ОТЗЫВ

научного руководителя на кандидатскую диссертацию

Засимович Елены Васильевны

«Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений»

Несмотря на то, что метрической теории диофантовых приближений на кривых скоро исполняется 100 лет (А.Я. Хинчин, 1926), ответы на важные и естественные вопросы в этой теории так и не получены. Первым глубоким результатом метрической теории диофантовых приближений стала теорема Хинчина, доказанная в 1924 году.

Пусть функция $\Psi(x), x > 0$, монотонно убывает на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Обозначим через μA меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, а через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ — множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{n-1}\Psi(H) \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P_n(x)$ степени $\deg P_n = 1$ и высоты H, равной максимальному по модулю коэффициенту $P_n(x)$. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, \text{если ряд } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) \text{ сходится}, \\ \mu I, \text{если ряд } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) \text{ расходится}. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема Хинчина была обобщена на многочлены произвольной степени в работах К. Малера, И. Кубилюса, В. Шмидта, В. Фолькмана. Полный аналог равенства (2) при $\Psi(x) = x^{-v}, v > 1$, получил В.Г. Спринджук, а для произвольной монотонной функции $\Psi(x)$ и любого $n > 1$ равенство (2) доказали В.И. Берник в 1989 и В.В. Бересневич в 1999. Затем неравенство (1) и равенство (2) обобщались на поле комплексных чисел (Д.В. Васильев), p-адических чисел (В.И. Берник, В.В. Бересневич, Э.И. Ковалевская), на невырожденные кривые и поверхности (В.В. Бересневич, В.И. Берник, Д. Клейнбок и Г. Маргулис). Несмотря на обилие результатов и методов, вопрос о мере множества $B_n(Q)$ решений неравенства

$$|P(x)| < Q^{-w}, w > n,$$

в классе полиномов

$$\mathcal{P}_n(w, Q) = \{P(t) \in Z[t], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}$$

оставался длительное время открытым. Н.В. Бударина нашла оценку сверху

$$\mu B_n(Q) < c_1(n)Q^{-\frac{w-n}{n}}.$$

Основной результат диссертации — доказательство неравенства

$$\mu B_n(Q) < c_2(n)Q^{-\frac{w-1}{n}}. \tag{3}$$

Эта сильная и глубокая теорема имеет важные значения в приложениях метрической теории диофантовых приближений и при проектировании антенных устройств. По этой задаче в последние годы проведено несколько конференций и опубликовано несколько работ.

Интересны и важны другие результаты диссертации, однако уже неравенство (3) даёт основание считать, что Елена Васильевна Засимович заслуживает степени кандидата физико-математических наук.

Я, Берник Василий Иванович, выражаю согласие на размещение отзыва на диссертацию Засимович Е.В. на официальном сайте Института математики НАН Беларуси в глобальной компьютерной сети Интернет.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, В.И. Берник
профессор