

О Т З Ы В

официального оппонента о диссертационной работе

Засимович Елены Васильевны

«Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений», представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации

Метрическая теория диофантовых приближений относится к активно развивающемуся разделу теории чисел, который изучает не только аппроксимационные свойства элементов числовых множеств сложной структуры с помощью мер Лебега, Хаара и размерности Хаусдорфа, но и, главным образом, характеризуется получением оценок этих мер для множеств чисел, обладающих заданными условиями приближений.

С момента ее зарождения в середине 19-го века (Л. Дирихле и Ж. Лиувилль, затем Э. Борель и А. Хинчин) она привлекала к себе внимание математиков различных специальностей. Дальнейшее развитие этой области связано с решением проблемы К. Малера и ее обобщением, классификацией трансцендентных чисел и исследованиями совместных диофантовых приближений. В процессе работы над задачами появлялись новые методы, позволяющие обобщать классические результаты и получать принципиально новые. Достаточно подробно историю развития задач, имена математиков, внесших значительный вклад в их решение, можно проследить в аналитическом обзоре диссертации, изложенном в первой главе.

Следует отметить, что результаты метрической теории диофантовых приближений используются не только в теоретических исследованиях. Они находят также широкое практическое применение, например, в математической физике при исследовании некорректных граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных (проблема малых знаменателей), а также при решении проблем в более технических вопросах, например, в задачах устранения помех в беспроводной связи (монография *Number Theory Meets Wireless Communications* В Бересневича и еще трех авторов, опубликованная в 2020 г. издательством Springer).

В диссертации Засимович Е.В. доказан ряд теорем, отражающих аппроксимационные свойства многочленов и алгебраических чисел, которые являются результатом естественного продолжения важных исследований в области метрической теории диофантовых приближений, что объясняет их актуальность и практическую значимость.

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки

Предметная область диссертационного исследования связана с получением эффективных оценок мер для множеств действительных и комплексных чисел с некоторыми ограничениями и для множеств решений диофантовых неравенств определенного (специального, как сказано в диссертации) вида. При доказательстве теорем используются методы аналитической теории чисел, диофантова анализа и геометрии чисел. Более конкретно, в диссертации изложены результаты, связанные с обобщениями проблемы Малера-Спринджюка и свойствами решений совместных диофантовых неравенств. При доказательстве теорем использованы методы В. Г. Спринджюка и его школы в лице В. И. Берника и В. Бересневича.

Диссертация состоит из всех рекомендуемых ВАКом структурных частей, к каковым относятся введение, краткая характеристика работы, главы с выводами, заключение и библиографический список. Ее основное содержание изложено в шести главах, полный объем составляет 79 страниц, из них 5 полных страниц занимает библиографический список, состоящий из 61 наименования, и около 2-х страниц – список публикаций соискателя (всего 12 наименований, из которых 6 рецензируемых статей).

Во введении упомянуты задачи метрической теории диофантовых приближений, подчеркнута их важность в настоящее время и связь с основным направлением диссертационного исследования. В завершение перечислены основные результаты диссертационного исследования в виде формулировок семи теорем.

Две первые главы являются вспомогательными. В первой главе представлен тематический обзор литературы, в котором отслеживается история становления и развития метрической теории диофантовых приближений и основных ее проблем. Вторая глава содержит вспомогательные утверждения. Сформулировано 13 лемм, 8 из которых приведены с доказательством.

В третьей главе исследованы свойства степеней линейных и квадратичных неприводимых многочленов (2 теоремы и 3 леммы соответственно), а также рассмотрен случай приводимых многочленов с некоторым ограничением на один множитель (2 теоремы). Именно последняя задача представляет особый интерес, поскольку для классической теории диофантовых приближений характерно обращение к неприводимому варианту. Здесь улучшены теоремы В. Г. Спринджюка и М. Додсона о порядке приближения нуля значениями приводимых полиномов, найден

наилучший порядок приближения, в то время как в работах предыдущих авторов были получены только двусторонние оценки сверху и снизу.

В четвертой главе получены метрические теоремы о разрешимости диофантовых неравенств, представляющих собой обобщенные аналоги исследованных А. Хинчиным неравенств, которые улучшают некоторые известные верхние оценки меры их множества решений (2 теоремы).

Пятая глава посвящена диофантовым приближениям в поле действительных чисел с ограничениями на показатель в правой части (1 теорема). Решена известная задача о распределении алгебраических чисел заданной степени n и высоты, не превосходящей Q , в коротком интервале I при наличии в интервале алгебраического числа малой степени и высоты. Этот результат усиливает недавние результаты А. Гусаковой и Ф. Гётце.

В шестой главе получены эффективные нижние оценки для мер множеств комплексных чисел с малыми значениями многочленов и обобщение результатов доказанной теоремы на случай p -адических чисел (5 теорем).

Следует добавить, что все утверждения (леммы, предложения, теоремы), сформулированные в диссертации, приводятся с развернутыми доказательствами или с точными ссылками на источник.

Таким образом, содержание диссертационной работы Засимович Е. В. «Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, соответствует отрасли «физико-математические науки» и паспорту специальности ВАК Республики Беларусь 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные теоремы всех глав диссертации усиливают или обобщают результаты ведущих специалистов в области метрической теории диофантовых приближений. К ним можно отнести, прежде всего, получение двусторонних оценок для мер множеств решений диофантовых неравенств специального вида, решение задачи о распределении алгебраических чисел заданной степени и ограниченной высоты в коротком интервале и получение оценки размерности Хаусдорфа для множества чисел, реализующих малые значения многочленов в комплексном поле.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все выносимые на защиту результаты диссертации обоснованы и достоверны. Это подтверждено публикациями в рецензируемых научных журналах Республики Беларусь и докладами на международных научных конференциях Беларуси и России, в которых принимали участие видные специалисты в области теории чисел.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в метрической теории диофантовых приближений и в учебном процессе на математических факультетах университетов. Кроме этого, они могут найти свое применение в рамках прикладных задач, связанных с проблемами помех беспроводной связи.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Основные положения диссертационной работы достаточно полно отражены в опубликованных статьях и материалах конференций. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ. Из них 5 статей в научных рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК Республики Беларусь («Вестник могилевского государственного университета»-2, «Труды института математики НАН Беларуси»-1, «Доклады НАН Беларуси»-2), 1 статья за рубежом («Чебышевский сборник»), 6 – в материалах международных математических конференций.

Считаю, что результаты, полученные Засимович Е.В. при написании диссертационной работы, опубликованы в необходимом объеме.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

В целом, оформление диссертации и автореферата отвечают требованиям ВАК Республики Беларусь. Структура работы ясно отражает логику и динамику проведенного исследования. Полученные результаты изложены грамотно и четко.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени.

На основании уровня полученных в диссертации результатов, их опубликованности в научной печати можно сделать вывод о том, что научная квалификация соискателя Засимович Е.В. соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Замечания

При общей положительной оценке диссертационной работы имеются следующие замечания.

В реферате найдена некоторая неточность при описании содержания диссертации, а именно: в реферате сказано, что в первой главе сформулированы основные полученные результаты, в самой же диссертации они расположены во введении. Кроме того, с пятого абзаца введения в реферате изложен материал первой главы диссертации. Возможно, перенеся содержимое первой главы во введение или объединив главы 1 и 2, получился бы лучше читаемый текст с 5-ю главами.

При формулировке основных результатов диссертации в ее введении и в основной части реферата используется фраза «мера решений диофантовых неравенств», хотя более корректно – «мера множества решений...». Этот недочет отсутствует при формулировке положений, выносимых на защиту.

Думаю, что наличие примеров практического использования полученных результатов украсило бы диссертацию. К сожалению, указанной выше монографии В. Бересневича нет среди использованных библиографических источников.

В оглавлении можно было бы указать страницы на список использованных публикаций и отдельно – на публикации соискателя.

Определитель (1.4) в диссертации и (4) в реферате назван вронскианом n функций одной действительной переменной, непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз, хотя корректнее его назвать вронскианом или первых производных этих функций, или минором вронскиана этих функций и константы. При этом вкралась опечатка в обозначение пространства непрерывных на интервале функций: вместо буквы C использована ее стилизованная форма, которая обозначает множество комплексных чисел.

Следует отметить, что сделанные замечания носят, скорее, технический характер и не снижают научную и практическую значимость полученных автором результатов.

Заключение

Диссертационная работа Засимович Е.В. «Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений» представляет собой законченную квалификационную научную работу. Ее содержание соответствует требованиям ВАК Республики Беларусь, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Считаю, что за:

1. Вывод двусторонних оценок для мер множеств решений диофантовых неравенств с многочленами рассмотренного вида (степени линейного многочлена и неприводимого квадратичного многочлена, а также приводимого многочлена с ограничением на один из множителей);

2. Вычисление размерности Хаусдорфа в задаче приближения действительных чисел алгебраическими;

3. Получение эффективных оценок меры Лебега множества чисел, реализующих малые значения многочленов в комплексном поле

Засимович Е.В. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент

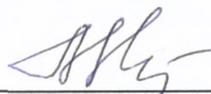
кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры информатики ГУО

«Белорусский государственный

университет информатики и

радиоэлектроники»



Калугина М. А.

18 января 2023 г.

