  $a/h = 2, E_x = 52.7, E_y = 11.90, G_{xy} = 5.62$  ГПа

**Алгоритм решения задачи.** Исходя из введенных пользователем начальных данных (модули, Юнга, коэффициенты Пуассона, величину действующего давления, зона контакта 2 и др.) программа по формулам (1)–(4) находит все необходимые величины для определения напряжений и перемещений. Далее, по формулам для напряжений и перемещений из монографии [1] вычисляем значения. Осуществляем вывод полученных результатов в виде таблиц и в графическом виде.

**Программная реализация.** Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая решение задачи об определении напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим. Разрабатывается программа расчета напряжений для изотропных покрытий с волокнистым основанием.

#### Литература

1. Можаровский В. В., Старжинский В. Е. *Прикладная механика слоистых тел из композитов*. Минск: Наука и техника, 1988.
2. Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Киргинцева С. В. *Компьютерная реализация методики расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материалов* // Известия ГГУ. 2021. № 6(129). С. 171–177.
3. Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S., Kirhintsava S. V. *Calculation of the contact interaction of gear teeth from composite materials* // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. 2022. Vol. 6, Issue 2. P. 18921–18928.

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОК, РАЗВИВАЕМЫХ ПОЛНЫМ ПРОТЕЗОМ НИЖНЕЙ ЧЕЛЮСТИ ПРИ ЖЕВАНИИ

Д.В. Назаренко<sup>1</sup>, С.М. Босьяков<sup>1</sup>, В.В. Дутина<sup>1</sup>, С.П. Рубникович<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, bosiakov@bsu.by

<sup>2</sup>Белорусский государственный медицинский университет,  
Дзержинского 83, 220083 Минск, Беларусь, rubnikovichs@mail.ru

**Введение.** Для устранения проблем, связанных с пережевыванием пищи, у пациентов с полной адентией, как правило, используются несъемные протезы, зафиксированные на имплантатах. При этом одним из определяющих факторов, влияющих на успешность лечения, является конфигурация и количество опор [1]. Целью настоящей работы является определение величин жевательных сил, действующих на продукты питания, развиваемых полным протезом нижней челюсти, при различном количестве имплантатов.

**Материалы и методы.** Параметризованная по толщине кортикальной костной ткани и слизистой оболочки конечно-элементная модель нижней челюсти с протезом разработана на основании томографических данных. Для рассматриваемых моделей толщина слоя кортикальной костной ткани составляет 3,7 мм, 3,4 мм и 3,1 мм; толщина слизистой оболочки принимает значения 3,0 мм, 2,5 мм и 2,0 мм. Эти значения геометрических параметров биологических тканей соответствуют экспериментальным данным [2]. Длина имплантата, диаметр сферического элемента, высота соединения составили 10,0 мм, 4,2 мм и 9,4 мм соответственно.

Граничные условия соответствовали жесткому закреплению поверхностей нижнечелюстных мышечков, а также действию семи групп мышечных сил, участвующих в пережевывании пищи [3]. Поскольку предполагалось, что продукты питания располагаются (слева) в области второго премоляра и первого моляра нижней челюсти, соответствующие узлы протеза фиксировались. Граничные условия для нижней челюсти с установленным полным протезом обозначены на рис. 1. Значения сил, приведенные на рис. 1, соответствуют величинам соответствующих мышечных сил в норме согласно данным работы [4].

При расчете реакции полного протеза, установленного на различное количество имплантатов, величины мышечных сил принимали значения равные величинам, приведенным на рис.??, умноженным на коэффициент, изменяющийся от 0,2 до 2,0 с шагом 0,2. Для каждой группы значений



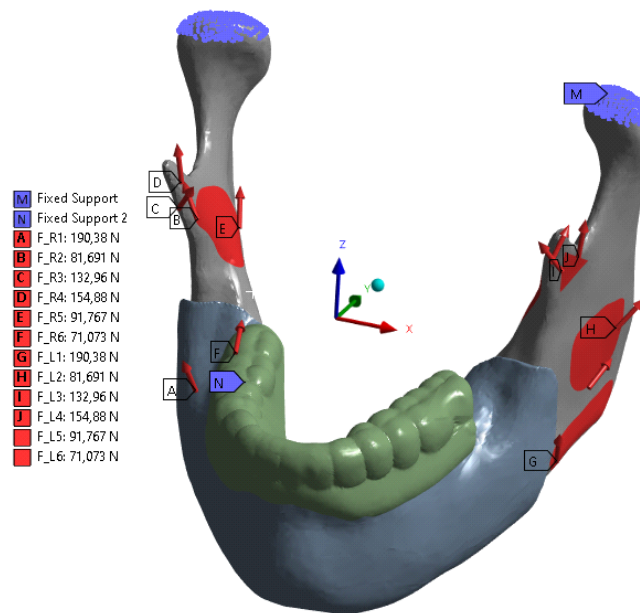


Рисунок 1. Граничные условия для модели нижней челюсти с прикрепленным балочным протезом: маркеры А и G – результирующая сил от действия поверхностной жевательной мышцы, равная 190,38 Н; маркеры В и Н – результирующая от действия глубокой жевательной мышцы, равная 81,691 Н; маркеры С и I – результирующая от действия медиальной крыловидной мышцы, равная 132,96 Н; маркеры D и G – результирующая от действия передней височной мышцы, равная 154,88 Н; маркер E – результирующая от действия средней височной мышцы, равная 91,767 Н; маркер F – результирующая от действия задней височной мышцы, равная 71,073 Н; маркер M – зафиксированные узлы на поверхностях нижнечелюстных суставов; маркер N – фиксация области окклюзионного контакта жевательной поверхности второго премоляра.

мышечных сил определялась результирующая реакции протеза в области пятого и шестого зубов, соответствующая воздействию продуктов питания на протез.

Полный протез жестко фиксировался на имплантатах. Слой кортикальной костной ткани также жестко прикреплялся к губчатой кости. Между остальными элементами модели задавалось контактное взаимодействие с учетом трения. Коэффициенты трения между имплантатом и кортикальной костной тканью, имплантатом и губчатой костной тканью, имплантатом и абатментом, а также между полным протезом и слизистой оболочкой принимались равными 0,40, 0,72, 0,323 и 0,334 [5]. При моделировании имплантатов использовалось виртуальное резьбовое соединение высотой 3,50 мм, шагом резьбы 0,25 мм и углом наклона резьбы 30°.

Физико-механические свойства компонентов модели (губчатой и кортикальной костной ткани, слизистой оболочки, полного протеза, имплантатов и абатментов) задавались в соответствии с данными работы [3].

Конечно-элементный расчет выполнен с использованием программного комплекса ANSYS Workbench 22 R1 (Ansys Inc., USA). Количество конечных элементов и узлов модели составляет 1293635 и 1915172 соответственно.

**Выводы** Независимо от количества имплантатов результирующие реактивные силы в области пятого и шестого зубов полного протеза при возрастании величин мышечных сил до значений в норме принимают значения, соответствующие силам, необходимым для пережевывания различных продуктов питания (шоколад, яблоко, морковь, колбасные изделия).

Наиболее неблагоприятным для пациента является установка полного протеза на два имплантата, поскольку в этом случае возникают наиболее высокие перемещения протеза при действии жевательной нагрузки, которые могут привести к расшатыванию имплантатов, а также к возникновению болевых ощущений в слизистой оболочке нижней челюсти при длительном использовании полного протеза.

Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 «Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

#### Литература

1. Chen J., Ahmad R., Suenaga H., Li W., Swain M., Li Q. *A comparative study on complete and implant retained denture treatments: a biomechanics perspective* // J. Biomech. 2015. Vol. 48, No 3. P. 512–519.
2. Swasty D., Lee J. S., Huang J. C., Koutaro M., Gansky S. A., Hatcher D., Miller A. J. *Anthropometric analysis of the human mandibular cortical bone as assessed by cone-beam computed tomography* // J. Oral Maxillofacial Surg. 2009. Vol. 67, No 3. P. 491–500.
3. Moldoveanu S. A. B., Munteanu F., Fornu N. C. *Impact of implant-retained mandibular overdenture on oral mucosa – a finite element analysis* // Roman. J. Oral Rehabil. 2020. Vol. 12, No 1. P. 6–12.
4. Huang H.-L., Su K.-Ch., Fuh L.-J., Chen Michael Y. C., Wu J., Tsai M.-T., Hsu J.-T. *Biomechanical analysis of a temporomandibular joint condylar prosthesis during various clenching tasks* // J. Cranio-Maxillofacial Surg. 2015. Vol. 43, No 7. P. 1194–1201.
5. Prados-Privado M., Martinez-Martinez C., Gehrke S. A., Prados-Frutos J. C. *Influence of bone definition and finite element parameters in bone and dental implants stress: a literature review* // Biology. 2020. Vol. 9, 224; doi:10.3390/biology9080224

## MODELING THE INTERACTION OF A CARNALLITE ROCK MASS WITH SUPPORT STRUCTURES BASED ON BACK ANALYSIS

J.J. Kazlouski<sup>1,2</sup>, M.A. Zhuravkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University, 4 Nezavisimosti, Minsk, 220030

<sup>2</sup>ProTech Engineering, 26th Line V.O., Saint Petersburg, 199106,  
jkazlouski@outlook.com, zhuravkov@bsu.by

This research addresses the complex interaction between support structures and carnallite-containing rock masses, with a focus on underground mine shafts. Carnallite, known for its low strength and high creep rates compared to other salts such as sylvinit, presents significant challenges in maintaining the stability of support systems. Through back analysis based on monitoring data, the study of interaction between the rock mass and the shaft lining, providing insights into optimal support strategies.

The study adopts a modified Burgers model to describe the time-dependent creep behavior of the carnallite rock mass, incorporating both primary and steady-state creep phases:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr,p} + \varepsilon_{cr,s} + \varepsilon_{pl},$$

$$\dot{\varepsilon}_{cr,p} = a\sigma_e \exp[-bt],$$

$$\dot{\varepsilon}_{cr,s} = d\sigma_e (\sinh[m\sigma_e])^n.$$

For plastic deformations, a Mohr-Coulomb failure criterion with a combined yield surface is used, reflecting the complex behavior of carnallite under shear and tensile stresses:

$$f_{MC}(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3}I_1 \sin(\varphi) + \sqrt{J_2} \left( \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta) \sin(\varphi)}{\sqrt{3}} \right) - c \cos(\varphi),$$

$$f_R(I_1, J_2, \theta) = \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \cos(\theta) + \frac{I_1}{3} - \sigma_t,$$

$$g_{MC}(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3}I_1 \sin(\psi) + \sqrt{J_2} \left( \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta) \sin(\psi)}{\sqrt{3}} \right).$$

Back analysis was performed using monitoring data from inclined and vertical excavations passing through carnallite rock at depths of 1100–1150 meters in a deep mine. Displacement and strain measurements from the rock mass were compared to modelling results, showing good agreement and validating the model.

Different types of shaft lining were considered in the study [1]. Simulation results showed that traditional lining types were subjected to high stresses, especially in areas with significant creep deformation. The limited-pliable structures used under similar conditions [2] also showed significant limitations for design.

The study concludes that accurate modeling and back analysis are essential for predicting the long-term behavior of shaft linings in carnallite-bearing rock masses and optimising their design for extended operational stability.

#### References

1. Kazlouski J. J., Zhuravkov M. A. *Investigation of the Stress-Strain State of Various Types of Mine Shaft Linings in Carnallite Rock Mass* // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2023. Vol. 63, No 2. P. 84–88.
2. Jia Y. D., Stace R., Williams A. *Numerical modelling of shaft lining stability at deep mine. Mining technology* // Transactions of the institutions of mining and metallurgy: Section A. 2013. Vol. 122, No 1, P. 8–19.

### LINEARIZATION OF NEWTON'S POLYNOMIAL EQUATIONS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

D.S. Zhalukevich<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>University of Bialystok, Swierkowa 20 B, 15-328 Bialystok, Poland,  
den.zhal@yandex.by

Let's consider Newton's equations with one degree of freedom and a power dissipation force, which are often found in science and technology:

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^n F_k(t, x) x^k = 0, \quad (1)$$

where  $n = 3$ ,  $F_n(t, x)$  - analytical functions based on their arguments.

Using the Sophus Lie linearization test [1, 2], for equation (1) using variable substitution

$$z = \varphi(t, x), \quad w = \psi(t, x),$$

we get a linear equation

$$w^{(2)} + \alpha(z)w = 0.$$

As an example from mechanics for equation (1), we can consider the following equations:

The Meshchersky equation

$$M\ddot{x} + \Phi(t, x, \dot{x}) + \frac{dM}{dt} v_e(t, x) + Mg(t, x) = 0,$$

where  $M = M_0 f(t)$  - rocket mass,  $M_0$  - initial mass of the rocket,  $f(t)$  - decreasing function at  $t > 0$ ,  $\Phi(t, x, \dot{x}) = F_n(t, x) \dot{x}^n$  - the resistance force of the medium ( $n = 1, 2, 3$ ),  $v_e(t, x)$  - effective particle outflow rate,  $g(t, x)$  - acceleration of free fall.

The oscillation equation

$$\ddot{x} + \Phi(t, x, \dot{x}) + Q(t, x) = f(t),$$

where  $\Phi(t, x, \dot{x}) = F_n(t, x) \dot{x}^n$  - the resistance force of the medium ( $n = 1, 2, 3$ ),  $Q(t, x)$  - restorative power,  $f(t)$  - forcing periodic force, with a period of  $T > 0$ .

#### References

1. Ibragimov N. Kh. *Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie)*. // Russian Math. Surveys. 1992. Vol. 47, No 4. P. 89–156.
2. Ibragimov N. H. *A practical course in differential equations and mathematical modelling*. Beijing: Higher Education Press, Singapore: World Scientific, 2009.

# СЕКЦИЯ «ОПТИМИЗАЦИЯ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ»

## МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В.В. Альсевич<sup>1</sup>, Э.В. Метельская<sup>1</sup>, А.А. Плющов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, alsevichvv@mail.ru

Задачи управления с минимаксными функционалами представляют собой часть негладких задач в теории управления. В предлагаемом сообщении указанные задачи рассматриваются в двух вариантах: в контексте класса не только кусочно-непрерывных, но и дискретных управлений. Дискретные управления широко используются в различных областях, таких как робототехника, автоматизация производства, управление технологическими процессами и другие.

Как известно, основным результатом классической теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина. Однако, как правило, задачи рассматриваются в классах кусочно-непрерывных или измеримых управляющих воздействий.

В последние годы внимание многих исследователей обращено на оптимизацию непрерывных систем управления в классе дискретных управляющих воздействий. Отличие состоит в том, что их переключение может происходить не в любой момент времени, как у кусочно-непрерывных, а только в заданные моменты. С практической точки зрения такие управляющие воздействия более реальны. Тем более, что при численной реализации на вычислительных устройствах непрерывная задача сводится к дискретной. При этом может искажаться истинный результат.

Для задачи терминального управления обыкновенными системами в классе дискретных управлений в [1] доказано условие оптимальности в виде принципа квазимаксима. Для задачи со специальной правой частью системы управления там же доказано условие оптимальности в виде дискретного принципа максимума.

Следует отметить, что исследование задач оптимального управления в классе дискретных управлений было инициировано Р.Ф. Габасовым и Ф.М. Кирилловой. И оба указанные выше результаты были получены при их непосредственном участии. Впоследствии дискретный принцип максимума был доказан для других задач.

В предлагаемой сообщении для рассматриваемых минимаксных задач предварительно получены условия оптимальности в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий, а затем получены результаты в классе дискретных управлений.

Рассматриваются два вида задач. Одна из них состоит в минимизации функционала

$$J(u) = \max_{y \in Y} \varphi(x(t^*, y)) \rightarrow \min \quad (1)$$

на траекториях  $n$ -мерной системы управления

$$\dot{x} = f(x, u, y), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0, y) = x_0, \quad (2)$$

в которой  $y$  – некоторый  $m$ -мерный параметр с областью задания  $Y$ , где  $Y$  – выпуклый компакт, а в качестве допустимых управлений рассматриваются в первом случае кусочно-непрерывные  $r$ -мерные функции со значениями из заданного множества  $U$ :

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (3)$$

во втором случае – дискретные управления с той же областью задания (3).

Во второй задаче на траекториях системы (2) минимизируется функционал

$$J(u) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} g(x(t), u(t), y) dt,$$

причем траектории системы (2) могут как зависеть от параметра  $y$ , так и не зависеть. Кроме того, множество  $Y$  состоит из конечного числа векторов.

Для обеих задач в случае кусочно-непрерывных управлений доказаны необходимые условия оптимальности – аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина, в случае дискретных управлений – аналог принципа квазимаксима [1] для общего вида систем (1) и аналог дискретного принципа максимума для систем (2) со специальной правой частью и компактным выпуклым множеством  $U$ .

В силу ограниченности объема сообщения приведем лишь два из полученных результатов для задачи (1)–(3): в классах кусочно-непрерывных и дискретных управлений.

Пусть  $u^0(t), x^0(t, y), t \in T, y \in Y$ , – оптимальное кусочно-непрерывное управление и семейство траекторий системы (2),  $H(x, \psi, u, y) = \psi' f(x, u, y), \psi(t, y), t \in T, y \in Y$ , – решения сопряженной системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x^0(t, y), \psi, u^0(t))}{\partial x}, \quad t \in T, \tag{4}$$

$$\psi(t^*) = - \frac{\partial \varphi(x^0(t^*, y))}{\partial x}, \quad y \in Y^0, \tag{5}$$

где

$$Y^0 = \{y^0 \in Y : \varphi(x^0(t^*, y^0)) = \max_{y \in Y} \varphi(x^0(t^*, y))\}.$$

Заметим, что  $Y^0$  – выпуклый компакт. Пусть  $\mu(y)$  – некоторая неотрицательная мера, сосредоточенная на  $Y^0$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Каждое оптимальное в задаче (1)–(3) управление  $u^0(t)$ , вместе с соответствующими решениями  $x^0(t, y)$  системы (2) и  $\psi(t, y)$  системы (4), (5) при всех  $t \in T$  удовлетворяют условию максимума

$$\int_{Y^0} H(x^0(t, y), \psi(t, y), u^0(t), y) d\mu(y) = \max_{u \in U} \int_{Y^0} H(x^0(t, y), \psi(t, y), u, y) d\mu(y).$$

Рассмотрим эту же задачу в классе дискретных управлений. Управление  $u(t), t \in T$ , называется дискретным с периодом квантования  $h > 0$ , если  $u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h[, \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^*\}$ , где  $h = t^*/N, N$  – некоторое натуральное конечное число. Пусть в рассмотренной задаче (1)–(3) система (2) имеет вид

$$\dot{x} = f_0(x, y) + B(x, y)u, \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0, y) = x_0, \tag{6}$$

множество  $U$  – выпуклый компакт.

**Теорема 2.** Каждое оптимальное в задаче (1), (3), (6) управление  $u^0(t)$ , вместе с соответствующими решениями  $x^0(t, y)$  системы (6) и  $\psi(t, y)$  системы (4), (5) при всех  $\tau \in T_h$  удовлетворяют условию максимума

$$\int_{Y^0} \left\{ \int_{\tau}^{\tau+h} \psi'(t, y) B(x^0(t, y), y) dt d\mu(y) \right\} u^0(\tau) = \max_{u \in U} \int_{Y^0} \left\{ \int_{\tau}^{\tau+h} \psi'(t, y) B(x^0(t, y), y) dt d\mu(y) \right\} u.$$

### Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С. *Методы оптимизации*. Минск: Четыре четверти, 2011.

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ТЕОРИИ КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ

А.И. Астровский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный экономический университет,  
Партизанский пр. 26, 220072 Минск, Беларусь, aastrov53@gmail.com

Вопрос о преобразовании линейной непрерывной нестационарной системы наблюдения (управления) к канонической форме Фробениуса играет важную роль при исследовании ряда задач математической теории управления. При изучении структурных свойств дискретных систем

управления-наблюдения канонические формы также весьма полезны. Так как нахождение канонических форм для линейных дискретных систем в ряде случаев не представляет большого труда, то представляется целесообразным использовать при исследовании непрерывных систем канонические формы дискретных аналогов. Ясно, что при этом приходится рассматривать дискретные уравнения близкие в определенном смысле к дифференциальным. Естественно возникает вопрос о связи канонических форм непрерывных систем и их дискретных аппроксимаций.

Рассмотрим на отрезке  $T = [t_0, t_1]$  систему наблюдения  $(A, c)$ :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t), \quad (1)$$

у которой  $A(t)$  и  $c(t)$  непрерывные в множестве  $T$   $(n \times n)$ -матрица и  $n$ -вектор-строка. Система (1) обладает канонической формой Фробениуса, если найдется такой элемент  $G(t)$  группы  $\mathcal{G}_n$  непрерывно дифференцируемых невырожденных при каждом  $t \in T$   $(n \times n)$ -матричных функций, что замена переменных  $x(t) = G(t)z(t)$  преобразует ее к виду  $\dot{z}(t) = A^0(t)z(t)$ ,  $y(t) = c^0z(t)$ , где  $A^0(t)$  матрица в форме Фробениуса, а  $c^0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$ .

Для установления взаимосвязи между каноническими формами линейных нестационарных систем наблюдения, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, и каноническими формами их дискретных аналогов рассмотрим разностную аппроксимацию системы (1).

Пусть  $h > 0$  — шаг дискретизации. Всюду в дальнейшем считаем, что шаг дискретизации  $h$  связан с целым числом  $M > 0$  соотношением  $h = (t_1 - t_0)/M$ . Положим  $\tau_i = t_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, M$ ),  $T_M = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_M\}$ ,  $T_M^1 = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{M-1}\}$  и обозначим через  $\Omega_M$  множество всех дискретных  $n$ -вектор-функций  $x^h(\tau)$  ( $\tau \in T_M$ ) с нормой  $\|x^h\| = \max_{\tau \in T_M} \|x^h(\tau)\|$ . По последовательности функций

$\{\xi^h(\tau), \tau \in T_M\}$ ,  $M = 1, 2, \dots$  построим последовательность  $r_M(t)$  ( $M = 1, 2, \dots$ ),  $t \in T = \bigcup_{i=0}^{M-1} [\tau_i, \tau_{i+1}]$  ломаных Эйлера. Ясно, что при каждом  $M \in \mathbb{N}$  функции  $r_M(t)$  ( $t \in T$ ) принадлежат  $C(T, \mathbb{R})$ .

Нетрудно заметить, что последовательность функций  $\{r_M, M \in \mathbb{N}\}$  равномерно сходится тогда и только тогда, когда последовательность дискретных скалярных функций  $\xi^h(\tau)$  ( $\tau \in T_M$ ) при  $h \rightarrow 0$  равномерно сходится в себе, т.е. если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое положительное целое число  $M_0$ , что для всех  $M > M_0$  имеет место неравенство  $\max_{(i=0,1,\dots,M-1)} |\xi^h(\tau_i) - \xi^h(\tau_{i+1})| < \varepsilon$ .

**Лемма 1.** Пусть для некоторого  $G \in \mathcal{G}_n$  системы  $(A, c)$  и  $(D, d)$  связаны равенством

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t) = D(t), \quad c(t)G(t) = d(t) \quad (t \in T). \quad (2)$$

Тогда при достаточно малом  $h > 0$ ,  $h = (t_1 - t_0)/M$  верно соотношение

$$G^{-1}(\tau + h)(E + hA(\tau))G(\tau) = E + hD(\tau) + O(\tau, h), \quad \tau \in T_M^1,$$

где  $(n \times n)$ -матрица  $O(\tau, h)$  обладает свойством  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|O(\tau, h)\|_{(n \times n)}}{h} = 0$ ,  $\tau \in T_M^1$ .

Учитывая представление невырожденной непрерывно дифференцируемой  $(n \times n)$ -матрицы  $G(t)$  ( $t \in T$ ) в виде произведения  $G(t) = G_o(t)G_\Delta(t)$  ортонормированной при каждом  $t \in T$  матрицы  $G_o(t)$  на верхнетреугольную матрицу  $G_\Delta(t)$ , соотношение (2) можно представить в виде

$$G_o^{-1}AG_o + \dot{G}_o^{-1}G_o = G_\Delta A^0 G_\Delta^{-1} + \dot{G}_\Delta G_\Delta^{-1}, \quad cG_o = c^0 G_\Delta^{-1}. \quad (3)$$

Запишем дискретный аналог соотношения (3), используя для этого аппроксимацию производной по схеме Эйлера. Имеем  $c(\tau)G_o(\tau) = c^0 G_\Delta^{-1}(\tau)$ ,  $\tau \in T_M$ ,

$$hG_o^{-1}(\tau)A(\tau)G_o(\tau) + G_o^{-1}(\tau + h)G_o(\tau) = hG_\Delta(\tau)A^0(\tau)G_\Delta^{-1}(\tau) + G_\Delta(\tau + h)G_\Delta^{-1}(\tau), \quad \tau \in T_M^1.$$

Несложно убедиться в том, что если в орбите  $\mathcal{O}(A, c)$  пары  $(A, c)$  существует каноническая форма Фробениуса  $(A^0, c^0)$ , то матрица  $hG_\Delta(\tau)A^0(\tau)G_\Delta^{-1}(\tau) + G_\Delta(\tau + h)G_\Delta^{-1}(\tau)$  имеет вид верхней формы Хессенберга с неравными нулю элементами  $r_{i, i-1}^h(\tau)$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), ( $\tau \in T_M^1$ ).

Следовательно, преобразование  $G_o(\tau)$  ( $\tau \in T_M^1$ ) следует искать таким, чтобы матрица  $hG_o^{-1}(\tau)A(\tau)G_o(\tau) + G_o^{-1}(\tau + h)G_o(\tau)$  была бы в верхней форме Хессенберга.

Пусть  $H^h(\tau)$  ( $\tau \in T_M^1$ ) — некоторая матрица в верхней форме Хессенберга. Анализ соотношения  $hG_o^{-1}(\tau)A(\tau) + G_o^{-1}(\tau+h) = H^h(\tau)G_o^{-1}(\tau)$  с учетом ортогональности и нормированности столбцов матрицы  $G_o(\tau)$  при каждом  $\tau \in T_M^1$ , позволяет разработать следующую процедуру построения дискретной верхней формы Хессенберга.

Обозначим элементы матрицы  $D(\tau)$  через  $d_{ij}^h(\tau)$  и определим скалярную функцию  $b_{n,n-1}^h(\tau) = h\|(d_{n1}^h(\tau), d_{n2}^h(\tau), \dots, d_{n,n-1}^h(\tau), 0)\|$  ( $\tau \in T_M$ ). Если  $b_{n,n-1}^h(\tau) \neq 0$  ( $\tau \in T_M$ ), то найдем  $n$ -вектор-строку

$p_{n-1}^h(\tau)$  по правилу:  $p_{n-1}^h(\tau) = \frac{(d_{n1}^h(\tau), d_{n2}^h(\tau), \dots, d_{n,n-1}^h(\tau), 0)}{\|(d_{n1}^h(\tau), d_{n2}^h(\tau), \dots, d_{n,n-1}^h(\tau), 0)\|}$  ( $\tau \in T_M$ ). Далее положим  $p_n^h(\tau) = c^0$

и для  $\tau \in T_M$  вычислим  $b_{n-1,i}^h(\tau) = hp_{n-1}^h(\tau)D(\tau)p_i^h(\tau) + p_{n-1}^h(\tau+h)p_i^h(\tau)$ ,  $i \in (n, n-1)$ , а также  $b_{n-1,n-2}^h(\tau) = \|hp_{n-1}^h(\tau)D(\tau) + p_{n-1}^h(\tau+h) - \sum_{i=n-1}^n b_{n-1,i}^h(\tau)p_i^h(\tau)\|$ . Если  $b_{n-1,n-2}^h(\tau) \neq 0$  ( $\tau \in T_M$ ), то

определим  $p_{n-2}^h(\tau)$ :  $p_{n-2}^h(\tau) = \frac{hp_{n-1}^h(\tau)D(\tau) + p_{n-1}^h(\tau+h) - \sum_{i=n-1}^n b_{n-1,i}^h(\tau)p_i^h(\tau)}{b_{n-1,n-2}^h(\tau)}$  и скажем, что для

пары  $(D, c^0)$  выполнен второй дискретный шаг.

Пусть для  $k = 2, \dots, n-1$  выполнен  $k-1$  дискретный шаг и определены скалярные функции  $b_{n-k+2,i}^h(\tau)$ , а также  $n$ -вектор-строки  $p_i^h(\tau)$  ( $i = n, n-1, \dots, n-k+1$ ). На  $k$ -том шаге для  $\tau \in T_M$  находим  $b_{n-k+1,i}^h(\tau) = [hp_{n-k+1}^h(\tau)D(\tau) + p_{n-k+1}^h(\tau+h)]p_i^h(\tau)$  ( $i = n, n-1, \dots, n-k+1$ ), а при  $i = n-k$  имеем

$b_{n-k+1,n-k}^h(\tau) = \|hp_{n-k+1}^h(\tau)D(\tau) + p_{n-k+1}^h(\tau+h) - \sum_{i=n-k+1}^n b_{n-k+1,i}^h(\tau)p_i^h(\tau)\|$ .

Если  $b_{n-k+1,n-k}^h(\tau) \neq 0$  ( $\tau \in T_M$ ), то вычислим  $p_{n-k}^h(\tau)$ :

$$p_{n-k}^h(\tau) = \frac{hp_{n-k+1}^h(\tau)D(\tau) + p_{n-k+1}^h(\tau+h) - \sum_{i=n-k+1}^n b_{n-k+1,i}^h(\tau)p_i^h(\tau)}{b_{n-k+1,n-k}^h(\tau)}$$

и скажем, что для пары  $(D, c^0)$  выполнен  $k$ -тый дискретный шаг.

Обозначим при каждом  $h = (t_1 - t_0)/M$  через  $(A, c)_h$  дискретную пару  $\{(E + hA(\tau), \tau \in T_{M-1}), (c(\tau), \tau \in T_M)\}$ , соответствующую системе  $(A, c)$ . Допустим, что дискретная пара  $(A, c)_h$  при каждом  $h > 0$  равномерно наблюдаема. Следовательно, существует такая невырожденная  $(n \times n)$ -матричная функция  $G_*(\tau, h)$ , которая преобразует дискретную пару  $(A, c)_h$  к канонической форме Фробениуса  $(B_h^0, c^0)$ :  $G_*^{-1}(\tau+h, h)(E + hA(\tau))G_*(\tau, h) = B_h^0(\tau)$ ,  $c(\tau)G_*(\tau, h) = c^0$ . Здесь  $(n \times n)$ -матрица  $B_h^0$  определяется функциями  $\beta_j(\tau, h)$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ), ( $\tau \in T_M^1$ ).

**Теорема 1.** Если для системы  $(A, c)$  при всех достаточно малых  $h > 0$  ее дискретная пара  $(A, c)_h$  равномерно наблюдаема (следовательно имеет каноническую форму Фробениуса  $(B_h^0, c^0)$  с функциями  $\beta_j(\tau, h)$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ), выполняется условие  $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{\tau \in T_M} \|\eta(\tau, h)\|_{(n \times n)} = 0$  и функции  $p_j(\tau, h)$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ), равномерно сходятся в себе, то функции  $\alpha_j(t) = \lim_{h \rightarrow 0, \tau_i \rightarrow t} p_j(\tau_i, h)$ ,  $t \in T$ , непрерывны и определяют для пары  $(A, c)$  каноническую форму Фробениуса  $(A^0, c^0)$ .

## О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА

М.Н. Гончарова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь, m.gonchar@grsu.by

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + v_2, \end{cases} \quad (1)$$

где управление  $(v_1; v_2)$  является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из множества  $V$ . Множество  $V$  назовем областью управления. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта  $V$  обозначим через  $U$ . Множество  $U$  является множеством допустимых управлений.

Будем считать, что выполняются неравенства  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ , множество  $V$  является пятиугольником. Вершины пятиугольника  $V$  обозначим через  $C_i, i = \overline{1, 5}$ , обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины  $C_i$  обозначим через  $C_{i1}, C_{i2}$ . Примем, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} C_{11} > 0, C_{12} > 0, C_{21} < 0, C_{22} > C_{12}, C_{31} < C_{21}, \\ C_{32} < 0, C_{41} < 0, C_{42} < C_{32}, C_{51} > 0, C_{42} < C_{52}, C_{51} < C_{11}, C_{52} < 0. \end{aligned}$$

В сделанных предположениях стороны пятиугольника  $V$  не параллельны осям координат и начало координат  $O$  принадлежит множеству  $V$ , но не является его вершиной. Поэтому условие общности положения для данного объекта является выполненным.

Для произвольных моментов времени  $t$  требуется построить множество управляемости данного объекта в начало координат, то есть множество всех точек фазового пространства, в которых объект (1) находится в момент времени  $t$ , а в момент времени  $t_1$  попадает в начало координат при помощи некоторого допустимого управления. Обозначим это множество через  $Y(t) = Y(t, t_1)$ . Момент времени  $t_1$  считаем фиксированным.

Для решения поставленной задачи вычислена [1] опорная функция множества управляемости  $Y(t) = Y(t, t_1)$ , и затем выпуклое множество восстановлено по его опорной функции.

Для формулировки основного результата введем величины  $k_1 = -\frac{C_{11}-C_{51}}{C_{12}-C_{52}}, k_2 = -\frac{C_{51}-C_{41}}{C_{52}-C_{42}}, T = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \ln \frac{k_2}{k_1}$ . Величины  $k_1, k_2$  представляют собой тангенсы углов наклона нормалей к прямым  $C_1C_5, C_4C_5$  соответственно.

Получено, что если выполняется неравенство  $t_1 - t \leq T$ , то множество управляемости ограничено линиями:

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{21}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{11}-C_{21}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{11}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{22}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{12}-C_{22}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{12}}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{21}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{31}-C_{21}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{31}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{22}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{32}-C_{22}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{32}}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{41}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{31}-C_{41}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{31}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{42}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{32}-C_{42}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{32}}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{51}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{11}-C_{51}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{11}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{52}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{12}-C_{52}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{12}}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (5)$$

в которых  $\tau = t_1 - t$ , параметр  $\eta$  изменяется в пределах  $0 \leq \eta \leq \tau$ .

Если выполняется неравенство  $t_1 - t > T$ , то множество управляемости ограничено линиями (2)—(4), линией, определяемой уравнениями (5) при условии, что  $\tau - T \leq \eta \leq \tau$  и линиями

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{41}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{51}-C_{41}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(\eta+T)} + \frac{C_{11}-C_{51}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \eta} - \frac{C_{11}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{42}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{52}-C_{42}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2(\eta+T)} + \frac{C_{12}-C_{52}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \eta} - \frac{C_{12}}{\lambda_2}, \end{cases}$$

при  $\eta \in [0; \tau - T]$ ,

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{C_{41}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{51}-C_{41}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{51}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{42}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{52}-C_{42}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{52}}{\lambda_2}, \end{cases}$$

при  $\eta \in [\tau - T; \tau]$ .



Полученный результат можно использовать для решения задач оптимального управления с различными критериями качества.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04).

### Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения*. М.: МАКС Пресс, 2007.

## ВНУТРЕННЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

**В.В. Гороховик<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,  
gorokh@im.bas-net.by

Конусы, в частности, выпуклые конусы часто встречаются в самых различных разделах математики. Особенно востребованы они в вариационном анализе [1], в скалярной и векторной оптимизации [2,3], в исследованиях линейных и квадратичных конических задач оптимизации [4,5].

В первой части настоящего сообщения рассматривается внутреннее геометрическое строение выпуклых конусов в бесконечномерных векторных пространствах без топологии. Исходя из предположения, что относительно алгебраически открытый выпуклый конус имеет элементарное (неделимое, цельное) геометрическое строение, показывается, что произвольный выпуклый конус является дизъюнктивным объединением некоторого частично упорядоченного семейства его элементарных (относительно алгебраически открытых) выпуклых подконусов, образующих верхнюю решетку. В случае, когда выпуклый конус является коническим полупространством (выпуклым конусом, дополнение которого также выпукло) семейство соответствующих ему элементарных подконусов линейно упорядочено, причем каждый элементарный подконус является относительно алгебраически открытым коническим полупространством в своей линейной оболочке.

Вторая часть сообщения посвящена аналитическому представлению бесконечномерных выпуклых конусов в бесконечномерных векторных пространствах без топологии. Прежде всего, используя внутреннее геометрическое строение конических полупространств, устанавливается двойственность между коническими полупространствами и ступенчато-линейными функциями. Фактически, эта двойственность является распространением классической двойственности между открытыми полупространствами и линейными функциями. Далее показывается, что произвольный выпуклый конус допускает представление семейством ступенчато-линейных функций.

В заключение обсуждаются некоторые возможные приложения к выпуклым задачам оптимизации.

Настоящее исследование выполнено в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-25", проект 1.3.04.

### Литература

1. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational Analysis*. Berlin: Springer Verlag, 1998.
2. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации: В 2-х книгах*. М.: МЦНМО, 2011.
3. Гороховик В. В. *Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации*. Минск: Наука и техника, 1990.
4. Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. New York: Springer-Verlag, 2000.
5. Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. *An exact explicit dual for the linear copositive programming problem* // Optimization Letters. 2023. Vol. 17. P. 107–120.

**ОЦЕНКА УЛУЧШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ  
ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
ПРИ УПРАВЛЕНИИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ**

**Н.М. Дмитрук<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, dmitrukn@bsu.by

В классе дискретных управлений [1] будем исследовать задачу оптимального гарантированного управления линейной стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы (1) в момент времени  $t$ ,  $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$  — управление,  $w = w(t) \in \mathbb{R}^p$  — неизвестное ограниченное возмущение в момент времени  $t$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  — заданные матрицы. Начальное состояние  $x_0$  системы (1) известно.

Доступные значения управления и возможные реализации возмущения ограничены:

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}, \quad w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_{\infty} \leq w_{\max}\}, \quad t \in [0, t_f],$$

где  $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$ ,  $w_{\max} > 0$ .

Пусть задано терминальное множество  $X_f = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g\}$ , где  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$ .

Поставим задачу о переводе системы (1) на терминальное множество  $X_f$  с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях возмущения:

$$x(t_f) \in X_f \quad \forall w(t) \in W, \quad t \in [0, t_f],$$

при минимуме значения линейного терминального критерия качества  $c^T x(t_f)$ , где  $c \in \mathbb{R}^n$ .

Оптимальную гарантирующую программу в поставленной задаче оптимального управления определим стандартно [1]. Нас будет интересовать построение оптимальных обратных связей для управления системой (1) в реальном времени. Для их определения погрузим задачу оптимального управления в семейство задач

$$\mathcal{P}(\tau, z) : \quad J(\tau, z) = \min_u \max_w c^T x(t_f),$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw, \quad x(\tau) = z, \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, t_f],$$

$$x(t_f) \in X_f \quad \forall w(t) \in W, \quad t \in [\tau, t_f],$$

зависящее от произвольного состояния  $z \in \mathbb{R}^n$  в момент времени  $\tau \in \Delta = \{0, h, \dots, t_f - h\}$ , где  $h = t_f/N$  — период квантования,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 1$ . Задача  $\mathcal{P}(0, x_0)$  — исходная задача, предполагается, что она имеет решение.

Пусть  $u^0(t|\tau, z)$ ,  $t \in [\tau, t_f]$ , — оптимальная гарантирующая программа в задаче  $\mathcal{P}(\tau, z)$ ,  $X_{\tau}$  — множество всех состояний  $z$ , для которых эта задача в момент времени  $\tau$  имеет решение.

Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in \Delta, \quad (2)$$

называется оптимальной (дискретной) обратной связью в рассматриваемой задаче оптимального управления.

Функция  $u^*(t) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in \Delta$ , называется реализацией оптимальной обратной связи (2) в конкретном процессе управления, в котором реализуются и полностью доступны для измерений состояния  $x^*(\tau)$ ,  $\tau \in \Delta$ .

Отметим, что в задачах оптимального управления, содержащих неопределенности, такие как возмущение  $w(\cdot)$  в системе (1), оптимальная гарантирующая программа является не единственным возможным инструментом для определения оптимальной обратной связи. Например, для выполнения целей управления, сформулированных выше, могут быть предложены оптимальные стратегии управления с замыканиями, см. [2], на основе которых могут быть определены оптимальные

закрывающиеся обратные связи [3]. В связи с данным замечанием обратная связь (2) называется размыкаемой [1].

Алгоритм реализации оптимальной размыкаемой обратной связи в реальном времени состоит в выполнении следующих трех шагов для всех  $\tau \in \Delta$ :

- 1) измерить  $x^*(\tau)$ ;
- 2) решить задачу  $\mathcal{P}(\tau, z)$  при  $z = x^*(\tau)$ , найти ее оптимальную гарантирующую программу  $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in [\tau, t_f]$ ;
- 3) подать управление  $u^*(t) \equiv u^0(\tau|x^*(\tau))$  на вход системы (1) на промежутке  $[\tau, \tau + h]$ .

На шаге 2) алгоритма требуется решать задачу оптимального гарантированного управления  $\mathcal{P}(\tau, x^*(\tau))$ . Известно, что при численном решении она сводится к детерминированной задаче вида

$$\min_u c^\top x_0(t_f), \tag{3}$$

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu, \quad x_0(\tau) = x^*(\tau), \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, t_f],$$

$$x_0(t_f) \in X_f^\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g - \gamma(\tau)\},$$

при этом оптимальное значение задачи  $\mathcal{P}(\tau, x^*(\tau))$  вычисляется по формуле  $J(\tau, x^*(\tau)) = c^\top x_0^0(t_f) + \gamma_0(\tau)$ , где  $x_0^0(t)$ ,  $t \in [\tau, t_f]$ , — траектория номинальной системы (системы (1) без возмущения), соответствующая оптимальной гарантирующей программе; число  $\gamma_0(\tau)$  и вектор  $\gamma(\tau) = (\gamma_i(\tau), i = \overline{1, m})$  вычисляются по формулам

$$\gamma_i(\tau) = w_{\max} \int_\tau^{t_f} \|\varphi_i(t)^\top M\|_1 dt, \quad i = \overline{0, m},$$

где  $\varphi_0(t) = c^\top F(t_f - t)$ ,  $\varphi_i(t)$  —  $i$ -ая строка матрицы  $\Phi(\tau) = HF(t_f - t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ ,  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — фундаментальная матрица решений системы (1).

**Утверждение.** Для разности оптимального гарантированного значения  $J(0, x_0)$  задачи оптимального управления системой (1) в начальный момент времени  $\tau = 0$  (управление с помощью оптимальной гарантирующей программы  $u^0(\cdot|0, x_0)$ ) и полученного по окончании конкретного процесса управления с некоторым возмущением  $w^*(t) \in W$ ,  $t \in [0, t_f]$ , значения критерия качества  $J(t_f) = c^\top x^*(t_f) \leq J(0, x_0)$  в терминальный момент времени справедливы следующие оценки:

$$\gamma_0^* \leq J(0, x_0) - J(t_f) \leq \gamma_0^* + \sum_{\tau \in \Delta} v^0(\tau)^\top \gamma^*(\tau), \tag{4}$$

где  $v^0(\tau) \geq 0$  — оптимальный вектор множителей Лагранжа, соответствующий терминальным ограничениям задачи (3) для момента времени  $\tau$ ,

$$\gamma_0^* = \gamma_0(0) - \int_0^{t_f} \varphi_0(t)^\top M w^*(t) dt, \quad \gamma^*(\tau) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau + h) - \int_\tau^{\tau+h} \Phi(t) M w^*(t) dt.$$

Доказательство основано на оценке решений "соседних" задач оптимального управления  $\mathcal{P}(\tau, x^*(\tau))$ ,  $\mathcal{P}(\tau + h, x^*(\tau + h))$ ,  $\tau \in \Delta$ , с применением результатов теории двойственности.

Оценка (4) применяется для сравнения качества управления оптимальной размыкаемой обратной связью с другими подходами к управлению в реальном времени при условии реализации в них одинакового возмущения.

### Литература

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
2. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82.
3. Дмитрук Н. М. Оптимальные замыкаемые обратные связи в линейных задачах терминального управления // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т. 224. С. 43–53.

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

А.И. Калинин<sup>1</sup>, Л.И. Лавринович<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
{kalininai,lavrinovich}@bsu.by

**Введение.** В докладе рассматривается задача об управлении с минимальной энергией линейной сингулярно возмущенной системой, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их применении исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

В классе  $r$ -мерных управляющих воздействий  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ ,  $t \in T = [t_*, t^*]$ , с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1u, x(t_*) = x_*, \\ \mu \dot{y} &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2u, y(t_*) = y_*, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \dot{z} &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3u, z(t_*) = z_*, \\ x(t^*) &= 0, y(t^*) = 0, z(t^*) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $\mu$  – малый положительный параметр,  $t_*$ ,  $t^*$  — заданные моменты времени ( $t_* < t^*$ ),  $x$  —  $n_1$ -вектор медленных переменных,  $y$ ,  $z$  — векторы быстрых переменных размерности  $n_2$  и  $n_3$  соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества  $P$  — положительно-определенная симметрическая матрица.

**Предположение 1.** Матрицы  $C_3$  и  $B = B_2 - C_2C_3^{-1}B_3$  устойчивые, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

**Определение 1.** Управление  $u^{(N)}(t, \mu)$ ,  $t \in T$ , с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением  $N$ -го порядка ( $N = 1, 2, \dots$ ), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние  $O(\mu^{N+1})$  и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

**Определение 2.** Вектор-функцию  $u^{(N)}(x, y, z, t, \mu)$  назовем асимптотически субоптимальной обратной связью  $N$ -го порядка, если для любого начального состояния  $(x_*, y_*, z_*, t_*)$ ,  $t_* < t^*$ , имеет место  $u^{(N)}(x_*, y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$ , где  $u^{(N)}(t, \mu)$ ,  $t \in T$ , — асимптотически субоптимальное управление  $N$ -го порядка в задаче (1)–(3).

Основная идея применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент времени  $t^*$ ) сопряженных переменных — конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения трех базовых невозмущенных задач оптимального управления с  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0x + D_0u, x(t_*) = x_*, x(t^*) = 0, \\ J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где

$$A_0 = A_1 - C_1C_3^{-1}A_3 - (B_1 - C_1C_3^{-1}B_3)B^{-1}(A_2 - C_2C_3^{-1}B_3A_3),$$

$$D_0 = D_1 - C_1 C_3^{-1} D_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} D, D = D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3.$$

В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Во *второй базовой задаче*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= By + Du, y(0) = y(0) = -B^{-1} Du^0(t^*), \\ y(-\infty) &= 0, J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u ds \rightarrow \min, \end{aligned}$$

$u^0(t), t \in T$ , – оптимальное управление в первой базовой задаче.

*Третья базовая задача* имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= C_3 z + D_3 u, z(0) = -C_3^{-1} D_3 (u^0(t^*) + u^*(0)), \\ z(-\infty) &= 0, J_3(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u d\tau \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где  $u^*(s), s \leq 0$ , – оптимальное управление во второй базовой задаче. Обозначим через  $u_*(\tau), \tau \leq 0$ , – оптимальное управление в третьей базовой задаче.

**Предположение 2.** *Динамическая системы в базовых задачах являются вполне управляемыми [1].*

Сделанные предположения гарантируют существование и единственность решений базовых задач, которые являются нормальными экстремалиями.

Сформулирована и доказана теорема о существовании, единственности и асимптотических свойствах оптимального управления в задаче (1)–(3) при выполнении предположений 1,2. На основе конструктивного доказательства теоремы, которое опирается на принцип максимума [2] и метод пограничных функций [3], разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа  $N$  построить асимптотическое субоптимальное управление  $N$ -го порядка в рассмотренной задаче. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка представимо в виде

$$u^{(0)}(t, \mu) = u^0(t) + u^* \left( \frac{t - t^*}{\mu} \right) + u_* \left( \frac{t - t^*}{\mu^2} \right), t \in T, \quad (4)$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Заметим, что управление (4) не зависит от начальных состояний  $y_*$  и  $z_*$  векторов быстрых переменных. Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать невозмущенные системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

### Литература

1. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1983.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. М.: Наука, 1973.

## ПОЛНОЕ УСПОКОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**В.В. Карпук<sup>1</sup>, А.В. Метельский**

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет,  
Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь, vasvaskarpuk@gmail.com

Дана линейная автономная дифференциально-разностная система

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - d_i) + bu(t), t > 0, \quad x(t) = \eta(t), t \in [-d_m, 0]. \quad (1)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -вектор-столбец решения системы (1) ( $n \geq 2$ );  $0 < d_1 < \dots < d_m$  — постоянные запаздывания;  $A_i$  — постоянные  $n \times n$ -матрицы ( $i = \overline{0, m}$ );  $b$  — постоянный  $n$ -столбец;  $\eta$  — начальная кусочно непрерывная функция;  $u$  — скалярное управление. Векторные величины записываем в столбец, штрих ' обозначает операцию транспонирования. Не уменьшая общности, полагаем, что  $b = [0; \dots; 0; 1]'$  и что последние строки матриц  $A_i$  — нулевые.

Считаем, что в системе (1)  $d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} h_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ , где  $k_{ij}$  — целые числа,  $0 < h_1 < \dots < h_{\mu}$  — произвольные, в частности, несоизмеримые запаздывания. Обозначим  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu})$ ,  $A(\Lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}$ ,  $\lambda_j = e^{-ph_j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $p \in \mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

Пусть

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), \dots, M_n(p, \Lambda)]', \quad (2)$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки характеристической матрицы замкнутой системы

$$F\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \dots & -a_{1, n-1}(\Lambda) & -a_{1, n}(\Lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1, 1}(\Lambda) & \dots & p - a_{n-1, n-1}(\Lambda) & -a_{n-1, n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $a_{ij}(\Lambda)$  — элементы матрицы  $A(\Lambda)$ ;  $\varphi_i(\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, r}$ , — полиномы с действительными коэффициентами ( $r \geq 1$ ), которые подбираем такими, чтобы

$$|F\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p), \quad (3)$$

где  $d_0(p)$  — некоторый полином степени  $\deg d_0(p) \geq n$ . Если это возможно, то систему (1) назовем спектрально приводимой.

**Лемма.** Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида  $\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_{\mu}} > p$ ) для системы полиномов (2) содержит некоторый полином  $\tilde{d}_0(p)$ .

Задача полного успокоения системы (1) заключается [1, с. 358] в обеспечении за счет выбора управления  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , тождеств

$$x(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0, t \geq t_1, \quad (4)$$

где  $t_1 > 0$  — некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции  $\eta$ . В работе [2] установлено, что для разрешимости задачи полного успокоения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была спектрально управляема

$$\text{rank} [pE_n - (A_0 + A_1 e^{-pd_1} + \dots + A_m e^{-pd_m}), b] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Предлагаемая конструкция регулятора полного успокоения основана на двух дополнительных предположениях. Первое: система (1) спектрально приводима, т. е. при некотором полиноме  $d_0(p)$  и при некоторых полиномах  $\varphi_i(\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, r}$ , имеет место равенство (3). В этом случае найдутся [3] скалярный полином  $\lambda = \lambda(\Lambda) = \lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu})$  и векторный полином  $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \dots, \psi_n(\Lambda))$  такие, что

$$\lambda(\Lambda) = \Psi'(\Lambda)M(p, \Lambda).$$

Второе предположение: полином  $\lambda = \lambda(\Lambda)$  обладает свойством:  $\tilde{\lambda}(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \dots, e^{-ph_{\mu}}) \neq 0$  для всех  $p \in \tilde{P}_0$ , где  $\tilde{P}_0$  — множество различных корней полинома  $\tilde{d}_0(p)$ .

Задачу полного успокоения системы (1) будем решать через замыкание системы обратной связью по состоянию, т. е. через построение регулятора. Дифференциально-разностный регулятор полного успокоения системы (1) будем строить в виде

$$x_n^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\Lambda) x_i(t) + \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) x_n^{(r-i)}(t) + f_1(p, \lambda) x_{n+1}(t) + q_1(\lambda) a_1(\lambda) x_{n+2}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i(\Lambda)x_i(t) + f_2(p, \lambda)x_{n+1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t > 0. \quad (6)$$

Здесь  $\Psi_i(\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $a_i(\lambda)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $q'(\lambda) = [q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$ ;  $f_1(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$ ,  $\hat{f}_i(\lambda)$ ,  $i = \overline{0, r_1}$ ,  $f_2(p, \lambda) = \sum_{i=0}^s \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$ ,  $\bar{f}_i(\lambda)$ ,  $i = \overline{0, s}$ , — некоторые полиномы,  $r_1 \geq 0$ ,  $s \geq 1$ . В операторной записи уравнений полагаем:  $\lambda_j = e^{-ph_j}$  – оператор сдвига,  $p$  – оператор дифференцирования:  $p^s \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}} f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} e^{-pk_{ij}h_j} f(t) = f^{(s)}(t - \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j)$ ,  $f(t)$  – функция;  $s \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k_{ij}$  – целые числа. Если  $r > 1$  и/или  $s > 1$ , то, введя вспомогательные переменные, приводим замкнутую систему (1), (6) к нормальной форме, характеристическую матрицу которой обозначим через  $\hat{A}(p, \tilde{\lambda}(p))$ .

**Теорема.** Пусть выполнено условие спектральной управляемости (5). Для полного успокоения системы (1) регулятором (6) достаточно:

- 1) обеспечить замкнутой системе (1), (6) конечный спектр с некоторым характеристическим полиномом  $d(p)$  степени  $N \geq 2n + r - 1$ ;
- 2) выбрать полиномы  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$  так, чтобы функции  $a_1(\tilde{\lambda}(p))/d(p)$ ,  $(a_2(\tilde{\lambda}(p)) - p)/d(p)$  были целыми.

К замкнутой системе (1), (6) применимо преобразование Лапласа. Согласно теореме Винера-Пэли для выполнения тождеств (4) достаточно, чтобы дополнительные миноры к элементам первых  $n$  столбцов характеристической матрицы  $\hat{A}(p, \tilde{\lambda}(p))$  были целыми функциями экспоненциального типа. Последнее свойство обеспечено ввиду разложения названных миноров по последнему столбцу матрицы  $\hat{A}(p, \tilde{\lambda}(p))$  и условия 2) теоремы. Таким образом, регулятор (6) обеспечивает полное успокоение системы (1). При сделанных выше предположениях обоснована схема вычисления коэффициентов регулятора (6), гарантирующих выполнение условий 1), 2) теоремы.

### Литература

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Марченко В. М. К теории управляемости и наблюдаемости линейных систем с запаздывающим аргументом // В кн.: Проблемы оптимального управления. Минск: Наука и техника. 1981. С. 124–147.
3. Метельский А. В., Карпук В. В. Фinitная стабилизация дифференциальных систем с несоизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 1. С. 105–119.

## К ПРОБЛЕМЕ РОБАСТНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Краютко В.В.<sup>1</sup>, Размыслович Г.П.<sup>1</sup>, Горячкин В.В.<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики  
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь  
Krakhotko@bsu.by; razmysl@bsu.by; gorVV@bsu.by

**Введение.** Исследования по проблеме робастной [1-2] устойчивости интервальных систем управления, естественно подтолкнуло к исследованию робастной управляемости систем. Одно-временная управляемость класса таких систем получила название "робастная управляемость". Наряду с интервальной управляемостью [3] в рамках интервального анализа имеет место понятие робастной управляемости. Интервальную управляемость можно трактовать как управляемость интервальных систем, то есть систем, у которых коэффициенты являются интервалами и которых подчинены специальной интервальной арифметике [4].

Различие между этими понятиями заключается в том, что в случае робастной управляемости требуется управление всех систем, получаемых при всевозможных реализациях параметров, а

интервальная управляемость накладывает ограничения на поведение решений интервальной системы как единого объекта в интервальной арифметике.

**Задача робастной управляемости.** На множестве  $\Omega = \{(t, s) | t = 0, 1, 2, \dots, T; s = v, v + 1, v + 2, \dots, T - 1; v \in N, v < T - 1, \}$  рассмотрим задачу управления

$$x(t + 1, s) = A(t, s)x(t, s + 1) + D(t, s)x(t, s) + B(t, s)u(t, s), \quad (1)$$

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad (2)$$

$$x(T, s) = \beta, \quad (3)$$

с интервальными матрицами  $A(t, s) \in [A(t, s)] \geq 0$ ,  $D(t, s) \in [D(t, s)] \geq 0$ ,  $B(t, s) \in [B(t, s)]$ ,  $\alpha(s) \in [\alpha(s)]$  (матрицы  $A(t, s)$ ,  $D(t, s)$ ,  $B(t, s)$  и вектор  $\alpha(s)$  принимают значения из заданных интервалов независимо друг от друга).

Фиксируем любые матрицы  $A(t, s)$ ,  $D(t, s)$ ,  $B(t, s)$  и вектор  $\alpha(s)$  из заданных интервалов. Тогда, очевидно, множество всех систем (1)-(3) порождает множество решений (это множество назовём ансамблем решений), которое является подмножеством приближённого решения  $[z(t, s)]$  задачи (1)-(3). Другими словами, любое решение  $x(t, s)$  задачи (1)-(3)  $x(t, s) \in [z(t, s)]$ . Значит, согласно определению интервальной управляемости одно и то же управление  $u^*$  приведёт решения ансамбля системы (1)-(3) с интервальными неопределённостями, стартующих из  $\alpha(s) \in [\alpha(s)]$  в минимальную окрестность вектора  $\beta$  т.е.  $[\beta - \varepsilon^*, \beta + \varepsilon^*]$  где  $\varepsilon^* > 0$ . Обратное утверждение будет иметь место, если в качестве терминального интервального вектора [2] выбрать вектор  $[\beta]$  удовлетворяющему условию  $[\beta - \varepsilon^*, \beta + \varepsilon^*]$ .

**Теорема 1.** Из интервальной управляемости системы (1) следует робастная управляемость системы (1). В случае выбора интервального терминального вектора  $[\beta] = [\beta_{\varepsilon^*}]$  из робастной управляемости следует интервальная управляемость.

**Задача управляемости систем с переключением.** Рассмотрим задачу управляемости систем с переключением

$$x(t + 1, s) = A_{\zeta(t, s)}(t, s)x(t, s + 1) + D_{\zeta(t, s)}(t, s)x(t, s) + B_{\zeta(t, s)}(t, s)u(t, s), \quad (4)$$

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad (5)$$

$$x(T, s) = \beta, \quad (6)$$

где целочисленная функция  $\zeta(t, s)$  определяет закон переключения системы (4) в момент  $(t, s)$ .

Пусть матрицы  $A_{\zeta(t, s)}$ ,  $D_{\zeta(t, s)}$ ,  $B_{\zeta(t, s)}$  ограничены на множестве  $\Omega$ .

Поставим задачу нахождения управления для перевода траектории решения системы переключением при любом законе переключения из начального состояния (5) точно в терминальный вектор (6) на временном шаге  $t = T$ . Отметим, что задача в такой постановке управляемости почти неразрешима. Поэтому поставим задачу управления несколько иначе, а именно о переводе решения системы с переключением в минимальную окрестность вектора  $x(T, s) \in \beta_{\varepsilon} = [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ .

В силу этого, от системы с переключением (4) перейдем к интервальной системе типа (1).

Матрицы  $A_{\zeta(t, s)}$ ,  $D_{\zeta(t, s)}$ ,  $B_{\zeta(t, s)}$  системы (4) ограничены на множестве  $\Omega$ .

Введём в рассмотрение интервальные матрицы по правилу:

$$\begin{aligned} [A(t, s)] &= \left[ \inf_{\zeta(t, s)} (A_{\zeta(t, s)}(A(t, s), \sup_{\zeta(t, s)} (A_{\zeta(t, s)})), [D(t, s)] = \left[ \inf_{\zeta(t, s)} (D_{\zeta(t, s)}), \sup_{\zeta(t, s)} (D_{\zeta(t, s)}(D_{\zeta(t, s)})) \right], [B(t, s)] = \right. \\ &= \left. \left[ \inf_{\zeta(t, s)} (B_{\zeta(t, s)}), \sup_{\zeta(t, s)} (B_{\zeta(t, s)}) \right]. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Из интервальной управляемости системы (1) следует управляемость системы (4) с любым законом переключения.



Литература

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. *Робастная устойчивость и управление*. М. 2002. С. 360.
2. Гайшун И. В., Горячкин В. В. *Интервальная и робастная устойчивость двух параметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами*// Дифференц. уравн. 2015. Т. 51, №10. С. 1277–1283.
3. Гайшун И.В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Управление ансамблем линейных двухпараметрических дискретных систем* // Вес. Нац. акад.наук Беларусі. Сер.физ.-мат. наук. 2018. № 1. С. 20–25.
4. Шарый С. П. *Конечномерный интервальный анализ*. Новосибирск: 2019. 647с.

**О ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СОСТОЯНИИ И УПРАВЛЕНИИ**

Г.А. Курина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, 394018 Воронеж, Россия,  
kurina@math.vsu.ru

**Постановка задачи.** Многие математические модели, например, электрических цепей, химических реакторов, систем многих тел, описываются дескрипторными системами, которые не разрешены относительно производных. Такие системы называются также дифференциально-алгебраическими, вырожденными, сингулярными или неявными. Необходимость изучения дескрипторных систем возникает также при анализе сингулярно возмущенных систем с малыми параметрами, стоящими перед производными в уравнениях состояния, поскольку при нулевом значении этих параметров сингулярно возмущенные системы превращаются в дескрипторные.

подавляющее большинство работ, посвященных задачам оптимального управления системами с запаздыванием, имеет дело с необходимыми условиями оптимальности управления (см., например, [1]). Здесь устанавливаются достаточные условия оптимальности управления и единственность решения задачи, следующей из условий оптимальности.

Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}x(t_1)'Gx(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)'W(t)x(t) + u(t)'R(t)u(t))dt \tag{1}$$

на траекториях линейной системы с запаздыванием в состоянии и управлении

$$\frac{d(Dx(t))}{dt} = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + B(t)u(t) + B_1(t)u(t - \theta), t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \theta, t_0], Dx(t_0) = x^0 \in ImD, u(t) = \omega(t), t \in [t_0 - \theta, t_0]. \tag{3}$$

Здесь  $\theta > 0, t_0, t_1, \varphi(t), \omega(t)$  заданы,  $x(t) \in X, u(t) \in U, X$  и  $U$  - действительные линейные конечномерные пространства,  $G, W(t), D, A(t), A_1(t) \in L(X), R(t) \in L(U), B(t), B_1(t) \in L(U, X)$ , все операторы и функции  $\varphi(t), \omega(t)$  непрерывны, операторы  $G, W(t), R(t)$  симметрические, причем  $G$  и  $W(t)$  положительно определенные, а  $R(t)$  положительно определенный. Допустимые управления предполагаются кусочно непрерывными функциями, штрих означает транспонирование.

**Достаточные условия оптимальности.**

**Теорема 1.** Если пара функций  $(x^*(t), \psi(t))$  является решением системы

$$\frac{d(Dx^*(t))}{dt} = A(t)x^*(t) + A_1(t)x^*(t - \theta) + B(t)u^*(t) + B_1(t)u^*(t - \theta), t \in [t_0, t_1], \tag{4}$$

$$\frac{d(D'\psi(t))}{dt} = W(t)x^*(t) - A(t)'\psi(t) - A_1(t + \theta)'\psi(t + \theta), t \in [t_0, t_1 - \theta], \tag{5}$$

$$\frac{d(D'\psi(t))}{dt} = W(t)x^*(t) - A(t)'\psi(t), t \in [t_1 - \theta, t_1], \tag{6}$$

удовлетворяющей условиям

$$x^*(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \theta, t_0], Dx^*(t_0) = x^0 \in \text{Im}D, u^*(t) = \omega(t), t \in [t_0 - \theta, t_0], \quad (7)$$

при управлении  $u^*(t)$ , определяемом соотношениями

$$u^*(t) = R(t)^{-1}(B(t)'\psi(t) + B_1(t + \theta)'\psi(t + \theta)), t \in [t_0, t_1 - \theta], \quad (8)$$

$$u^*(t) = R(t)^{-1}B(t)'\psi(t), t \in [t_1 - \theta, t_1], \quad (9)$$

то  $u^*(t)$  является оптимальным управлением для задачи (1)-(3).

Заметим, что условия оптимальности управления, приведенные в Теореме 1, имеют одинаковый вид для невырожденного и вырожденного оператора  $D$ , что очень удобно при изучении сингулярно возмущенных задач оптимального управления.

#### Единственность решения.

Если оператор  $D$  вырожденный, будем использовать разложение пространства  $X$  в ортогональные суммы

$$X = \text{Ker}D \oplus \text{Im}D' = \text{Ker}D' \oplus \text{Im}D.$$

Ортогональные проекторы на  $\text{Ker}D$  и  $\text{Ker}D'$  обозначим соответственно  $P$  и  $Q$ .

Предположим, что выполнено условие

I. Обратим оператор  $D$  или оператор

$$QA(t)P : \text{Ker}D \rightarrow \text{Ker}D'.$$

Доказана

**Теорема 2.** При условии I решение задачи (4)-(9) единственно.

**Замечание 1.** Частный случай задачи (1)-(3) при  $X = U = \mathbb{R}, G = 0, W(t) = R(t) = 2, D = 1, B_1(t) = 0$  рассматривался в [2]. Система дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием, следующая из условий оптимальности управления, записывалась в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = C_1(t)z(t) + C_2(t)z(t - \theta) + C_3(t)z(t + \theta), t \in [t_0, t_1], \quad (10)$$

$$z(t) = (x(t), \psi(t))'.$$

Было сформулировано достаточное условие однозначной разрешимости системы (10) с соответствующими заданными условиями, состоящее в непростой проверке справедливости некоторого неравенства. А именно, требуется установить существование некоторого  $\lambda > 0$ , для которого выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|C_1\|_{C[t_0, t_1]} \frac{1 - e^{-\lambda l}}{\lambda} + \|C_2\|_{C[t_0, t_1]} \frac{e^{-\lambda \theta} - e^{-\lambda(l+\theta)}}{\lambda} + \\ & \|C_3\|_{C[t_0, t_1]} \frac{e^{\lambda \theta} - e^{\lambda(\theta-l)}}{\lambda} < 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $l = t_1 - t_0$ .

В [3] изучалась однозначная разрешимость систем линейных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием общего вида, причем величины опережения и запаздывания считаются одинаковыми. Приведены примеры проверки справедливости неравенства (12) для конкретных задач. Установлено, что выполнение неравенства (12) не является необходимым условием единственности решения изучаемых задач.

Как следует из Теоремы 2, система (4)-(9) из Теоремы 1 может иметь только одно решение. Проверка справедливости неравенства типа (12) при доказательстве единственности решения не требуется.

Литература

1. Альсевич В. В. *Оптимизация динамических систем с запаздываниями*. Минск: БГУ, 2000.
2. Короткий Д. А. *Решение задачи оптимального управления для системы с запаздыванием* // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2008. Вып. 2. С. 61–62.
3. Пименов В. Г., Короткий Д. А. *О решении систем дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием* // Изв. Урал. гос. ун-та. Серия: матем. и мех. (вып. 9). 2006. № 44. С. 113–139.

**О СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРОВ ФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**

**В.Е. Хартовский<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Ожешко, 22, 230023, Гродно, Беларусь  
hartovskij@grsu.by

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{1}$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \tag{2}$$

где  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$ ,  $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $u$  — управление,  $y$  — наблюдаемый выходной сигнал,  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $h > 0$  — шаг квантования. Начальное условие для системы (1) имеет вид

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2, \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, 2, \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \tag{3}$$

В работе исследована задача финитной стабилизации системы (1), (2) — задача проектирования регулятора с обратной связью, который обеспечивает равенство нулю решению замкнутой системы, начиная с некоторого момента времени  $t_0 = k_0h$  ( $k_0 \in \mathbb{N}$ ), независимо от начального состояния (3). При этом используются регуляторы двух типов:

а) регулятор с обратной связью по состоянию, реализация которого предполагает, что в каждый момент времени измерению доступен вектор  $X(t_k)$ ,

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{11}^j X(t_{k-j}) + V_{12}^j x_3(t_{k-j})), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{21}^j X(t_{k-j}) + V_{22}^j x_3(t_{k-j})), \tag{4}$$

$$k = k_1, k_1 + 1, \dots, \quad k_1 = m + m_1;$$

б) регулятор с обратной связью по неполным измерениям, в котором обратная связь строится по наблюдаемому выходному сигналу (2),

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_2} (U_{11}^j y(t_{k-j}) + U_{12}^j x_4(t_{k-j})), \quad x_4(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_2} (U_{21}^j y(t_{k-j}) + U_{22}^j x_4(t_{k-j})), \tag{5}$$

$$k = k_2, k_2 + 1, \dots, \quad k_2 = 2m + m_2.$$

Здесь  $X(t_k) = \text{col}[x_1(t_k), x_2(t_k)]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 3, 4$ , — вспомогательные переменные, удовлетворяющие начальному условию

$$x_{i+2}(t_k) = a_{i+2k}, \quad k = \overline{0, m + m_i}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где  $a_{i+2k} \in \mathbb{R}^{n_i+2}$  — любые заданные векторы,  $V_{ij}, U_{ij}$  — постоянные матрицы подходящих размеров. Для определенности считаем, что при использовании регуляторов (4) и (5)  $u(t_k) = 0, k = \overline{0, k_i - 1}$ , где  $i = 1, 2$  соответственно.

**Определение 1.** Регулятор вида (4), (вида (5)), для которого существует число  $k_0 \in \mathbb{N}$  такое, что каково-бы ни были начальные условия (3), (6) для решения замкнутой системы (1), (4) (замкнутой системы (1), (2), (5)) выполняются равенства

$$\begin{aligned} x_1(t) = 0, \quad t \geq t_{k_0}, \quad x_2(t_k) = 0, \quad x_3(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \\ \left( x_1(t) = 0, \quad t \geq t_{k_0}, \quad x_2(t_k) = 0, \quad x_4(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \right), \end{aligned}$$

назовем регулятором финитной стабилизации по состоянию (регулятором финитной стабилизации по выходу).

Для реализации регулятора (4) построен наблюдатель, который позволяет при любом управлении  $u(t_k)$  в режиме реального времени на основании наблюдений (2) получать точные значения решения в точках  $t_k$ , то есть величины  $X(t_k)$ . Дадим формальное определение. Для этого введем систему с дискретным временем

$$\begin{aligned} Z(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_3} \left( \hat{A}_j Z(t_{k-j}) + \hat{F}_j W(t_{k-j}) \right) + \sum_{j=0}^m \hat{B}_j u(t_{k-j}), \\ V(t_k) &= \sum_{j=0}^{m_3} \hat{Q}_j Z(t_{k-j}), \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots, \quad k_3 \geq m_3 + m, \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z(t_j) = d_j, \quad j = \overline{k_3 - m_3, k_3}, \quad (8)$$

с дискретным входом  $W(t_k)$  и дискретным выходом  $V(t_k)$ , где  $\hat{A}_j, \hat{F}_j, \hat{B}_j, \hat{Q}_j$  и  $d_j$  некоторые постоянные матрицы и векторы подходящих размеров. Равенства (8) определяют начальные условия для системы (7).

**Определение 2.** Под поточечным наблюдателем для системы (1), (2) с заданным управлением  $u(t_k)$  будем понимать систему вида (7), для которой существует момент времени  $t_{\tilde{k}_3}$  такой, что при любом начальном условии (8) и входном воздействии  $W(t_j)$ , равным выходу (2),  $W(t_k) = y(t_k), k = k_3, k_3 + 1, \dots$ , выход  $V(t_k)$  системы (7) начиная с момента времени  $t_{\tilde{k}_3}$  совпадает в точках  $t_k, k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots$ , с решением системы (1), порождающим выход (2), то есть с векторами  $X(t_k) : V(t_k) = X(t_k), k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots$

Для формулировки основных результатов обозначим  $n = n_1 + n_2$  и введем матрицы

$$E_1 = e^{A_{11}h}, \quad E_2 = \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau, \quad A = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} E_2 B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad C_j = [C_{1j}, C_{2j}],$$

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j B_j, \quad C(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Сформулируем критерии существования поточечного наблюдателя и регуляторов финитной стабилизации по состоянию и по выходу.

**Теорема 1.** Для того чтобы для системы (1), (2) существовал поточечный наблюдатель (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

**Теорема 2.** Для того чтобы для системы (1) существовал регулятор финитной стабилизации по состоянию (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} [I_n - \lambda A, B(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

**Теорема 3.** Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор финитной стабилизации по выходу (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (9) и (10).

## ЗАДАЧА ФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ НАБЛЮДАЕМОГО ВЫХОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.Е. Хартовский<sup>1</sup>, О.И. Урбан<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Гродненский государственный университет имени Я. Купалы, Ожешко 22, 230000 Гродно, Беларусь,  
{hartovskij,urban}@grsu.by

**Введение.** В настоящей работе для линейных автономных систем нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями построен регулятор финитной стабилизации по выходу, под которым понимается регулятор с обратной связью в виде измерений наблюдаемого выходного сигнала, обеспечивающий одновременно финитную стабилизацию и конечный спектр. Подобная задача с условием выбора любого конечного спектра в случае системы запаздывающего типа со скалярными входом и выходом изучена в [1], а для многовыходных систем нейтрального типа в [2]. К недостаткам статьи [2] следует отнести наличие в регуляторе слагаемых с распределенными запаздываниями, хотя исходный объект управления содержит только сосредоточенное запаздывание. Интегралы, содержащие распределенное запаздывание, при практической реализации заменяются конечными суммами, что даже при использовании квадратурных формул высокой точности может привести к нежелательным последствиям (например, потере устойчивости) [3], [4]. Принципиальное отличие настоящей работы от [2] заключается в новой конструкции регулятора, который содержит сугубо сосредоточенные соизмеримые запаздывания. Идея состоит в том, что строится разрывная обратная связь, определяемая двумя контурами регулятора: внутренним и внешним. Внутренний контур обеспечивает «сглаживание» решения с течением времени, что достигается за счет построения обратной связи, которая преобразует исходную систему в систему запаздывающего типа. После того, как решение достигнет необходимой гладкости, «включается» второй контур, цель которого — обеспечить точечную врожденность замкнутой системы в направлениях, соответствующих всем компонентам вектора решения исходной (разомкнутой) системы.

**Основной результат.** Пусть объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $x$  – решение этой системы,  $u$  – управление,  $y$  – наблюдаемый выходной сигнал (выход);  $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$  – единичная матрица,  $\lambda_h$  – оператор сдвига, определяемый для заданного  $h > 0$  правилом  $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (для произвольной функции  $f$ );  $D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i$ ,  $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ ,  $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i$ ,  $B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$ ;  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$ .

Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \quad (3)$$

Считаем, что  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$  — неизвестная функция, где  $\tilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$  — класс функций,  $k - 1$  раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка  $k$ . Управление  $u$  — кусочно-непрерывная функция.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{11}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= U_{21}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$  — вспомогательная переменная,  $t_0 > 0$  — некоторое число, выбор которого указывается ниже ( $u(t) \equiv 0, t \leq t_0$ ),  $U_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[p, \lambda]$ ,  $U_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \tilde{n}}[p, \lambda]$ ,  $U_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times l}[p, \lambda]$ ,  $U_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}[p, \lambda]$ ,  $\mathbb{R}^{k \times m}[p, \lambda]$  — множество полиномиальных матриц.

Для реализации регулятора (4) задаем начальное условие

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - \tilde{h}, t_0] \quad \left( \tilde{h} = \tilde{\alpha}h, \quad \tilde{\alpha} = \max \{ \deg_{\lambda} U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2 \} \right), \quad (5)$$

где  $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\tilde{p}}([t_0 - \tilde{h}, t_0], \mathbb{R}^{\tilde{n}})$  — любая функция,  $\tilde{p} = \max \{ \deg_p U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2 \}$ , запись  $\deg_{\lambda} f(\lambda)$  обозначает степень полинома (в том числе и матричного).

Цель настоящей работы – построить регулятор в виде (4), который обеспечит выполнение следующих условий: а) каковы бы ни были начальные функции  $\varphi$  в (3) и  $\tilde{\varphi}$  в (5), существует число  $t_1 > 0$  такое, что векторная компонента  $x$  вектора-решения  $\text{col}[x, \tilde{x}]$  замкнутой системы (1), (4) равна нулю начиная с момента времени, равного  $t_1$ ,

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1;$$

б) замкнутая система (1), (4) является линейной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром.

**Определение.** Регулятор вида (4), обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть регулятором финитной стабилизации по выходу.

Обозначим  $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$  и сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема.** Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор финитной стабилизации по выходу (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} [I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

#### Литература

1. Метельский А. В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 12. С. 1665–1682.
2. Хартовский В. Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 686–706.
3. Mondie S., Mihiels W. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-delay Systems with a Safe Implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, No 12. P. 2207–2212.
4. Харитонов В. Л. Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 51–65.

**К РАВНОМЕРНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ**

**О.Б. Цехан**

УО Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь,  
tsekhan@grsu.by

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления (ЛНС-ВС)

$$\dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t) + B(t, \mu)u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad z(t_0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  — параметр,  $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$ ,  $n = n_1 + n_2$ ,  $z'(t) = (x'(t), y'(t))$ , ' — символ транспонирования,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  — вектор медленных переменных,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  — вектор быстрых переменных,  $z'_0 = (x'_0, y'_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u(t), t \in T$ , — скалярная функция управления,  $A(t, \mu) = [A^0(t) + \mu^{-1}A^1(t)]$ ,  $B(t, \mu) = [B^0(t) + \mu^{-1}B^1(t)]$ ,

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad B^0(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$ ,  $A_{i+2}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_i}$ ,  $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ , — непрерывные на  $T$  матричные функции.

Пусть  $m$  — заданное целое неотрицательное число. Обозначим через  $\mathcal{U}_m(T)$  совокупность всех нижнетреугольных матриц  $P(t)$  размера  $((m+1) \times (m+1))$  с непрерывными на  $T$  элементами  $p_{ki}(t)$  ( $i, k = \overline{0, m}$ ), удовлетворяющими условию  $p_{kk}(t) \neq 0$  при  $t \in T$ ,  $k = \overline{0, m}$ .

Пусть  $F(t, \mu)$  — какая-либо фундаментальная матрица системы  $\dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t)$  и задана некоторая независящая от  $\mu$  матрица  $P \in \mathcal{U}_m(T)$ . Аналогично [1,2] введем определения.

**Определение 1.** При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  система (1) имеет  $P$ -класс  $k$ ,  $0 \leq k \leq m$  если элементы  $h_i(t, \mu)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $t \in T$  вектор-функции  $H(t, \mu) = F(t, \mu)^{-1}B(t, \mu)$  имеют непрерывные квазипроизводные [1, стр. 14]  ${}^j_P h_i(t, \mu)$ ,  $j = \overline{0, k}$  относительно матрицы  $P$ .

Для фиксированных  $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , обозначим  $\mathcal{U}_{Pk}$  множество обобщенных функций вида  $u_{P\tau} = \sum_{j=0}^k b_j(\mu) {}^j_P \Delta_\tau (\tau \in T)$ , где  $b_0(\mu), \dots, b_k(\mu)$  — полиномиальные функции от  $\mu$ , а операторы

$${}^j_P \Delta_\tau \text{ действуют по правилу } \langle {}^j_P \Delta_\tau, h_i \rangle = {}^j_P h_i(\tau), \quad \langle u, h_i \rangle \triangleq \int_{t_0}^{t_1} h_i(\tau) u(\tau) d\tau.$$

**Определение 2.** При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  ЛНСВС (1)  $P$ -равномерно управляема, если она имеет  $P$ -класс  $n-1$  и множество  $\{v \in \mathbb{R}^n : v = (\langle u_{P\tau}, h_1 \rangle, \langle u_{P\tau}, h_2 \rangle, \dots, \langle u_{P\tau}, h_n \rangle)\}$  совпадает с пространством  $\mathbb{R}^n$  при любом  $\tau \in T$ . ЛНСВС (1) робастно (по  $\mu$ )  $P$ -равномерно управляема, если она  $P$ -равномерно управляема при любом  $\mu \in (0, \mu^0]$ .

$P$ -равномерно управляемая система может быть мгновенно в каждый момент  $\tau \in T$  переведена в любое состояние с помощью импульсных управлений  $u_{P\tau} \in \mathcal{U}_{P, n-1}$ . Для робастно  $P$ -равномерно управляемой системы это возможно при некотором  $\mu^* \in (0, \mu^0]$  и любом  $\mu \in (0, \mu^*]$ .

С ЛНСВС (1) связаны [3] независящие от параметра  $\mu$  подсистемы, которые формально получаются из ЛНСВС, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при  $\mu = 0$ . Если  $\det A_4(t) \neq 0$ ,  $t \in T$ , то вырожденная система (ВС, медленная подсистема) имеет вид  $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A_s(t)\bar{x}(t) + B_s(t)\bar{u}(t)$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}(t_0) = x_0$ ,  $t \in T$ ,  $A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$ ,  $B_s(t) \triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$ , и является линейной нестационарной  $n_1$ -мерной системой. Система пограничного слоя (СП или «быстрая» подсистема) для ЛНСВС (1) записывается следующим образом:  $\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau) + B_2(t_0)\tilde{u}(\tau)$ ,  $\tau = \mu^{-1}(t - t_0) \in T_\mu \triangleq [0, \mu^{-1}(t_1 - t_0)]$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{y}(0) = y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0$ , и является линейной стационарной  $n_2$ -мерной системой. Наряду с СП введем  $t$ -семейство быстрых подсистем вида СП с матрицами  $A_4(t), B_2(t)$  (вместо  $A_4(t_0), B_2(t_0)$ ), где  $t \in T$  рассматривается как параметр семейства стационарных систем.

Понятие  $P$ -равномерной управляемости независимой от параметра  $\mu$  ВС вводится как в [1, стр.109]. Будем говорить, что  $t$ -семейство быстрых подсистем полностью управляемо на  $T_\mu$ , если каждая подсистема из этого семейства полностью управляема.

Для независимой от параметра  $\mu$  матрицы  $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$ , относительно которой ЛНСВС (1) имеет  $P$  класс  $k$ , определим  $n$ -вектор функции  $Q_i^j(t)$ ,  $j = \overline{0, i}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} Q_i^j(t) &= p_{ii}(A^0(t)Q_{i-1}^j(t) + A^1(t)Q_{i-1}^{j-1}(t) - \dot{Q}_{i-1}^j(t)) - \sum_{k=0}^{i-1} p_{ik}(t)Q_k^j(t), \\ Q_0^0(t) &= B^0(t), Q_0^1(t) = B^1(t), Q_i^j(t) = 0 \text{ при } j < 0 \text{ или } j > i. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть для матрицы  $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$  определены функции (2), а матрица  $\bar{P}$  есть верхний левый блок размера  $(n_1 \times n_1)$  матрицы  $P$ .

**Теорема.** Пусть матричные функции  $A_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  непрерывно дифференцируемы на  $T$  и  $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$  для любого  $t \in T$ . Если  $n \geq 2$ , то считаем матричные функции  $Q_i^j(t)$ ,  $i = \overline{0, n-2}$ ,  $j = \overline{0, i}$ , (2) непрерывно-дифференцируемыми на  $T$ . Если ВС  $\bar{P}$ -равномерно управляема на  $T$  и  $t$ -семейство быстрых подсистем полностью управляемо на  $T$ , то найдется такое  $\hat{\mu} \in (0, \mu^0]$ , что на  $(0, \hat{\mu}]$  ЛНСВС (1) робастно  $P$ -равномерно управляема на  $T$ .

**Схема доказательства.** Из условий теоремы следует, что  $-A_i'(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  непрерывно дифференцируемы на  $T$  и  $\operatorname{Re} \lambda(-A_4'(t)) \leq -\alpha < 0$  для любого  $t \in T$ . Устанавливая связь между матричными функциями  $Q_i^j(t)$ ,  $i = \overline{0, n-2}$ ,  $j = \overline{0, i}$ , и  $s_i^j(t)$ ,  $i = \overline{0, n-2}$ ,  $j = \overline{0, j}$ , (15) [2], доказываем, что при выполнении условий теоремы  $s_i^j(t)$  непрерывно-дифференцируемы на  $T$ . Согласно теореме 4.7. [1, стр.109] из  $\bar{P}$ -равномерной управляемости ВС следует  $\bar{P}$ -равномерная наблюдаемость двойственной ВС, а из полной управляемости  $t$ -семейства быстрых подсистем ЛНСВС (1) — полная наблюдаемость  $t$ -семейства двойственных быстрых подсистем. Таким образом, при выполнении условий теоремы выполнены все условия теоремы 6 [2], а значит, двойственная к ЛНСВС (1) система наблюдения робастно  $P$ -равномерно наблюдаема для достаточно малых  $\mu$ . Согласно теореме 4.7. [1, стр.109] при любом фиксированном  $\mu$  ЛНСВС  $P$ -равномерно управляема тогда и только тогда, когда она имеет  $P$ -класс  $n-1$  и двойственная ЛНСВС наблюдения  $P$ -равномерно наблюдаема, откуда следует, что найдется такое  $\hat{\mu} \in (0, \mu^0]$ , что ЛНСВС (1)  $P$ -равномерно управляема на  $T$  для любых  $\mu \in (0, \hat{\mu}]$ , т.е. робастно. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021-2025 годы (шифр задания "Конвергенция 1.2.04").

#### Литература

1. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений*. Минск: Беларус. навука, 2013.
2. Цехан О. Б. *Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы* // Диф. уравнения и мат. физика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ РАН, М. 2023. Т. 226. С. 150–164.
3. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular perturbations methods in control: analysis and design*. NY. Academic Press, 1999.



**PARAMETRIC CONIC OPTIMIZATION PROBLEMS OVER SEMI-DEFINITE PLUS NON-NEGATIVE CONE**

**O.I. Kostyukova<sup>1</sup>, T.V. Tchemisova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Institute of mathematics, National academy of sciences of Belarus, Surganov Str. 11, 220072 Minsk, Belarus,  
kostyukova@im.bas-net.by

<sup>2</sup>University of Aveiro, Campus Universitario Santiago, Aveiro 3800-196, Portugal  
tatiana@ua.pt

**Introduction.** Linear conic optimization deals with the optimization of linear functions in feasible sets given by the intersection of an affine space and a convex cone. Conic Optimization is a relevant sub-field of Convex Optimization since its theoretical results are actively used, allowing one to model many nonlinearities arising in practice with the help of the conical structure of the feasible set [1,2]. The number of important applications of Conic Optimization is growing and the software is developing rapidly.

The type of the cone determines the type of the conic problem. The study of the structure of the cones, which determine the feasible sets of conic problems, is crucial for the development of a theoretical approach and efficient numerical methods. Therefore, the subjects of active research are various cones, and the cones, the elements of which are matrices, are among the most complex and important [1-4].

This study is dedicated to special problems of linear Conic Optimization, namely, we consider parametric linear conic problems over the cone of symmetric positive semi-definite matrices which are element-wise non-negative, and its dual. Such a study is of great importance, since knowing how solutions depend on the initial parameters of the problem is necessary to fully understand the problem. Although there are several interesting publications related to parametric semi-definite and second-order programming problems, we did not find any references to published results for parametric optimization problems over the cone of semi-definite plus non-negative matrices.

**Problem statement.** Let  $S$  be the space of  $p \times p$  symmetric real-valued matrices with inner product  $A \bullet B = \text{trac}(AB)$  for  $A$  and  $B$  in  $S$ ,  $S_+ \subset S$  be the cone of symmetric positive semi-definite matrices, and  $N \subset S$  be the cone of symmetric element-wise non-negative matrices. The cone  $S_+ \cap N$  consisting of positive semidefined matrices whose elements are not negative is called *doubly non-negative cone*. Its dual  $S_+ + N$  consists of matrices that can be represented as the sum of a positive semi-definite matrix and a non-negative matrix and is called the cone of *semi-definite plus non-negative* matrices.

In this paper, we investigate a pair of dual parametric conic optimization problems over these cones. Our interest is due to the fact that, on one hand, these cones have many direct applications, and on the other hand, they are not sufficiently well-studied as they do not possess some of the "good" properties of cones (e.g., self-duality, facial exposedness, and others).

For  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  with a sufficiently small  $\varepsilon_0 > 0$ , consider a pair of dual conic optimization problems over the cones  $S_+ + N$  and  $S_+ \cap N$ . The primal linear parametric conic optimization problem over the cone  $S_+ + N$  has the form

$$\mathbf{P}(\varepsilon) : \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c(\varepsilon)^\top x, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j + A_0(\varepsilon) \in S_+ + N,$$

where  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  is a parameter,  $x = (x_j, j = 1, \dots, n)^\top \in \mathbb{R}^n$  is a decision variables vector,  $A_j \in S, j = 1, \dots, n$  are given matrices,  $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$  and  $A_0(\varepsilon) \in S, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , are given sufficiently smooth functions.

The Lagrange dual problem to  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  has the form

$$\mathbf{D}(\varepsilon) : \quad \max(-A_0(\varepsilon) \bullet U), \quad \text{s.t.} \quad A_j \bullet U = c_j(\varepsilon), j = 1, \dots, n; U \in S_+ \cap N,$$

where the decision variable is the matrix  $U \in S$ .

First, we explore a pair of dual unperturbed problems  $(\mathbf{P}(0))$  and  $(\mathbf{D}(0))$  paying a special attention to the properties of strict complementarity and non-degeneracy.

Such a research is important because optimization algorithms, particularly interior-point methods, benefit significantly from the properties of non-degeneracy and strict complementarity. As a rule, numerical

methods assume that optimal solutions possess these properties. In parametric optimization, both non-degeneracy and strict complementarity are essential for conducting sensitivity analysis, which studies how the optimal solution changes in response to changes in the problem's parameters.

Even though there are general definitions of strict complementarity and non-degeneracy [3], it is useful to have clearer and more explicit equivalent descriptions depending on the cone in question. The novelty of the results obtained in this part of the study consists in a more constructive presentations of the conditions of complementarity and non-degeneracy of optimal solutions of the problems under considerations which can be used for numerical applications and for the further study of the cones.

The second part of the study is devoted to exploring the pair of dual parametric conic problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  and  $(\mathbf{D}(\varepsilon))$  with  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . Such a study is of great importance, as it lies in the basis of sensitivity analysis and allows one to understand the qualitative behavior of optimal solutions and the optimal values of the cost functions in these problems as the parameters vary.

For the given problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  and  $(\mathbf{D}(\varepsilon))$ , our goal is to study the behavior of their optimal solutions w.r.t. the parameter  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . To this end, based on the results obtained in the first part of the study, we investigate properties of optimal solution functions  $x(\varepsilon)$  and  $U(\varepsilon)$  to problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  and  $(\mathbf{D}(\varepsilon))$ , respectively, for  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ .

The properties obtained allow us under some assumptions to find relationships in the form of a system of bi-linear equations (so called *defining equations*) that uniquely define the optimal solution functions  $x(\varepsilon)$ ,  $U(\varepsilon)$  to problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  and  $(\mathbf{D}(\varepsilon))$  for  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ .

Therefore, we can suggest the following way to solve the parametric problem. Suppose that for the unperturbed problems  $(\mathbf{P}(0))$ ,  $(\mathbf{D}(0))$ , we have the optimal solutions  $x^0$  and  $U^0$ . Then, for any fixed  $\varepsilon_* \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , we can find solutions  $x(\varepsilon_*)$  and  $U(\varepsilon_*)$  of the perturbed problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon_*))$ ,  $(\mathbf{D}(\varepsilon_*))$  by solving the (finite) system of defining equations. Here we can apply, for example, the Newton method starting from a known initial approximation  $x^0$ ,  $U^0$ .

#### **Contribution of the study.**

- The properties of strict complementarity and non-degeneracy of solutions of parametric linear conic problems  $(\mathbf{P}(\varepsilon))$  and  $(\mathbf{D}(\varepsilon))$  over the cones  $S_+ \cap N$  and  $S_+ + N$  were analyzed.
- The relations in the form of bi-linear equations, which unambiguously determine optimal solutions of parametric problems as functions of the parameter  $\varepsilon$  in a neighborhood of a given parameter value, were deduced.
- The results obtained can be applied to sensitivity analysis and allow better understand and analyze the qualitative behavior of optimal solutions and the optimal value of the cost function as the parameters change.

#### **References**

1. Letchford A. N., Parkes A. J. *A guide to conic optimisation and its applications* // RAIRO - Oper. Res. 2018. Vol. 52, No 4-5. P. 1087–1106.
2. Berman A, Dur M, Shaked-Monderer N. *Open problems in the theory of completely positive and copositive matrices* // Electron. J. Linear Algebra. 2015. Vol. 29. P. 46–58.
3. Pataki G. *The geometry of semi-definite programming* // In: Handbook of Semi-definite Programming. 2000. Springer, Boston, MA. P. 29–65.
4. Jargalsaikhan B., Ruckmann J. J. *A note on strict complementarity for the doubly non-negative cone* // Optimization. 2019. Vol. 68, No 2–3. P. 457–464.

# СЕКЦИЯ «МОДЕРНИЗАЦИЯ И ЦИФРОВИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ»

## ОБ ОДНОМ УПРОЩЕНИИ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

С.М. Агеев

Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
ageev\_sergei@inbox.ru

Определитель матрицы входит в число основных инструментов современной математики. С момента его возникновения было разработано несколько подходов к обоснованию этого понятия. Однако каждый из них, строгий и последовательный, доставляет значительные трудности для изучающего предмет впервые.

Самое устоявшееся (хотя далеко не самое простое) определение определителя состоит в использовании формулы полного разворачивания. В качестве основного инструмента здесь выступают подстановки и их четности – понятия, стоящие несколько в стороне от теории матриц. Кроме того при обосновании их свойств легко увязнуть в многочисленных деталях.

В двух других часто используемых подходах – аксиоматическом и индуктивном, главный акцент делается на приведение матриц к ступенчатому виду. Это вновь приводит к рассуждениям технического характера, что в целом затуманивает суть дела.

В докладе будет предложено иное построение теории определителей, что позволит коротко и прозрачно обосновать все свойства определителей. Ключевыми здесь являются следующие два факта:

а) теорема о равноправности, утверждающая, что в некотором естественном смысле разложения определителя по строчке и по столбцу коммутируют. Этот факт (в пределах одной страницы) непосредственно устанавливает равносильность разложения определителя по любой строчке и любому столбцу;

б) доказательство теоремы о мультипликативном свойстве определителя, сводящее его к случаю, когда один из сомножителей совпадает с матрицей, получающейся перестановкой строчек единичной матрицы. Мало того, что доказательство мультипликативного свойства кажется проще имеющихся в литературе, фактически теми же рассуждениями устанавливаются классические теоремы Лапласа и Бине-Коши (последнюю, ввиду ее трудоемкости, обычно изучают факультативно).

После получения этих двух ключевых фактов доказательство всех стандартных свойств определителей становится простым и кратким (полное изложение данного подхода излагается в статье С. Агеева, Е. Агеевой «Упрощение построения теории определителей»). Чтобы показать насколько при данном подходе изложение темы "Матрицы и их определители" отличается от стандартного, приведем последовательность прохождения тем:

- 1) определитель матрицы произвольного порядка (теорема о равноправности);
- 2) простейшие следствия формулы разложения по строчке и столбцу;
- 3) определитель произведения матриц;
- 4) «фальшивое» разложение и обратная матрица;
- 5) правило Крамера;
- 6) подстановки, их матрицы и четности;
- 7) теоремы Бине-Коши и Лапласа;
- 8) формула полного разворачивания;
- 9) элементарные операции над матрицами;
- 10) приведение матрицы к ступенчатому виду.

**ПРИМЕНЕНИЕ CHATGPT В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ****Н.А. Азаров<sup>1</sup>, Л.Л. Голубева<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {mmf.azarovNA2, goloubeva}@bsu.by

В последние годы искусственный интеллект все больше интегрируется в образовательный процесс, предоставляя новые возможности для преподавателей и учащихся. Одной из наиболее перспективных технологий является GPT, созданный на базе глубокого обучения. GPT-модели способны анализировать текстовую информацию, генерировать ответы и предоставлять обучающие материалы на различных уровнях сложности.

ChatGPT в преподавании математики имеет большой потенциал, ввиду его больших возможностей. Он может выступать помощником, предоставляя подробные объяснения сложных тем, таких как дифференциальные уравнения или линейная алгебра. Его можно использовать для создания персонализированных учебных планов, учитывая текущий уровень знаний ученика, его слабые и сильные стороны. ChatGPT также может помочь студентам подготовиться к экзаменам, создавая тесты и задачи на основе учебной программы.

Одна из самых полезных возможностей ChatGPT в обучении является возможность ведения диалога в режиме реального времени. Такой интерактивный метод обучения помогает ученикам самостоятельно находить решения и закреплять полученные знания, развивая навыки критического мышления и аналитического подхода. Визуализация играет важную роль в обучении математике. ChatGPT может не только объяснить, как решается та или иная задача, но и предложить визуальное представление решений.

В контексте школ и высшего образования, где большие размеры учебных групп часто создают проблемы для предоставления персонализированного образования, ChatGPT предлагает многообещающее решение. Искусственный интеллект может работать с множеством студентов одновременно, он обещает инклюзивный опыт обучения, гарантируя, что ни один студент не останется без поддержки [1].

Эти примеры показывают, как искусственный интеллект можно использовать для углубленного обучения математике, делая процесс не только продуктивным, но и интересным.

Хоть возможности ChatGPT впечатляют, он не является идеальным. Искусственный интеллект иногда может предлагать неверные ответы, а также ему может быть трудно понять контекст или специфику определенных областей. Также результаты экспериментов по использованию искусственного интеллекта в образовании показывают, что влияние применения ИИ-инструментов в образовании противоречиво. С одной стороны, чат-боты способны существенно облегчить процесс обучения. В то же время их бесконтрольное использование может ухудшить результаты обучения: школьники, решая задачи с помощью чат-бота, привыкают использовать его подсказки и без них справляются с заданиями хуже. И для того, чтобы этого не происходило, над разработкой и использованием образовательных чат-ботов и других ИИ-инструментов должны тщательно работать специалисты [2].

Следует помнить, что ChatGPT — это только инструмент, и он не может рассматриваться как замена преподавателям.

**Литература**

1. Wardat Y., Tashtoush M. A., AlAli R., Jarrah A. M. *ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics* // Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2023. Vol. 19, No 7. P. em2286.
2. Skillbox *ChatGPT ухудшил успеваемость старшеклассников по математике* [Электронный ресурс]. – Адрес доступа: <https://skillbox.ru/media/education/chatgpt-ukhudshil-uspevaemost-starsheklassnikov-po-matematike/>. Дата доступа: 17.09.2024.

## ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ ПРОГРАММИРОВАНИЮ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ АЛГОРИТМАМ В ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ УНИВЕРСИТЕТА

С.А. Вельченко<sup>1</sup>, Д.Г. Медведев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, semmi.vall@gmail.com, medvedev@bsu.by

**Введение.** Обучение студентов IT-специальностей в информационно-образовательной среде классического университета учитывает следующие закономерности: фундаментализации, ориентации на взаимосвязь объективных и субъективных факторов динамики развития образования, науки и технологий обучения; информатизации, междисциплинарности [3] и гуманитаризации. В частности, закономерность фундаментализации реализуется через принципы научности и преемственности; интеграции учебной, научно-исследовательской и самостоятельной работы. Ориентация на взаимосвязь объективных и субъективных факторов динамики развития образования, науки и технологии обучения осуществляется посредством дидактических принципов динамичности управления образовательной деятельностью и тернарности; закономерность информатизации — посредством дидактического принципа селективности и целесообразности использования информатизационно-образовательных технологий в обучении студентов; закономерность междисциплинарности реализуется посредством принципов актуализации междисциплинарных связей, профессиональной направленности и связи теории с практикой; закономерность гуманитаризации осуществляется с помощью принципов лично ориентированного обучения студентов и индивидуализации обучения [1].

**Особенности обучения параллельным алгоритмам будущих IT-специалистов.** Разработанное и опубликованное учебно-методическое пособие по курсу параллельных вычислений учитывает все основные вышеизложенные закономерности; изложение курса лаконично, компактно, не содержит длительного обсуждения простых вопросов; теоретические положения закрепляются системой тематических заданий, обучающих решению типовых и нестандартных задач; приводятся ответы, указания, решения [2]; содержание материала отвечает дидактическим принципам междисциплинарности, связи теории с практикой с учетом профессиональной направленности, динамичности организации содержания, научности. Все вышеизложенное позволило вывить следующие направления обогащения содержания и методики обучения с позиции соответствия характеристическим свойствам ИОС: систематическое обновление и дополнение информационных потоков обучения студентов новыми материалами; целенаправленная актуализация в учебном процессе различных видов и типов меж предметных связей [3]; углубление и расширение тематики индивидуальных заданий по профессиональной подготовке студентов по трем направлениям: — научно-методического характера; — углубляющие и дополняющие содержание курса параллельного программирования; — прикладного характера; реализация информатизации посредством использования дидактических возможностей информационно-компьютерных технологий. Исследование исторических аспектов разработки и обновления содержания обучения студентов классического университета параллельного программирования позволило нам внести организационно-структурные изменения в учебный процесс: переход к поэтапной системе подготовки студентов IT-специальностей, предусматривающей пропедевтический (ознакомительный); использование теории решения изобретательских задач в обучении [5]; использование эвристических заданий в обучении параллельному программированию [4]; фундаментальный и специальный, углубленно-направленный этапы усвоения содержания обучения; осуществление связи теории и практики с учетом профессиональной направленности содержания обучения (изучение языков программирования, построения и анализа алгоритмов, изучение алгоритмов распараллеливания, и др.). Организационно-педагогические изменения в системе подготовки IT-специалистов состоят: в реализации принципа связи теории и практики в курсе программирования и содержании учебных пособий с учетом целесообразности опережающих соотношений теории и практики; использовании научно-педагогических, учебно-методических и

программно-технологических разработок, реализующих дидактические возможности ИКТ в учебном процессе при изучении параллельного программирования; разработке учебно-методического комплекса по фундаментальному курсу «Параллельное программирование» как составляющей учебно-методического обеспечения содержания обучения в методической системе обучения IT-специалистов в классическом университете; регулировании и детализации учебного материала на уровне изучения тем и разделов программирования с учетом предвидения перспектив использования полученных знаний при освоении содержания выделенных информационных потоков; обеспечении своевременной обратной связи для успешного осуществления учебного процесса по усвоению содержания курса параллельного программирования.

### Литература

1. Медведев Д. Г. *Организация обучения студентов-механиков в информационно-образовательной среде классического университета*. Минск : БГУ, 2018. 215 с.
2. Коваленко Н. С., Вельченко С. А., Овсеец М. И. *Параллельное программирование. Математические модели. Методы. Алгоритмы*. // Учебно-методическое пособие с ГРИФОМ УМО. Минск: БГУ, 2022. 255 с.
3. Вельченко С. А. *Использование полипарадигмального подхода при обучении параллельному программированию студентов университета* // Зборнік наукових прац Академії паслядыпломнай адукацыі. Вып. 19 / рэдкал.: А. П. Манастырны (гал. рэд.) [і інш.] ; ДУА «Акад. паслядыплом. адукацыі». Мінск: АПА, 2021. 554 с.
4. Вельченко С. А. *Формирование технической ит-компетенции при обучении студентов дисциплине «Параллельное программирование»* // University Pedagogical Journal. Университетский педагогический журнал. Минск: БГУ, 2022. Ч. 2. С. 66–72.
5. Вельченко С. А., Медведев Д. Г. *Использование ТРИЗ для подготовки будущих IT-специалистов параллельным вычислениям* // University Pedagogical Journal. Университетский педагогический журнал. Минск: БГУ, 2024. Ч. 1. С. 32–40.
6. Вельченко С. А., Медведев Д. Г. *Особенности подготовки будущих IT-специалистов в информационно-образовательной среде университета* // Веб-программирование и интернет-технологии (WebConf2024): материалы 6-й Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 15–16 мая 2024 г., редкол.: И. М. Галкин (гл. ред.) [и др.]. Минск: БГУ, 2024. С. 119–122.

## О МОДЕРНИЗАЦИИ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКОВ-ПРОГРАММИСТОВ

**М.В. Воронов<sup>1</sup>, В.И. Пименов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Московский государственный психолого-педагогический университет,  
Сретенка 29, 127051 Москва, Россия, mivoronov@yandex.ru

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,  
Большая Морская 18, 191186 Санкт-Петербург, Россия, v\_pim@mail.ru

В период бурного развития информационных технологий возрастает потребность в подготовке соответствующих специалистов разного уровня квалификации. На сегодняшний день более 80 % IT-специалистов используется для обслуживания существующих программных продуктов, расширения спектра и эффективности заложенных в них возможностей, а также широкого применения OpenSource-решений. Одновременно стремительно возрастает потребность в разработке качественно новых и все более сложных программных продуктов, характерным признаком которых является их увеличенная «математикоемкость». Для выполнения такого рода работ необходимы программисты высшей квалификации, подготовка которых осуществляется по программам из группы направлений «Компьютерные и информационные науки».

Разработку масштабного программного проекта целесообразно рассматривать с позиции теории систем. Пусть задана некоторая цель, достижение которой предполагается осуществить, создав соответствующую систему как некий программный комплекс. Его разработка обычно осуществляется в условиях существенной неопределенности. Эти условия сродни тем, в которых оказываются любые конструкторские коллективы. Обобщенная схема их действий такова: вначале формируется некий образ будущей системы, функционирование которой обеспечивает достижение

поставленной цели, далее на основе соответствующей модели функционирования разрабатывается структура будущего комплекса, затем происходит собственно программирование и отладка полученного продукта. На всех этих этапах разработчики должны проявлять способность к решению широкого круга задач — от тех, что требуют серьезных творческих усилий, до так называемых рутинных (именно поэтому разработку современных крупных проектов осуществляют коллективы, имеющие в своем составе работников различной квалификации).

Университетские программы из группы направлений подготовки «Компьютерные и информационные науки» в целом содержат все компоненты, освоение которых требуется при разработке крупных программных проектов. Однако многие выпускники этих программ не в полной мере готовы к работе в таких проектах, по-видимому, нужна модернизация существующих образовательных программ.

В университетских кругах наибольшую поддержку находит разделяемая нами следующая позиция: строить учебный процесс подготовки такого рода специалистов необходимо на идеях фундаментальности с адекватным конкретной ситуации сочетанием добротной профессиональной подготовки [1]. В реализуемых же образовательных программах не в должной мере осуществляется интеграция фундаментальных и практико-ориентированных компонентов. В этой связи предлагается ряд шагов по модернизации процессов вузовской подготовки программистов высшей квалификации.

1. Введение в учебный процесс профессионально ориентированного интеграционного компонента, ориентированного на восприятие обучаемыми системного характера получаемых общетеоретических и профессионально ориентированных знаний. Основу такого компонента может составить дисциплина «Теория систем и системный анализ». Как правило, программист, получая очередное задание на разработку сложного программного продукта, сталкивается с необходимостью разрешения слабоструктурированных проблем (на сегодняшний день для их разрешения представляется целесообразным использование системного анализа [2]). Именно в рамках этого курса удобно реализовывать функцию интеграции компонентов знаний, умений и навыков будущего программиста, ведь в первую очередь речь идет о его способности разрабатывать математические модели и алгоритмы решения поставленных задач.

Издано огромное количество публикаций, где показано, что математическое моделирование — действенный инструмент формирования интегративных методов обучения. Значительно скромнее выглядит список трудов, посвященных методике освоения умений разработки математических моделей, особенно, если задача сформулирована в вербальной форме и затрагивает целый ряд различных разделов знаний, что обуславливает возникновение у студентов серьезных затруднений.

Да, построение математической модели в значительной мере творческий процесс, но он в существенной мере базируется на знаниях и математики, и рассматриваемой предметной области, а посему относится к весьма сложным для освоения умениям находить нужные кванты знаний и строить из них нужную логику рассуждений. Для современного же программиста способность построить модель, согласно которой будет функционировать его будущий программно-технический комплекс, едва ли не самая важная оставляющая его профессиональных умений.

Поскольку огромное количество проектов касается вопросов компьютерной поддержки процессов управления, в качестве интегратора может использоваться и учебная дисциплина «Теория управления», в части управления организационными системами, выбора адекватных методов решения и соответствующих средств обработки информации.

Важную интегрирующую функцию выполняет и участие студентов в работе профессионально ориентированного, функционирующего в режиме факультатива студенческого конструкторского бюро. Цель его организации заключается в создании практико-ориентированной среды, в значительной степени адекватной той, в которую попадут будущие выпускники. Здесь студенты могут участвовать в разработке проекта в целом и его различных частей, причем каждому предоставляется возможность попробовать себя в различных ролях.

2. При изучении математических дисциплин необходимо повысить внимание к условиям применимости изучаемых методов и рассматривать закрепление соответствующего навыка на практических и семинарских занятиях в качестве важнейшего образовательного элемента. Для

решения подавляющего большинства частных задач разработаны математические методы, которые реализуются с помощью доступных программных продуктов. Практическое же применение готовых программных продуктов для студентов — будущих программистов не представляет существенных трудностей, но квалифицированный программист, зная на каком математическом методе основан программный продукт, в конкретно данной ситуации должен отчетливо понимать уровень допустимости его применения.

Итак, будущие программисты и на теоретическом, и на практическом уровне должны знакомиться с широким спектром ситуаций, в которых они могут оказаться в процессе своей профессиональной деятельности, и убедиться в необходимости получения совокупности знаний и умений, как системы.

### Литература

1. *Фундаментальность и практико-ориентированность: как университетам найти «сложный баланс»? (На запрос министра отвечают ректоры) [Электронный ресурс]*. М.: Аккредитация в образовании, 2024. URL: <https://akvobr.ru/new/publications/541> (дата обращения: 11.07.2024).
2. Воронов М. В. *Моделирование слабоструктурированных проблем: монография*. М: Изд-во СГУ, 2010.

## ОБ ОЦЕНКЕ ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕРНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БАКАЛАВРОВ В ИНЖЕНЕРНЫХ ВУЗАХ НА БАЗЕ СУЩЕСТВУЮЩИХ ЗНАНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

П. В. Герасименко<sup>1</sup>, С. М. Вертешев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия, pv39@mail.ru

<sup>2</sup>Псковский государственный университет, Псков, Россия, president@pskgu.ru

В эпоху перехода к инновационной экономике изучение математики в инженерных вузах всех отраслей страны должно принимать подлинно широкий размах и обретать принципиально новые черты, становясь необходимым средством интеграции математических и профильных (общеинженерных и специальных) дисциплин [1]. Наиболее эффективным способом применения в них математических идей, теорий и методов при решении прикладных задач должно быть связано с построением математических моделей [2]. Задаваясь целью развития (реформирования, модернизации, разработки и т. д.) обучения математики, необходимо четко представлять требуемый уровень базовых знаний, на которые высшая математика, а в дальнейшем профильные дисциплины будут опираться.

Для этого, прежде всего, необходимо ответить на вопрос о возможности достичь желаемый уровень знаний математики в инженерном вузе опираясь на математические знания, полученные абитуриентами в школе и оцененные с помощью ЕГЭ. Именно уровень знаний школьной элементарной математики может гарантировать успех реформирования вузовской математики, поскольку базой для познания высшей математики является школьная. Математическим аппаратом для оценивания влияния уровня баллов ЕГЭ на качество изучения математических дисциплин в работе предлагается устанавливать через тесноту связи между изучаемыми дисциплинами с помощью корреляционного анализа [2]. Он применен как для выявления междисциплинарной связи между баллами ЕГЭ и оценками блока вузовских математических дисциплин, так и между дисциплинами внутри блока. Коэффициенты корреляции межпредметных связей, что тоже междисциплинарных связей, оцениваются по достигнутым уровням оценок студентов и выступают индикаторами учебного процесса в вузе, а именно показателями соответствия уровней знаний между дисциплинами. Именно показатели межпредметных связей служат интегрирующими характеристиками учебного процесса вуза.

В работе проведено исследование, в котором использованы статистические данные ЕГЭ и экзаменационных оценок математических дисциплин бакалавров, завершивших обучение по программе направления «Информатика и вычислительная техника» в 2024 году в Псковском



государственном университете. Анализ за три года показал, что от 60 до 70 процентов абитуриентов, поступавших в университет, имело от 27 до 60 баллов ЕГЭ по элементарной математике. Если учесть, что направление подготовки одно из наиболее престижных среди молодежи, то приведенные данные могут служить показателем, что уровень знаний абитуриентами школьной математики у многих выпускников школ достаточно низкий. Естественно, что школьная подготовка элементарной математики оказывает существенное влияние на изучение математических дисциплин в вузе. Естественно, став студентами, они с огромным трудом осваивали высшую математику, что подтверждается средним баллом: алгебра и геометрия – 3,33; математический анализ – 3,01; теория вероятностей и математический анализ – 3,8. Коэффициенты корреляции между баллами ЕГЭ и оценками по приведенным дисциплинам составили от 0,50 до 0,55. Согласно шкалы Чеддока коэффициенты характеризуют умеренную качественную характеристику силы связи между школьными и вузовскими математическими дисциплинами. Если учесть, что отчисленные в течении четырех лет из вуза, количество которых составило около 30 процентов, имели более низкий средний балл по ЕГЭ, то умеренная корреляция подтверждает, что слабые знания элементарной математики порождают слабые знания по математическим дисциплинам в вузе.

В докладе приводятся как средние оценки экзаменов по дисциплинам инженерного и специального блоков, так и междисциплинарная связь между ними и дисциплинами математического блока. На основании анализа полученных показателей качества учебного процесса обосновывается вывод, что только совместная модернизация обучения математики в школе и вузах одновременно способна обеспечить высокий уровень ее знаний. Решение этой проблемы позволит повысить требования к уровню базовых знаний для профессиональных инженерных дисциплин, которые полностью зависят от уровня знаний абитуриентами элементарной школьной математики, а в дальнейшем знаний студентами по высшей математике.

#### Литература

1. Вертешев С. М. *Роль математики и информатики в подготовке инженеров для инновационной деятельности* // Перспективы развития высшей школы: материалы X Международной научно-методической конференции. Гродно: ГГАУ, 2017. С. 223 – 226.
2. Вертешев С. М. *Моделирование зависимости показателей знаний инженерных дисциплин от математических дисциплин при подготовке студентов по направлению ИВТ в Псковском государственном университете* // Инженерное образование. 2019. № 25. С. 82 – 91.

### ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ И МАГИСТРАНТОВ

М.А. Глецевич<sup>1</sup>, А.П. Шилин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {gletsevich.marina, a.p.shilin}@gmail.com

Зададим действительные числа  $\alpha_1, \alpha_2, A_k, k = \overline{0, n-2}, n \geq 3$ , причем  $A_0 = A_1 = A_{n-1} = A_n = 0, A_n = 1, \alpha_1 \neq \alpha_2$ . Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - (\alpha_1 + \alpha_2)A_{k+1} + \alpha_1\alpha_2A_{k+2})x^2 + ((\alpha_1 + \alpha_2)A_{k+2} - 2A_{k+1})x + 2A_{k+2})y^{(k)} = f(x). \quad (1)$$

Обозначим  $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} A_{k+2}\lambda^k$ , пусть  $P(\alpha_j) \neq 0, j = 1, 2$ .

**Утверждение 1.** Если корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  уравнения  $P(\lambda) = 0$  действительные и однократные, то фундаментальную систему решений однородного ( $f(x) \equiv 0$ ) уравнения (1) образуют функции

$$e^{\lambda_j x}, j = \overline{1, n-2}; \quad e^{\alpha_j x} \left( x - \frac{P'(\alpha_j)}{P(\alpha_j)} \right), j = 1, 2. \quad (2)$$

Доказательство утверждения можно осуществить, например, непосредственной подстановкой функций (2) в уравнение (1).

**Утверждение 2.** Если  $f(x) = e^{\beta x} x^3 \sum_{j=0}^m b_j x^j$ , где  $\beta \neq \alpha_1, \beta \neq \alpha_2$ , все  $b_j \in \mathbb{R}, b_m \neq 0, m \geq 1$ , то уравнение (1) имеет частное решение  $y_*$  вида  $y_* = e^{\beta x} \sum_{j=0}^{m+1} a_j x^j$ , где все  $a_j \in \mathbb{R}$ .

Числа  $a_j$  находятся стандартной процедурой метода неопределенных коэффициентов. Для их нахождения будет возникать система  $m+4$  уравнений, из которых три окажутся одинаковыми. Из  $m+2$  различных уравнений числа  $a_j, j = \overline{0, m+1}$ , найдутся единственным образом как решение системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

Пример. Решить уравнение

$$x^2 y''' - (9x^2 + 2x) y'' + (26x^2 + 11x + 2) y' - (24x^2 + 14x + 4) y = e^x x^3 (x + 1).$$

Так выглядит уравнение (1) при  $n = 3, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, A_2 = -2$ ; при этом  $P(\lambda) = \lambda - 2$ . Фундаментальная система решений (2) для однородного уравнения имеет вид

$$e^{2x}, e^{3x}(x-1), e^{4x}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В согласии с утверждением 2  $y_* = e^x (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$ . Найдя числа  $a_0, a_1, a_2$  методом неопределенных коэффициентов, получим общее решение

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}(x-1) + C_3 e^{4x}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^x}{36}(6x^2 + 23x + 23).$$

Уравнение (1) можно рекомендовать студентам и магистрантам (в том числе студентам младших курсов), которые изучили тему "Линейные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами" и хотят попробовать свои силы в научных исследованиях. Это уравнение дает богатые возможности для таких исследований и вместе с тем не требует каких-либо дополнительных знаний сверх программы основного курса дифференциальных уравнений. По способам решения, а также дальнейшим разработкам оно примыкает к уравнениям с постоянными коэффициентами, хотя и содержит переменные коэффициенты специального вида.

Уравнение (1) мы не нашли в известных справочниках по дифференциальным уравнениям. Система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica позволяет отыскать фундаментальную систему решений однородного уравнения (1) с известными числами  $\alpha_1, \alpha_2, A_k, k = \overline{0, n+2}$ , однако при решении неоднородных уравнений с правой частью, указанной в утверждении 2, дает ответ в громоздком виде, требующем упрощения. Некоторый научный интерес это уравнение может представлять и для специалистов-математиков.

## МОДЕЛЬНО-АБСТРАКТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВ В УЧЕБНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

**В.И. Горбачев<sup>1</sup>, Е.Н. Пузырева<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Бежицкая, 20, 241023, Брянск, Россия, enibgu@mail.ru, puzyreva-knysh@yandex.ru

**Аннотация.** В учебной геометрической деятельности общего образования разделяются представления геометрического и евклидова пространств, проектируется их последовательное формирование в системе базовых моделей, в абстрактной аксиоматической форме.

**Ключевые слова.** В учебной геометрической деятельности общего образования разделяются представления геометрического и евклидова пространств, проектируется их последовательное формирование в системе базовых моделей, в абстрактной аксиоматической форме.

**Введение.** В выстроенном по канонам «Начал» Евклида содержании общего математического образования геометрическое пространство представлено наглядно-образной моделью с конструированием пространственных образов геометрических фигур в качестве одного из ведущих видов деятельности. Выступающая общекультурным феноменом, геометрия Евклида в канонизации слияния наглядно-образного и абстрактно-аксиоматического представлений не выделяемого в качестве базовой конструкции геометрического пространства, по выражению И.Ф. Шарыгина, принесла общему математическому образованию «скорее вред, чем пользу» [1].

Помимо закономерности последовательного формирования модельного и абстрактного представлений геометрического пространства, в учебной геометрической деятельности нарушается и математико-мировоззренческая закономерность раздельного, интегрального представлений геометрического и евклидова пространств.

В содержании пространственно-теоретического подхода, выступающего методологией проектирования содержания общего математического образования, исследуются объективные закономерности дифференциации и интеграции геометрического и евклидова пространств в их модельном описании и в абстрактно-аксиоматическом определении [2].

**Результаты исследования.** Геометрическое пространство, как одна из фундаментальных конструкций субъектного сознания, создана в «Началах» Евклида в содержании своей наглядно-образной модели: в системе пространственных образов геометрических фигур, формируемых на базе их условных конструктивных изображений; в родовидовой систематизации геометрических фигур, преобразований, осуществляемой на понятийной основе; в содержании аналитико-синтетической деятельности доказательства свойств понятий геометрических фигур.

В классических исследованиях Р. Декарта, Л. Эйлера выделено содержание арифметической модели геометрического пространства, представленной аналитическими моделями (уравнениями, неравенствами, системами) геометрических фигур. Создаваемые в представлении арифметического пространства, аналитические модели геометрических фигур опираются на координатную форму описания свойств понятий геометрических фигур, исследование функциональных зависимостей координат точек. В исследовании аналитических моделей алгебраическими средствами устанавливаются их пространственные, метрические свойства, интерпретируемые в содержании наглядно-образной модели (аналитический метод).

В аксиоматическом определении абстрактного евклидова пространства Г. Вейлем разработано представление его векторной модели в системе векторных моделей геометрических фигур и их свойств. Система векторных моделей геометрических фигур в процедурах векторной характеристики свойств понятий геометрических фигур и последующей интерпретации в содержании наглядно-образной модели порождает векторную модель геометрического пространства. Аппарат векторной алгебры, векторная характеристика свойств коллинеарности, ортогональности, компланарности приводят к установлению пространственных, метрических свойств векторных моделей геометрических фигур (векторный метод).

В учебной геометрической деятельности преобразование векторной модели евклидова пространства в векторную модель геометрического пространства в теоретическом и содержательно-методическом планах осуществлено в исследованиях В.Г. Болтянского и И.М. Яглома [3], Н.М. Рогановского и А.А. Столяра [4]. Операция выделения координат вектора как коэффициентов в его разложении по базисным векторам позволяет на основе векторной модели евклидова пространства создать его координатную модель с координатными моделями геометрических фигур. Задача Р. Декарта, Л. Эйлера исследования аналитической зависимости координат произвольной точки координатной модели геометрической фигуры позволяет осуществить закономерный переход от векторной модели к представлению арифметической модели евклидова пространства. В результате, в учебной геометрической деятельности евклидово пространство в своей невыделенной форме представлено последовательно формируемыми на базе наглядно-образной модели геометрического пространства векторной, координатной и арифметической моделями. Геометрическое же пространство, помимо наглядно-образной модели, представлено векторной моделью, преобразованной из

векторной, координатной моделей евклидова пространства, а также арифметической моделью, созданной на основе арифметической модели евклидова пространства.

Методической закономерностью учебной геометрической деятельности уровня общего образования выступает раздельное и интегральное формирование представлений евклидова и геометрического пространства. Базовыми в исследовании связи евклидова и геометрического пространств выступают схемы «наглядно-образная модель геометрического пространства – векторная модель евклидова пространства – координатная модель евклидова пространства - арифметическая модель евклидова пространства», «векторная, координатная модели евклидова пространств – векторная модель геометрического пространства», «арифметическая модель евклидова пространства – арифметическая модель геометрического пространства».

В условиях сформированности модельных представлений евклидова и геометрического пространств конструируется учебная деятельность по выделению системы общих свойств принадлежности, порядка, параллельности каждой из моделей геометрического пространства, а также системы общих свойств операций сложения, произведения числа на вектор, скалярного произведения векторов, размерности каждой из моделей евклидова пространства. В анализе общих свойств моделей строится вывод об их независимости от модельных образов объектов каждого из пространств.

В абстрагировании от модельных образов точек, прямых, плоскостей создается конструкция абстрактного геометрического пространства, в котором общие свойства моделей становятся аксиомами, в учебной теории абстрактного геометрического пространства исследуются его закономерности. Теоремами учебной теории абстрактного геометрического пространства выступают теоремы-следствия аксиом, теоремы–эквиваленты аксиомы параллельных, теоремы вычисления метрических функций, теоремы неевклидовой геометрии.

В абстрагировании от модельных образов точек, векторов, векторных операций создается конструкция абстрактного евклидова пространства, в котором общие свойства его моделей становятся аксиомами, в учебной теории абстрактного евклидова пространства исследуются его закономерности. В учебной теории евклидова пространства доказывается фундаментальная теорема о тождественности (изоморфизме) абстрактного евклидова пространства и арифметического пространства. В содержании двумерного и трехмерного арифметических пространств выделяется система базовых задач исследования пространственных, метрических свойств арифметических моделей точек, прямых, плоскостей и их комбинаций.

Итак, в учебной геометрической деятельности геометрическое пространство представлено своими наглядно-образной, векторной и арифметической моделями, конструируемыми на базе моделей евклидова пространства. Каждая из моделей геометрического пространства характеризуется формируемыми в ее содержании методами доказательства, исследования свойств геометрических фигур: наглядно-образная модель – аналитико-синтетическим методом, векторная - векторным методом, арифметическая – аналитическим методом. В модельном содержании геометрического пространства выделяется система общих свойств модельных образов базовых геометрических фигур, фиксируемых на уровне абстрагирования «от модельных образов объектов» в качестве аксиом абстрактного геометрического пространства.

#### Литература

1. Шарьгин И. Ф. *Рассуждения о концепции школьной геометрии*. М.: МЦНМО, 2000.
2. Горбачев В. И. *Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития: монография*. М.: ИНФРА-М, 2020.
3. Болтянский В. Г., Яглом И. М. *Векторное обоснование геометрии // Новое в школьной математике*. М.: Знание, 1972. С. 64–92.
4. Рогановский Н. М., Столяр А. А. *Векторное построение стереометрии*. Мн.: Нар. асвета, 1974.

**ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ЦИФРОВИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ****Б.В. Задворный<sup>1</sup>, В.В. Казаченок<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, baryszadvorny@gmail.com, kazachenok@bsu.by

Эпоха компьютеров, как движущей силы нашего времени, заканчивается. Сегодня мобильные телефоны характеризуются такой же функциональной мощностью, какой обладали суперкомпьютеры примерно 40 лет назад.

В настоящее время все ожидания строятся вокруг искусственного интеллекта (ИИ) и робототехники. Здесь уже установились огромные по размерам сегменты: промышленная робототехника, медицинская робототехника, военная робототехника, транспортные средства на беспилотном управлении и т.д. Но без искусственного интеллекта дальнейшее функциональное развитие этих сегментов не представляется возможным. Другими словами, робототехника в текущее время существенно подталкивает развитие области искусственного интеллекта.

Сегодня искусственный интеллект – это способность компьютерных систем выполнять интеллектуальные и творческие функции, которые традиционно считаются человеческими.

Суть работы искусственного интеллекта сводится к тому, что он постоянно обучается на большом количестве данных. Прежде чем система ИИ начнет эффективно функционировать, ее саму необходимо долго и старательно обучать. Здесь будет уместно вспомнить секрет английской лужайки: чтобы получить идеальный зеленый газон, его необходимо каждое утро поливать, а вечером стричь – и так триста лет.

Искусственный интеллект – та же английская лужайка, только полив заменяется обучением на большом объеме данных. Чем больше данных, чем дольше мы обучаем нашу систему, тем она будет умнее и совершеннее.

Важно отметить, что внедрение ИИ призвано не заменить человека, а, наоборот, расширить его возможности и стать ему большим помощником.

Использование инструментов для поддержки или совершенствования обучения на основе ИИ за последнее десятилетие возросло в геометрической прогрессии. Однако по-прежнему недостаточно данных о том, как ИИ может содействовать улучшению результатов обучения и может ли он помочь теоретикам и практикам образования лучше понять, как происходит эффективное обучение.

Сегодня многие утверждения о революционном потенциале технологий ИИ в образовании основаны на предположениях, домыслах и оптимизме. В реальности использование устройств в классной работе не привело к ожидавшемуся повышению успеваемости (хотя и помогло задействовать новые педагогические методы, например, такие как «перевернутый класс»), и доля неграмотного населения осталась практически на прежнем уровне [1].

Часто декларируется, что цели создания искусственных преподавателей продиктованы соображениями образовательной эффективности. Однако здесь возникает вопрос, действительно ли при внедрении искусственных педагогов во главу угла будет поставлена именно образовательная, а не экономическая эффективность.

В настоящее время ИИ в обучении используется для решения следующих задач [2]: построение индивидуальных учебных траекторий; автоматизированная проверка домашних заданий; составление профилей обучающихся с индивидуальным планом развития; продвинутая учебная аналитика на основе больших данных; автоматизированные системы по редизайну учебных программ.

По мере совершенствования функций ИИ его инструменты постепенно возьмут на себя задачи по передаче знаний, способствуя тем самым более примитивному мышлению учащихся, поскольку разработчики ИИ больше внимания уделяют тому типу знаний, который проще автоматизировать.

В результате учителя будут играть менее заметную роль в процессе обучения. Однако, чему и как учить – останется ответственностью и прерогативой учителя. Роль инструмента ИИ будет заключаться не только в упрощении работы учителя, но и в превращении ее в более коллегиальную.

Использование искусственного интеллекта в образовании предлагает огромные возможности для улучшения процесса обучения и достижения больших успехов. Например, сегодня в ряде

областей народного хозяйства применяется машинное обучение – это приложение искусственного интеллекта, которое позволяет компьютерам действовать без непосредственного программирования, а также учиться и совершенствоваться на основе полученного опыта без вмешательства или помощи человека. Здесь под машинным обучением понимается целый спектр алгоритмов, призванных помочь компьютерной программе работать без прямых команд, то есть обучаться. При этом процесс обучения становится возможным при больших объемах данных.

Получается, что, с одной стороны, существует технологическая возможность для непрерывных процессов улучшений и оптимизации учебной деятельности, но вместе с тем она остается недоступной многим разработчикам образовательных программ.

Применение ИИ также сопряжено с определенными вызовами и ограничениями. Один из главных вызовов – это нехватка квалифицированных специалистов в области искусственного интеллекта. Еще одно ограничение состоит в недостатке доступных данных для обучения ИИ в образовании.

В то же время современные языковые модели способны генерировать текст на заданную тему и поддерживать диалог с человеком. Нейросеть GPT-3 обучена на петабайтах текста и оперирует сотнями миллиардов параметров. Она способна генерировать статьи, почти неотличимые от написанных профессиональным журналистом [2]. В частности, компания OpenAI, одним из акционеров которой является известный миллиардер Илон Маск, в ноябре прошлого года запустила чат-бот ChatGPT (русскоязычная версия: <https://gpt-chatbot.ru/>), который умеет писать тексты и коды, квалифицированно отвечает на вопросы.

Также в этом году исследователи США представили новую архитектуру нейронной сети, получившую название KAN, на основании трудов советских академиков Андрея Колмогорова и Владимира Арнольда [3]. Это может значительно повлиять на развитие технологий ИИ в ближайшем будущем.

Все преимущества искусственного интеллекта в образовании свидетельствуют о его важной роли в повышении качества обучения. Однако, необходимо также учесть потенциальные проблемы и ограничения, связанные с использованием искусственного интеллекта, такие как конфиденциальность данных и этические аспекты.

Как этап эволюции интеллектуальных систем также рассматривается проект искусственной личности (ИЛ). Если традиционная компьютерная технология характеризуется формулой «данные+алгоритм», технология искусственного интеллекта – «знания+эвристика», то проект ИЛ задается формулой «смысл+понимание»[4]. Технически модель «смысла» может быть выполнена в виде программно-информационной оболочки над системой представления «знаний».

Таким образом, чтобы помочь учащимся научиться быть эффективными в мире, на который все большее влияние оказывает ИИ, требуется педагогика, которая вместо сосредоточения на преимущественных особенностях компьютеров (например, запоминание и вычисления), предоставляла возможности сотрудничества с распространенными инструментами ИИ в жизни, обучении и работе.

### Литература

1. Мяс Ф., Холмс У., Хуан Ж., Чжан Х. *Технологии искусственного интеллекта в образовании*. Москва: ИИТО ЮНЕСКО, 2020.
2. *AI в обучении: на что способны технологии уже сейчас?* // EduTech. 2022. № 4[49]. С. 1–60.
3. Магонин Д. *Современная электроника и технологии автоматизации [Электронный ресурс]*. Москва, 2024. Режим доступа: <https://www.cta.ru/news/soel/179928.html> Дата доступа: 30.07.2024.
4. Казаченок В. В. *Искусственный интеллект в образовании* // Матэматыка і фізіка. 2024. № 2. С. 23–26.

**ЭЛЕКТРОННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ****В.В. Казаченок**

Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, kazachenok@bsu.by

Сегодня затруднено однозначное понимание педагогической сущности информатизации образования, поскольку ее четко определенного понятийно-категориального аппарата в педагогической науке не сформировано. По мнению ученых информатизация образования должна выступать инструментом образования, а не заменой его сути.

Именно система образования должна сформулировать критерии образованности и мотивацию обучающихся получать соответствующее им образование. С динамизмом научно-технического прогресса в сфере массовой коммуникации и информатизации резко падает мотивация учащейся молодежи к обучению в традиционных формах. В то же время существующая практика использования дистанционного и электронного обучения не дает ожидаемого эффекта.

Определение баланса между традиционными и новыми образовательными технологиями – один из самых щекотливых вопросов, поскольку следует признать, что внедрение ИКТ в образование преследует, в том числе, коммерческие интересы и лоббируется крупными корпорациями [1]. Однако глобальных долгосрочных экспериментов, доказывающих положительное влияние использования ИКТ на качество образования, не проводилось.

В настоящее время термин «электронное обучение» вытесняет ранее широко используемые термины «смешанное обучение» и «дистанционное обучение». Связано это с тем, что массовое применение ИКТ в образовательных организациях приводит к размытию граней между дистанционным и традиционным обучением внутри образовательного учреждения. Интеграцию дистанционного и контактного способов организации учебного процесса на основе ИКТ и отражает термин «электронное обучение» [2].

Важная роль ИКТ в обучении подтверждается и тем, что ЮНЕСКО определило «медиаобразование как приоритетную область культурно-педагогического развития XXI века». Также с появлением технологий электронного обучения в оборот вошло новое словосочетание «электронная педагогика». Однако до формирования устойчивого содержания нового понятия дело пока не дошло.

Сегодня мы видим явное устаревание традиционных методов учебной работы, в частности лекций. Ведь при постоянном использовании в образовательном процессе ИКТ преподаватель перестает быть «источником учебной информации», а становится консультантом при проведении учебного занятия, поскольку любую учебную информацию обучающиеся могут найти и изучить самостоятельно.

Проблема информатизации образования уже не может рассматриваться лишь как инструментально технологическая, т.е. как проблема насыщения сферы образования средствами информатики, создания на их основе нового педагогического инструментария. Сегодня необходимо изменить сами цели образования, обеспечив принципиально новую его ориентацию на условия жизни и проблемы информационного сообщества.

Необходимо преодолеть проблемы технологизации, понять и принять то, что новое поколение учащихся иначе думает и воспринимает информацию. Получение информации – всего лишь небольшой этап на пути познания. Для получения знаний информацию еще нужно осмыслить. Осмысление полученной информации невозможно без серьезных умственных и душевных усилий.

В то же время дружелюбность современных информационных технологий создает ошибочное представление о легкости получения данных, провоцируя возникновение избыточных информационных потоков, как горизонтальных, так и вертикальных.

В качестве недостатков информатизации образования Галкин Д.В. выделяет проблему, названную автором, проблемой «эрозии знаний» [1]. Ученый подчеркивает, что доступность и обилие в информационной среде «полуфабрикатов» знаний приводит к «разрыву между знанием и опытом познания». Однако информатизация, делая образование более доступным, не должна его упрощать до уровня отсутствия умственной деятельности.

Математические системы – удобный и мощный инструмент, позволяющий решать корректно поставленные задачи. Вместе с тем ответственность за формулировку задач и перевод на язык системы полностью ложится на пользователя. Поэтому эффективное применение систем предполагает не только достаточно высокую математическую культуру пользователя, хорошее знание основ высшей математики, но и обладание опытом алгоритмической, программистской деятельности, основывающемся на использовании языков общения с компьютером, уверенном знании интерфейса программных систем.

Сегодня нередко возникают суждения, что вовлечение ИКТ в содержание естественно-научной и математической подготовки в определенной ситуации создает опасный прецедент падения уровня фундаментализации образования, поскольку эти процессы иногда начинают связываться с заманчивой возможностью быстрого получения результата в обход серьезного обоснования способа достижения цели.

Здесь следует исходить из того, что компьютерные математические системы не самоцель, в основе все равно сначала лежит математика, а уже потом технология – как вспомогательный, расширяющий и развивающий мировоззрение и компетенции элемент. Таким образом исключается фактор замещения процесса развития математического мышления на формальное применение компьютерных инструментов [1].

В настоящее время происходят преобразования в системе математического образования, которые связаны с изменениями в самом содержании математической деятельности. Этот процесс, с одной стороны, диктуется необходимостью приближения курса математики к современному уровню математической науки, а с другой – потребностью включения в него элементов приложений математики, отвечающих потребностям современной практики.

Следует ожидать, что в ближайшее время традиционная методика обучения математике в системе общего и профессионального образования во все большей степени будет опираться на ознакомление обучаемых с методами применения математических систем на регулярной основе как частью обязательного образования. Такое расширение роли инструментария математики и информатики в содержании математического образования может стать эффективным способом воплощения деятельностного подхода к обучению, расширения понимания роли математики как средства решения реальных практических задач.

В настоящее время превалирует пассивность усвоения информации, так как у создателей электронных ресурсов есть стремление сделать свой материал простым и нетрудоемким. В результате занятия перегружены демонстрациями (прослушиванием), то есть превращаются в зрительно-звуковую композицию.

Обучение должно стать инициативой не преподавателя, а учащихся. Пусть преподаватель вначале ставит перед учащимися проблему, затем учащиеся под его руководством ищут пути ее решения. Сегодняшняя же модель образования показывает учащимся, где и как именно они могут ошибиться, и старается исключить все ошибки учащихся еще до того, как они начали что-то делать. Однако ошибки – это исключительная возможность для обучения.

В настоящем мире уметь – важнее, чем знать. Ведь при возникновении проблемы обучающийся вернется к пройденной теме и изучит ее более глубоко.

Необходимо совместить возможности человека и технологии, тогда это позволит сделать образование эффективнее, а работу преподавателя более интерактивной и креативной.

#### Литература

1. *Современные проблемы информатизации образования*. Под ред. М.П. Лапчика. Омск: ОмГПУ, 2017.
2. Казаченок В. В. *Информатизация образования и обучение математике // Матэматыка і фізіка*. 2023. № 3. С. 3–8.



**МОДЕРНИЗАЦИЯ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОСНОВЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В НЕГО ЭЛЕМЕНТОВ ПРИЛОЖЕНИЙ****И. С. Козловская**

Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, kozlovskaja@bsu.by

В настоящее время возникает необходимость приближения курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» к современному уровню математической науки с одной стороны, а с другой – потребностью включения в него элементов приложений математики, отвечающих потребностям современной практики.

Дифференциальные уравнения в частных производных образуют раздел математики, который теснейшим образом связывает общую математическую теорию с приложениями — например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, астрономии. Сегодня они находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые, на первый взгляд, весьма далеки от математики — например, в медицине, биологии, криминалистике, социологии, генетике.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Прежде всего для курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» создан электронный учебно-методический комплекс на основе мультимедийных технологий, который депонирован в депозитарном фонде сигнальных документов и зарегистрирован как документ научно-методического обеспечения высшего образования. Библиографическое описание и аннотация этого комплекса размещены на сайте БГУ в разделе «Депонирование БГУ» и опубликованы в «Журнале Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. № 3». Копия документа размещена в Электронной библиотеке БГУ по адресу: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304443>. Комплекс включает учебные, научные и методические материалы, методику изучения дисциплины средствами информационно-коммуникационных технологий и обеспечивает условия для осуществления эффективной учебной деятельности.

Важную роль в модернизации курса сыграл образовательный портал. На образовательном портале на базе, организованной в БГУ LMS Moodle, создан курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», который содержит общий блок, блок для чтения лекций и блок для ведения лабораторных занятий для каждого преподавателя. Каждый блок прежде всего несет информативный характер, представляя данные о преподавателе и различных методах взаимосвязи со студентами, ссылки на программы и необходимую литературу, различные базы данных, а также позволяет сделать текущие объявления. Широко использованы коммуникационные возможности системы, такие как чат, форум. Во время экзаменационной сессии в полном объеме использовался такой элемент курса как тестирование. В целом этот образовательный ресурс позволил поддержать высокий уровень преподавания курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения».

Для более глубокого понимания студентами изучаемых ими классических математических тем и использованием их для решения практических задач используются современные средства компьютерной математики. Применение компьютерной математики существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования, так как представляет совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач, включая символьные преобразования и вычисления с высокой степенью визуализации всех видов вычислений.

Системы компьютерной математики позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существовании проблемы, оставляя в стороне технику классической математики, детали вычислительных методов и алгоритмических процедур, нюансы языков программирования и команд операционной системы. Такое расширение роли инструментария математики и информатики в содержании математического образования может стать эффективным способом воплощения деятельностного подхода к обучению, расширения понимания роли математики как средства решения реальных практических задач.

Важной задачей представляется разработка студентами дифференциальных моделей, описывающих различные физические, биологические и экономические процессы. Возможность проведения студентами численных экспериментов, визуализация результатов, разработка и реализация тех или иных моделей повышают интерес студентов к учебному курсу, способствуют более глубокому пониманию изучаемого ими материала, позволяет пройти все этапы математического моделирования от построения математической модели до вычислительного эксперимента и анализа результатов.

Курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», имеющий дело с постановкой, исследованием и решением краевых задач для уравнений в частных производных, дополнен лабораторными занятиями с использованием математического пакета Wolfram Mathematica, являющемся на данный момент, по-видимому, наиболее мощным средством в своем классе программ и сочетающий в себе развитые графические функции, удобные средства программирования, позволяющий создавать и использовать процедуры и функции пользователя, имеющий развитые возможности по созданию и использованию динамических массивов и переменных. Все это позволяет сосредоточиться не на программировании задач, а на ее физической и математической стороне. Пакет Wolfram Mathematica позволяет студентам для скорейшего усвоения теоретического материала использовать его графические возможности, кроме того предоставляется возможность эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных, а имеющийся специализированный инструментарий позволяет решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса. Инструментарий пакета Wolfram Mathematica включает в себя готовые средства решения задач диффузии, теплопроводности, электростатики, строительной механики и других областей математической физики.

В частности на лабораторных работах по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» [1] пакет Wolfram Mathematica используется для решения уравнений в частных производных методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций Plot и Manipulate при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка и визуализации решения с помощью функции Plot3D; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенциальных поверхностей электромагнитных полей. Использование пакета Wolfram Mathematica повышает значимость курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», как инструмента математического моделирования и демонстрирует современные принципы в программировании сложных научно-технических задач.

Таким образом, включение реальных прикладных задач в курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» и использование технических и программных средств позволило с одной стороны разнообразить формы и методы обучения, способствующие прежде всего, заинтересованности студентов в успешном освоении курса и высокому качеству получаемых знаний, с другой стороны, стимулировать студентов к проведению научных исследований, созданию инновационных проектов.

### Литература

1. Дайняк В. В., Козловская И. С., Чеб Е. С., Каркоцкий А. Г. *Практикум по дифференциальным уравнениям в частных производных: методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ*. Минск, БГУ. 2024.

## О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ»

Г.О. Кукрак<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, kukrak@bsu.by

Дисциплина «Основания геометрии» всегда занимала важное место в подготовке учителей математики. В рамках этой дисциплины студент знакомится с аксиоматическим методом, что является важным с точки зрения формирования у него математической культуры.

Для того, чтобы грамотно выстроить учебный процесс, учителю математики необходимо четко понимать взаимосвязи между различными понятиями и теоремами элементарной геометрии. Поэтому значительную часть курса целесообразно посвятить обсуждению построения части элементарной евклидовой геометрии на основе какой-либо системы аксиом (в целях экономии времени можно ограничиться частью планиметрии). Наиболее известной является система аксиом Гильберта, однако изложение элементарной геометрии на ее основе обладает определенными недостатками. Здесь приходится доказывать довольно много нетривиальных утверждений технического характера, которые переключают внимание студента с главного на различные детали. Поэтому в данной части курса имеет смысл взять за основу какую-либо модификацию гильбертовой системы. Хорошо подходит для целей курса система аксиом, предложенная в [1]. Здесь в группе аксиом порядка вместо отношения «лежать между» вводится понятие направления на прямой, вместо аксиом конгруэнтности Гильберта формулируются аксиомы движений, а вместо аксиом Архимеда и Кантора – геометрический аналог принципа Дедекинда. Строя изложение на основе этой системы аксиом, удастся довольно быстро прийти к содержательным теоремам школьного курса, при чем доказательства ряда теорем в идейном плане оказываются близкими к тем, которые даются в школьных учебниках. Тем не менее и здесь имеет смысл внести некоторые корректировки. Прежде всего целесообразно с самого начала считать прямую множеством точек и вместо особого отношения инцидентности рассматривать просто отношение принадлежности элемента множеству. Направления на прямой в этом случае можно трактовать как пару взаимно обратных бинарных отношений, удовлетворяющих аксиомам строгого линейного порядка, а также аксиоме, постулирующей отсутствие наибольшего и наименьшего элементов, и аксиоме о том, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости (эта аксиома эквивалентна аксиоме Паша). Эта идея, по сути, заложена в аксиомах, сформулированных в [1], однако в приведенных там формулировках не говорится, что любые две точки сравнимы (это оговаривается в преамбуле к данной группе аксиом). Целесообразно включить это условие в аксиомы в явном виде. Далее можно сократить количество аксиом движений. Взгляд на прямую как на множество точек позволяет исключить аксиому, постулирующую сохранение движениями отношения инцидентности. Кроме того, излишней является аксиома, постулирующая, что, если при движении точка и луч с началом в ней переходят в себя, то каждая точка луча неподвижна. Эта аксиома зависима от остальных (см. [1, с. 70]), поэтому имеет смысл сразу сформулировать ее как теорему.

После того как будет введена аксиома непрерывности и обосновано измерение отрезков (а это обоснование необходимо провести подробно, чтобы студент четко усвоил, какие свойства длины являются основными и лежащими в основе определения этого понятия) необходимо доказать теорему, характеризующую движения как изометрии. Её важно включить в курс потому, что в учебных пособиях, в которых не обсуждаются вопросы аксиоматики (или рассматриваются другие варианты аксиоматики), движения, как правило, определяются именно как изометрии.

Отдельный раздел курса традиционно посвящается геометрии Лобачевского. Здесь целесообразно хотя бы часть материала изложить синтетически, отталкиваясь непосредственно от аксиоматики этой геометрии, поскольку это позволит студенту лучше понять роль аксиомы параллельности и такого важного её эквивалента, как теорема о сумме углов треугольника, в евклидовой геометрии. Кроме того, синтетическое изложение более ярко продемонстрирует студенту факт существования различных геометрий. Некоторую сложность при таком изложении представляет обсуждение вариантов взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского. Здесь ряд

утверждений можно дать без доказательства. Чтобы сделать формулировки некоторых теорем более точными, вместо того, чтобы использовать термин «прямая  $l$  параллельна прямой  $m$  в данном направлении» (как поступают обычно) можно ввести определение параллельности для направленных прямых.

Обсуждение проблемы непротиворечивости имеет смысл начать с рассмотрения какой-нибудь противоречивой системы аксиом. Интересный пример на эту тему можно найти в [2]. Что касается проблемы категоричности, то для лучшего понимания сути дела можно показать, что система, состоящая из аксиом принадлежности и аксиомы параллельности, допускает модель из четырех точек и шести прямых.

Практические и семинарские занятия по данной дисциплине можно посвятить обсуждению различных вариантов доказательств некоторых теорем элементарной геометрии. В частности, имеет смысл обратить внимание студентов на эквивалентность теоремы о том, что около треугольника можно описать окружность, аксиоме параллельности. В школьных учебниках тот факт, что эта теорема доказывается с помощью данной аксиомы, никак не обсуждается, однако учителю математики полезно об этом знать.

В заключение остается выразить сожаление о том, что в принятом в 2023 году учебном плане БГУ специальности «Математика», выпускникам которой будет присваиваться педагогическая квалификация, не нашлось места дисциплине «Основания геометрии».

### Литература

1. Погорелов А. В. *Основания геометрии*. М.: Наука, 1968
2. Болтянский В. Г. *Элементарная геометрия*. М.: Просвещение, 1985.

## О КОЭФФИЦИЕНТАХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ МЕТОДА ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОМБИНАЦИЙ

Р.М. Мавлявиев<sup>1</sup>, И.Б. Гарипов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия,  
{mavly72, ilnur\_garipov}@mail.com

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $x_k = x_k(t)$ ,  $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ . Как известно [1], для решения системы (1) методом Эйлера составляется характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

где  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $E$  – единичная матрица.

Теперь для решения системы (1) применим к ней метод интегрируемых комбинаций. Для этого запишем систему (1) в симметричной форме

$$dt = \frac{dx_1}{\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j} = \dots = \frac{dx_n}{\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j}. \quad (3)$$

Применим к системе (3) свойство равных отношений

$$dt = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i}{\sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)}.$$

Числитель запишем как дифференциал линейной комбинации. В знаменателе перегруппируем слагаемые, вынесем множители  $x_j$  за скобки

$$dt = \frac{d \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)}{\sum_{j=1}^n \left( x_j \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{ij} \right)}. \quad (4)$$

Для непосредственного интегрирования соотношения (4) введем коэффициент  $\mu$  так, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{ij} = \mu \alpha_i. \quad (5)$$

Система (5) имеет ненулевые решения если

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - k & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что  $B \equiv A^T - \lambda E$ , где  $A^T$  является матрицей транспонированной по отношению к  $A$ . Таким образом, все значения  $\mu$  совпадают с корнями  $\lambda$  характеристического уравнения (2). Подставив конкретные значения  $\alpha_i$  в соотношение (4) при каждом конкретном значении  $\mu$ , можно его непосредственно интегрировать и получить первые интегралы.

#### Литература

1. Степанов В. В. *Курс дифференциальных уравнений*. М.: URSS, 2024.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СКМ MAPLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И.В. Марченко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова, Космонавтов, 1, 212022 Могилев, Беларусь, marchenko@msu.by

**Введение.** Системы компьютерной математики (СКМ) в настоящее время широко используются при проведении различных математических и прикладных исследований. Они выступают не только как средство проведения технических расчетов, но и позволяют проверять гипотезы, проводить эксперименты, получать новые результаты. В связи с этим современный математик должен владеть инструментарием какой-либо СКМ и уметь применять его при решении задач своей предметной области.

**Основная часть.** Говоря о математиках, следует помнить, что большая часть их – это учителя школ, которые не просто учат детей своему предмету, но и готовят фундамент для подготовки специалистов самых разных профессий, обеспечивают основу для технического развития нашей страны. Соответственно уровень их подготовки во многом определяет и возможности этого развития. В то же время, переход на четырехлетние учебные планы привел к исключению некоторых учебных

дисциплин или их разделов (например, теория функций, функции комплексной переменной) и сокращению учебных часов по остальным. Поэтому введение в качестве отдельной учебной дисциплины СКМ нецелесообразно.

С 2023/2024 учебного года в МГУ имени А.А. Кулешова для специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование (Математика и информатика) проводятся интегрированные учебные занятия с использованием СКМ Maple (версия 5.4). С этой целью разработаны соответствующие задания, выполнение которых в обязательном порядке предполагает применение средств СКМ. Примеры таких заданий приведены в [1].

Как показала практика, внедрение СКМ в учебный процесс позволяет решать следующие задачи:

- изучение возможностей и инструментария СКМ;
- применение СКМ для решения математических задач;
- визуализация математических понятий и процесса решения задач;
- углубление знаний и представлений об изучаемых математических объектах за счет включения задач качественного и прикладного характера;
- обеспечение междисциплинарных связей.

Следует отметить, что большинство студентов проявило интерес к такого рода заданиям, положительно отнеслось к их включению в задания для самостоятельного выполнения и индивидуальные задания.

### Литература

1. Марченко И. В. *Использование СКМ MAPLE при изучении кратных интегралов* // Матер. XVI междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам». Мозырь : МГПУ имени И. П. Шамякина, 2024. С. 77-78.

## СТРУКТУРА И ОБУЧАЮЩИЕ СРЕДСТВА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.П. Мателенок, В.С. Вакульчик, Т.И. Завистовская

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,  
Блохина, 30, 211440 Новополоцк, Витебская область, Беларусь, a.kozlov@psu.by

**Введение.** Учебно-методические комплексы (УМК) по различным дисциплинам изданы в форме отдельных методических изданий на твердых и электронных носителях практически каждым учреждением высшего образования Беларуси. Вместе с тем, современная образовательная система действует в условиях перехода по большинству технических специальностей на сжатые сроки обучения. Данный факт привел к сокращению часов на изучение высшей математики на выделенных специальностях. Это является одной из причин, потребовавших создания УМК нового поколения на методологическом и практическом уровнях.

**Основная часть.** Основные концептуальные элементы названного УМК представлены нами в [1], а также рисунке 1.

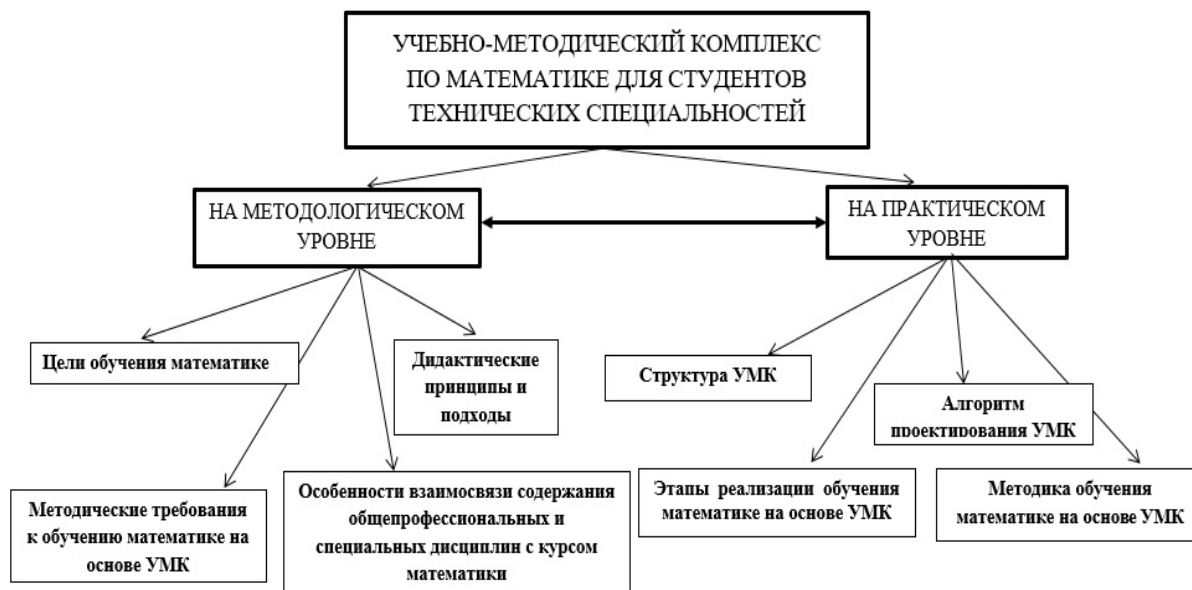


Рисунок 1. — Графическая схема проектирования УМК нового поколения по математике

Научно-теоретический анализ проблемы разработки и реализации УМК позволил определить следующие пути совершенствования существующих УМК по математике для студентов технических: 1) изменение содержательного наполнения компонентов УМК по математике [2]; 2) усиление междисциплинарных связей математики с естественно-научными, общепрофессиональными и специальными дисциплинами [3]; 3) разработка специальных средств для обучения студентов структурированию, систематизации, логической организации математической информации ([1], [4] и др.).

Отдельное внимание в созданном УМК уделяется разработке специальных обучающих средств: графические схемы, информационные таблицы, частные алгоритмы решения задач, приложения систем компьютерной алгебры., алгоритмические и эвристические предписания. Они позволяют повысить эффективность усвоения математической информации и реализовать когнитивно-визуальный подход [5] в обучении математике, принципы наглядности, пролонгации, развивающей деятельности.

**Заключение.** Экспериментальные исследования показали, что созданный УМК нового поколения позволяет формировать совокупность условий обучения, которые помогают студентам овладеть обобщенными приемами умственной деятельности алгоритмического, репродуктивного, преобразующе-воспроизводящего характера, базовыми и прикладными математическими знаниями и умениями, способствует повышению эффективности обучения математике студентов технических специальностей

#### Литература

1. Мателенок А. П. *Теоретико-методологические основы проектирования и реализации учебно-методического комплекса нового поколения по математике*. Новополоцк : Учреждение образования "Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, 2023.
2. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *Междисциплинарная интеграция как основа обучения математике студентов технических специальностей* // Изв. РГПУ. 2022. № 206. С. 167–183.
3. Мателенок А. П., Вакульчик В. С. *Эффективные формы обучения химиков-технологов: интегрированный модуль* // Инженерное образование. 2023. № 34.
4. Мателенок А. П., Вакульчик В. С., Бураченко И. Б. *Цифровые образовательные технологии в вузе: ди-станциионное обучение, с-март-курсы*. Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2023. С. 183–187.
5. Бровка Н. В. *Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов*. Минск : БГУ, 2009.

**О РУССКОМ ЯЗЫКЕ И ИСТИННЫХ ОСНОВАХ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И МАТЕМАТИКИ****Н.Я. Радыно**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
mir@bsu.by

Каждый, изучающий математику сталкивается со словесными высказываниями, формулировками, построениями логических цепочек утверждений, предположениями. В основе любой деятельности человека лежит речь — способ передачи мыслей. Слова же являются «кирпичиками» мысли, слова несут смыслы. Когда слова искажены, то искажаются и смыслы. Если смыслы искажены или неточны, то страдает вся научная картина. Сейчас мы и наблюдаем такое искажение научной мысли. Поэтому важно понимать, как формируются кирпичики мысли или слова, слова русского языка, языка особенного. Как говорил выдающийся лингвист 19-ого века П.А.Лукашевич: «Нам не извинительно не ведать свойств своего языка». Что же это за свойства? Во-первых, как считает П.А.Лукашевич, русский язык — древнейший язык Человечества. Во-вторых, русский язык — единственный, язык, не подвергшийся изменению, или как пишет П.А.Лукашевич не подвергшийся чаромутью [1] (чары — буквы, мутье — мутить, термин П.А.Лукашевича). В третьих, наша Родная Речь является образной. Это означает следующее: слова формируются из слогов, слоги из букв (букв), а буквы имеют образы. Далее, слоги как совокупность букв формируют более сложные образы, сами слова формируют ещё более сложные образы и, соответственно, смыслы. В книге Л.Н.Толстого [2] приводится азбука, состоящая из 36 букв-образов. Ещё ранее, славянские народы пользовались древлесловенской буквицей, состоящей из 49 букв, несущих 49 образов. Это и есть удивительные свойства нашей Родной Речи.

При помощи нашей Родной Речи мы можем извлекать смыслы слов из самих слов. Приведём простейшие примеры удивительных свойств нашей Речи. Проанализируем следующие простые слова: он — о (он) н (наш); она — о (он) н (наш) а (исток); мы — м (мыслящие) ы (едино); жизнь — жи (живое) знь (знание); знак — зна (знание) к (какое-то); автор — а (азы) втор (вторит), вещество — вещь (вещей) е (есть) ство (ствол); воздух — во (возле) з (земли) дух (дух), призма — при з (земле) м (мыслимый) а (исток). Можно сделать вывод, что наша Родная Речь наиболее полно и с минимальными искажениями описывает Мироздание. По-другому, можно сказать, что русский язык — язык учёных, изобретателей.

А что же с научной терминологией? Нас уверяют, что научные понятия либо латинского, либо греческого происхождения. Авторы же книги [5] доказывают, что латынь — искусственный язык, созданный на основе церковно-славянского языка.

В своей работе, я хотел указать на те математические понятия, которые прекрасно читаются по-русски. Нет сомнения, что эти понятия были изобретены людьми, которые говорили на языке, который близок к современным славянским языкам, прежде всего, русскому, белорусскому, украинскому.

Итак, слово число раскладывается на два слога - чи (чин) сло (слово). Значит, число — слово, подчинённое некоторому порядку. Особенно ярко порядок демонстрируется в книге Магницкого «Арифметика» [3], в которой используется славянское обозначение чисел, числа обозначают буквами. Можно назвать такой способ обозначения чисел **светлым способом**. Смотри рисунок.

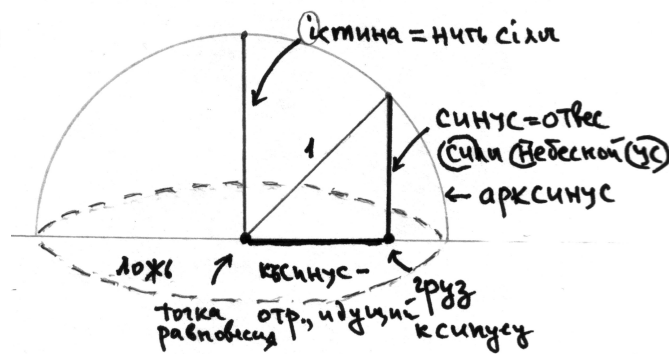
Существует тёмный способ записи чисел или арапский. Согласно толкового словаря Владимира Ивановича Даля [4], арапский означает тёмный, арап, чернотелый человек.

Арапские числа — это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Итак, можно сказать, что метод обозначения чисел при помощи букв азбуки именуется светлым способом. **Арапские** числа — это числа, записанные **тёмным способом**. Например, светлый способ записи числа 123 есть р҃гг, а 123 — это тёмный (арапский) способ записи числа.

Происхождение написания арапских чисел заключено в рукописной форме написания букв русского языка. А именно, в написании первых букв в словах: единица, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять.



ā	ḡ	ḡ	ḡ	ē	ḡ	ḡ	ñ	ā
аз	веди	глазъ	добръ	есть	зелъ	земля	иже	фитя
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ī	ḡ	ā	ḡ	ñ	ḡ	ō	ḡ	č
и	како	любви	мыслете	наши	кци	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ḡ	ē	ḡ	ḡ	ḡ	ḡ	ḡ	ō	č
ры	слово	твёрдо	ук	фррт	зр	пци	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900



Обратимся к подсказкам нашей Родной Речи, читаем «Арифметику» Магницкого. Этот автор использует слово глебус (устаревшее слово) = глобус (современное слово, изменённое), глебус (глеба, ус) — земля, покрытая усами. А что же означает слово **синус**? Цитируем В.И.Даля: «Синус матмат. отвес с конца дуги на луч (радиус)». **Синус** — это **отвес**! Синус — си (силы) н (небесной) ус. Синус — это силы небесной ус. Косинус — отрезок, идущий к синусу, то есть косинус. Арксинус — арка (дуга) синуса, измеряемая в радианах (долях от числа  $2\pi$ ).

Далее, раскрывая математические секреты при помощи русского языка можно установить также, что название числа  $\pi = 3, 14159 \dots$  происходит от русского слова **питать**, а название числа  $e = 2, 71828 \dots$  от русского слова **есть**, е (есть), с (слово), т (твёрдое), ь (роста), e — есть слово твёрдое роста, мнимая единица **i** происходит от слова **истина=нить силы**, отвесная линия, проходящая через точку равновесия. **Ложь** — плоскость (уровень воды), которая перпендикулярна отвесной нити, то есть **истине**. См.рис. Заметим, что в «Началах Евклида» речь идёт, именно, об **отвесных линиях**, а не произвольных линиях перпендикулярных некоторой плоскости.

В процессе обучения студентов следует иметь ввиду, что Родную Речь, математику и естествознание следует воспринимать как единое целое. Разделение указанных предметов сводит на нет глубину восприятия нашего Мироздания, поскольку наш язык повторяет смысловую структуру действительности.

### Литература

1. Лукашевич П. А. *Чаромутие, или священный язык магов, волхвов и жрецов, открытый Платоном Лукашевичем*. Петрьгородъ, 1846.
2. Толстой Л. Н. *Новая азбука графа Л.Н.Толстаго*. Москва, 1875.
3. Магницкий Л. Ф. *Арифметика*. Москва, 1703.
4. Даль В. И. *Толковый словарь живаго великорускаго языка*. Т.1-4, издание книгопродавца-типографа М.О.Вольфа, Москва, С.-Петербург, 1880.
5. Носовский Г. В., Фоменко А. Т., Фоменко Т. Н. *Русские корни «древней» латыни*. Москва: АСТ, 2012.

## О МЕТОДАХ НАХОЖДЕНИЯ ТРАНСФОРМИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ

Г.П. Размыслович<sup>1</sup>, А.В. Филипцов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,  
{Razmysl,Filiptsov}@bsu.by

Во многих задачах линейной алгебры для подобных матриц  $A, B \in \mathbb{C}$  необходимо найти матрицу, трансформирующую матрицу  $A$  в матрицу  $B$ , то есть невырожденную матрицу  $S$  такую, что  $B = S^{-1}AS$ . Среди методов построения такой матрицы особенно важны методы, не требующие знания собственных значений матриц  $A$  и  $B$ . Отметим лишь два метода решения поставленной задачи.

1) Из определения трансформирующей матрицы следует, что матрица  $S$  является решением матричного уравнения  $AS = SB$ . Это уравнение равносильно системе  $n^2$  линейных однородных

уравнений относительно  $n^2$  элементов матрицы  $S$ . Отметим, что эта система имеет бесконечное множество решений. Запишем эту систему в виде матричного уравнения

$$(A \otimes E_n - E_n \otimes B^T) \bar{S} = O_{n^2,1}, \quad (1)$$

где  $E_n$  – единичная матрица порядка  $n$ ,  $O_{n^2,1}$  – нулевой столбец, состоящий из  $n^2$  элементов,  $A \otimes E_n$ ,  $E_n \otimes B^T$  – кронекеровские произведения соответствующих матриц,  $\bar{S}$  – столбец, полученный в результате последовательной записи в один столбец транспонированных строк матрицы  $S$ .

Матрица  $A \otimes E_n - E_n \otimes B^T$  системы (1) имеет блочное разбиение

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1}E_n - B^T & a_{1,2}E_n & \dots & a_{1,n}E_n \\ \hline a_{2,1}E_n & a_{2,2}E_n - B^T & \dots & a_{2,n}E_n \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n,1}E_n & a_{n,2}E_n & \dots & a_{n,n}E_n - B^T \end{array} \right].$$

Применяя к этой матрице блочные элементарные преобразования, при которых одна блочная строка умножается слева на подходящую матрицу  $n$ -го порядка и прибавляется к другой блочной строке, получим матрицу с нулевой блочной строкой, так как характеристические многочлены матриц  $A$  и  $B^T$  равны. В результате некоторого числа преобразований получим матрицу вида  $[E_r \mid D]$ , где  $r = \text{rank}(A \otimes E_n - E_n \otimes B^T)$ , откуда можно получить все решения уравнения (1).

2) Так матрицы  $A$  и  $B$  подобны, то их характеристические матрицы  $A - \lambda E_n$  и  $B - \lambda E_n$  эквивалентны. Следовательно, существуют унимодулярные матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  такие, что

$$B - \lambda E_n = U(\lambda)(A - \lambda E_n)V(\lambda).$$

Найдя матрицу  $V(\lambda)$  с помощью элементарных преобразований матриц  $A - \lambda E_n$  и  $B - \lambda E_n$  и представив ее в виде матричного многочлена, вычислим правое значение этого многочлена при замене  $\lambda$  на матрицу  $B$ . Полученная матрица  $V(B)$  является матрицей, трансформирующей матрицу  $A$  в матрицу  $B$ .

#### Литература

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1988.
2. Размыслович Г. П., Филипов А. В. *Геометрия и алгебра: учебное пособие*. Минск: РИВШ, 2024.
3. Размыслович Г. П., Ширяев В. М., Филипов А. В. *Геометрия и алгебра. Практикум*. Минск: Вышэйшая школа, 2018.

### О ПОДГОТОВКЕ ДАННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРОБЛЕМНОГО ПРОЕКТНОГО ИЛИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ОБУЧЕНИЯ В КУРСАХ ДИСЦИПЛИН, СВЯЗАННЫХ С ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКОЙ

Д.В. Филимонов<sup>1</sup>, Н.В. Бровка<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, dzfilimonau@gmail.com, n\_br@mail.ru

При обучении студентов первостепенной является задача реализации профессиональной направленности обучения, посредством реализации междисциплинарных связей. В связи с этим при подготовке студентов ИТ-специальностей, в особенности на математических факультетах, перед преподавателем стоят задачи выявления и реализации таких связей в содержании, формах и методах обучения. Обучение на реальных данных является одним из перспективных направлений трансформации содержания обучения, и эта тенденция подкрепляется потенциалом более широкого внедрения проектной модели. Получить данные, собранные при исследованиях в различных направлениях, благодаря развитию в первую очередь машинного обучения стало гораздо проще, так как в свободном доступе существует большое число коллекций данных, которые может анализировать каждый – т.н. датасеты. Тем не менее, не для всех областей знания – в том числе и

для дисциплин, связанных с дискретной математикой – можно найти коллекции, работа с которыми сама не станет задачей, отдельной от основного курса. Также, за счет свободного доступа датасетов, со скептицизмом стоит относиться к тому, что каждый студент будет выполнять поставленную задачу без поиска чужих решений – в задачах моделирования на основе дискретных данных, требующих глубокого понимания предшествующего материала, такие вопросы возникают даже для обычных заданий.

При обучении студентов ИТ-направлений дисциплинам, связанным с моделированием явлений различной природы (например, таких, которые можно свести к решению задач на графах), одним из вариантов решения описанной проблемы является генерация случайных наборов для дальнейшего анализа. Хотя такой подход и позволяет рассмотреть общие случаи и сэкономить время на подготовку материалов преподавателю, постановка может потерять в точности входных данных: даже если исследуемые с помощью изучаемых моделей процессы в действительности слишком сложны, чтобы быть предложенными в рамках курса, их сведение к сгенерированным данным может серьезно повлиять на содержательность (при рассмотрении конкретных алгоритмов) предложенных задач.

В качестве примера такой модели можно рассмотреть граф (необязательно полный), для которого требуется решить задачу коммивояжера – постановки которой, в свою очередь, помимо очевидного приложения к логистике, возникают в теории расписаний, структурной химии, синтезе логических элементов и многих других областях, связанных с дискретной математикой.

Генерация узлов графа, которая (в зависимости от используемых с этой целью алгоритмов) обычно производит равномерно или нормально распределенные пары координат, приводит к получению моделей, отвлеченных от реальных задач указанных областей – что лишает проектную и/или исследовательскую деятельность некоторой степени приближенности к реальным явлениям.

В более широком смысле явления, моделями которых являются графы, рассматриваются в задачах метрической геометрии, где множества точек изучаются исходя из заданных между парами расстояний. В свою очередь, расположение точек как случайных величин исследуется пространственной статистикой и теорией случайных процессов, одним из замечательных результатов которой является теорема Пальма-Хинчина [1], утверждающая, что комбинирование достаточно большого числа случайных процессов порождает процесс Пуассона (иными словами, точки на плоскости как пары случайных величин удовлетворяют соответствующему закону распределения).

Примерами естественных явлений, подчиняющихся процессу Пуассона, являются в том числе ареалы обитания и маршруты миграции [2], а применительно к задачам прикладного общественно значимого характера – модели организации массового обслуживания (например, оптимального расположения банковских терминалов и отделений экстренных служб [3]), что проистекает из смысла распределения Пуассона как среднего количества событий (обращений, возникновения очередей), наблюдающихся в течение промежутка времени. Таким образом, стоит говорить именно о моделировании значимых явлений, описываемых совершенно иным законом распределения, нежели те, которые по умолчанию предлагает программное обеспечение.

Это означает, что первичная генерация узлов, если выбранная среда не поддерживает распределение Пуассона как стандартный инструмент, может быть сведена к использованию вспомогательного кода [4], а дальнейшее построение графа может следовать следующему алгоритму:

1. Задать желаемую плотность графа;
2. Построить полный граф с помощью триангуляции Делоне;
3. Вычислить количество ребер, которое нужно удалить из графа, чтобы достичь желаемой плотности;
4. Использовать алгоритм поиска в глубину для выявления ребер-мостов (удаление которых запрещено и изолирует подграфы) и циклов;
5. В случае выявления цикла – удалять одно из его ребер;

6. Повторять поиск в глубину и удаление до тех пор, пока желаемая плотность не достигнута или граф не стал лесом.

Из описанных шагов алгоритма видно, что и сама задача генерации подобных входных данных может быть предложена непосредственно слушателям курса, так как для ее решения требуются алгоритмы, изучение которых (за исключением генерации случайных величин Пуассона) предшествует знакомству с классом co-NP. Более того, задача о генерации графа может быть использована для прогнозирования успешности обучения (на основе данных мониторинга), а предложенный способ случайного расположения вершин, помимо возможности предоставлять сколь угодно вариативные индивидуальные задания, позволит покрыть максимальное количество случаев для рассмотрения.

#### Литература

1. Heyman D. P., Sobel M. J. *Stochastic Models in Operations Research: Stochastic Processes and Operating Characteristics*. Dover Publications: Dover Books on Computer Science Series, 2004.
2. Warton D., Shepherd L. *Poisson point process models* // The Annals of Applied Statistics. 2010. No 4. P. 1383-1402.
3. Lee CH., Shih CY., Chen YS. *Stochastic geometry based models for modeling cellular networks in urban areas* // Wireless Networks. 2013. No 19. P. 1063–1072.
4. Keeler P. *Simulating Poisson random variables: Direct method* [Электронный ресурс]. – Адрес доступа: <https://hpaulkeeler.com/simulating-poisson-random-variables-direct-method/>. – Дата доступа: 07.09.2024.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Е.С. Чеб<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет,  
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, cheb@bsu.by

Развитие компьютерных технологий в образовании позволяет перейти на новый уровень преподавания такой фундаментальной дисциплины как функциональный анализ. Применение компьютерной математики дает возможность преподавателю наиболее эффективно построить образовательный процесс и углубить знания по прикладным аспектам функционального анализа, а студенту позволяет увидеть элементы научных исследований. Возможность проведения студентами самостоятельных численных расчетов, визуализации их результатов повышает интерес студентов к практической составляющей функционального анализа и, как следствие, интерес к учебному процессу.

На факультете прикладной математики и информатики курс «Функциональный анализ» читается студентам специальности «Компьютерная безопасность» по учебной программе, предусматривающей проведение лабораторных занятий. С этой целью разработаны задания по лабораторным работам, часть которых студенты выполняют средствами компьютерной математики. В процессе рассмотрения темы при этом все равно подробно разбираются основные понятия, касающиеся темы: определения, теоремы и т.д. Вместе с тем, основной акцент делается на практические приложения.

В качестве базового пакета на кафедре для расчетов выбран пакет Mathematica, который в настоящее время постоянно обновляется и его возможности расширяются [1].

Рассмотрим типовую задачу из лабораторных работ по теме «Гильбертовы пространства и аппроксимация» [2].

**Задача.** В гильбертовом пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$  аппроксимировать функцию  $f(t)$  тригонометрическим рядом Фурье и исследовать точечную сходимость ряда Фурье в точке  $t = 0$ , сходимость ряда в средне квадратичном,

$$f(t) = \begin{cases} t + 1, & -\pi \leq t \leq 0; \\ -1, & 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

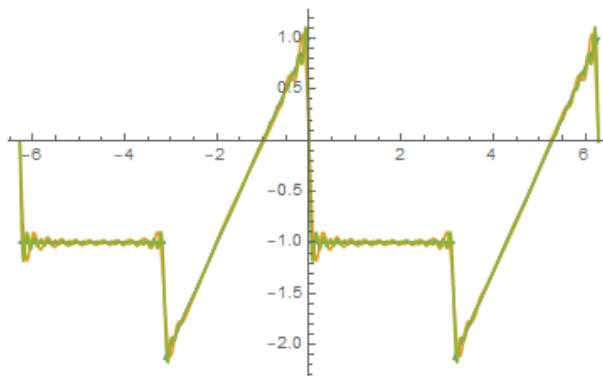


Рис. 1. График функции  $f(t)$  и её частных сумм  $S_N(t)$  при  $N = 20, 40$

### Алгоритм решения задачи

1. Сформулировать в системе Mathematica заданную функцию и продолжить ее периодически на промежутке  $[-2\pi, 2\pi]$ .
2. Вычислить коэффициенты Фурье  $a_0, a_k, b_k, k = 1, \dots, N$ , разложения  $f(t)$  по тригонометрическому базису.
3. Найти значения частных сумм  $S_N(t)$  при заданных  $N = 20, 40$  и проверить выполнение неравенства Парсеваля.
4. Построить графики функций  $f(t)$  и  $S_N(t), t \in [-2\pi, 2\pi], N = 20, 40$ , изучить сходимость ряда Фурье в точке  $t = 0$ , рассчитать при заданном  $N$  средне квадратичное отклонение между  $f(t)$  и  $S_N(t)$ .

### Реализация алгоритма в пакете Mathematica

(\*Function  $f(t)$ \*)

```
f[t_]:=Piecewise[{{t+1, -Pi<=t<=0}, {-1, 0<t<=Pi}}]
```

(\*Periodic continuation of the function for the entire numeric line\*)

```
fExtended[t_]:=f[Mod[t, 2Pi, -Pi]]
```

(\*Calculation of Fourier coefficients for decomposition\*)

```
a0 = (1/Pi)Integrate[fExtended[t], {t, -Pi, Pi}]
```

```
ak[k_]:= (1/Pi)Integrate[fExtended[t]Cos[kt], {t, -Pi, Pi}]
```

```
bk[k_]:= (1/Pi)Integrate[fExtended[t]Sin[kt], {t, -Pi, Pi}]
```

(\*Constructing a partial sum of the Fourier series for a given N\*)

```
SN[t_, N_]:=a0/2 + Sum[ak[k]Cos[kt] + bk[k]Sin[kt], {k, 1, N}]
```

(\*The values of the sum of the Fourier series at N=20 and N=40\*)

```
S20 = SN[t, 20];
```

```
S40 = SN[t, 40];
```

(\*Checking Parseval inequality\*)

```
ck = ak[k]^2 + bk[k]^2;
```

```
lhs = 1/PiIntegrate[fExtended[t]^2, {t, -Pi, Pi};
```

```
rhs = a0^2/2 + Sum[ck, {k, 1, Infinity};
```

```
lhs==rhs
```

```
True
```

(\*Plotting  $f(t)$  and  $S_N$  on the interval  $[-2\pi, 2\pi]$ )

```
Plot[{fExtended[t], S20, S40}, {t, -2Pi, 2Pi}, PlotLegends->{"f(t)", "S20(t)", "S40(t)"}, PlotRange->All]
```

(\*Calculation of the standard deviation for given N\*)

```
rmse[N_]:=Sqrt[NIntegrate[(fExtended[t] - SN[t, N])^2, {t, -Pi, Pi}]/(2Pi)]
```

(\*The standard deviation for N=20 and N=40)

```
rmse20 = rmse[20]
```

```
rmse40 = rmse[40]
```

```
0.11328
```

```
0.0810149
```

```
(*Investigation of the convergence of the Fourier series at the point  $t = 0$ )
```

```
fAt0 = fExtended[0]
```

```
S20At0 = N[ReplaceAll[S20, t->0]]
```

```
S40At0 = N[ReplaceAll[S40, t->0]]
```

```
1
```

```
-0.0159023
```

```
-0.00795609
```

Данный пример показывает, как в пакете Mathematica можно решить предложенную задачу и графически проиллюстрировать поведение частных сумм  $S_N(t)$  ряда Фурье при разных  $N$  вблизи разрыва входной функции  $f(t)$ .

#### Литература

1. Дьяконов В. *Mathematica: учеб. курс*. М: Питер, 2001.
2. Дайняк В. В., Чеб Е. С. *Гильбертовы пространства и аппроксимация*. Мн.: БГУ, 2020.

Научное издание

**XIV БЕЛОРУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,  
ПОСВЯЩЕННАЯ 65-ЛЕТИЮ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ**

**Материалы Международной научной конференции**

В трех частях

*Часть 1*

С о с т а в и т е л ь:

**Бусел Татьяна Сергеевна**

*Материалы публикуются в авторской редакции*

Компьютерная верстка *И. В. Близнец*

Подписано в печать 23.10.2024. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 18,6. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 80 экз. Заказ 218.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».  
Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013, № 2/196 от 05.04.2017.  
Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск.