ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

УДК 511.42

ЗАСИМОВИЧ
Елена Васильевна

ЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ МЕР В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Минск, 2022

Работа выполнена в государственном научном учреждении “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”

Научный руководитель:	**Берник Василий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории чисел и дискретной математики государственного научного учреждения “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”.
Официальные оппоненты:	**Мощевитин Николай Германович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова;
	Калугина Марина Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики БГУИР.
Оппонирующая организация:	Белорусский государственный аграрный технический университет.

Защита состоится “3” февраля 2023 г. в 14:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при государственном научном учреждении “Институт математики Национальной академии наук Беларуси” по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11, конференц-зал, тел. ученого секретаря: (017) 379–17–78, email: tbusel@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан “28” декабря 2022 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
кандидат физико-математических наук Т.С. Бусел

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена метрической теории диофантовых приближений. Диофантовы приближения — теоретико-числовая дисциплина, исследующая приближения более широких классов чисел (действительных, комплексных, p-адических, ...) более узкими (рациональными, алгебраическими, ...) Метрический подход характеризуется тем, что в нем исследуются не аппроксимационные свойства конкретных чисел, а оценивается некоторая мера множества чисел, обладающих требуемыми аппроксимационными условиями.

Основы диофантовых приближений были заложены в XIX веке Дирихле и Лиувиллем, а метрический подход был впервые применен Борелем и Хинчиным в начале XX века.

В диссертации рассматриваются метрические задачи о приближении действительных, комплексных и p-адических чисел алгебраическими числами заданной степени и высоты. История таких задач берет начало с исследований Малера, который в 1932 г. поставил гипотезу о мере множеств чисел, в которых достигаются заданные порядки приближения нуля значениями многочленов произвольной степени. Гипотеза Малера была доказана В.Г. Спринджуком в 1962 году, ее различные обобщения исследовались и исследуются белорусскими и зарубежными математиками.

Основным направлением диссертационного исследования было исследование диофантовых свойств многочленов специального вида. Для метрической теории диофантовых приближений обычным является изучение свойств неприводимых многочленов[1]. В то же время приводимые многочлены представляют свой особенный интерес, и именно на них в последние десятилетия обратилось внимание белорусских специалистов в области теории чисел[2]. Это подтверждает актуальность темы исследования и решаемых задач.

Первыми работами в теории диофантовых приближений принято считать работы Л. Дирихле 1842 г.[3] и Ж. Лиувилля 1844 г.[4].

[1]Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. Минск : Наука и техника., 1967. 181 с., Берник В.И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. 1989. Т. 53. С. 17—28.

[2]Шамукова Н.В. Эффективное доказательство проблемы В. Г. Спринджука / Н.В. Шамукова, В.А. Давыдова // Труды Института математики НАН Беларуси. 2021. Т. 21, № 2. С. 162—171, Кудин А.С. О малости неприводимых делителей целочисленных полиномов / А.С. Кудин // Доклады НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 3. С. 14—17.

[3]Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // Werke I. 1842. P. 633–638.

[4]Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible

Теорема (Дирихле). *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, а $Q > 1$ — натуральное число. Тогда существуют натуральное число $1 \le q \le Q$ и целое p, удовлетворяющие неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}. \qquad (1)$$

Теорема (Лиувилля). *Пусть α — действительное алгебраическое число степени n. Тогда существует величина $c(\alpha) > 0$, такая что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^n} \qquad (2)$$

для всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, отличных от α.

После работ Э. Бореля[5] и А. Хинчина[6] началось использование понятия меры Лебега и размерности Хаусдорфа в исследованиях разрешимости неравенств (1) и (2). Это направление в теории чисел получило название метрической теории диофантовых приближений.

Теорема (Хинчина). *Пусть $\Psi(x)$, $x > 0$ — монотонно убывающая функция. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество действительных чисел x из некоторого интервала $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, для которых неравенства*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{\Psi(q)}{q} \quad \text{или} \quad |qx - p| < \Psi(q),$$

имеют бесконечное число решений в целых числах p, q. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases} \qquad (3)$$

А. Хинчин доказал (3) для многочленов первой степени. Его теорема была обобщена К. Малером[7] с многочленов первой степени на многочлены произвольной степени. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. К. Малер предположил, что при $\Psi(H) = H^{-1-\varepsilon}$ справедливо равенство $\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = 0$.

à des irrationelles algébriques / J. Liouville // C. R. Acad. Sci. Paris. 1844. No. 18. P. 883–885.

[5]Borel M.É. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques / M.É. Borel // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1909. Vol. 27. P. 247–271.

[6]Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Annalen. 1924. Vol. 92. P. 115–125.

[7]Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Mathematische Annalen. 1932. Vol. 106. P. 131–139.

Проблему Малера решил В.Г. Спринджук[8], В.В. Бересневич[9], Э.И. Ковалевская[10], И.Л. Мороцкая[11], В.И. Берник, Н.В. Бударина и Д. Дикинсон[12]. Для многочленов произвольной степени равенства (3) были доказаны в случае сходимости ряда В.И. Берником[13], в случае расходимости ряда — В.В. Бересневичем[14], в поле комплексных чисел — Д.В. Васильевым[15]. Для невырожденных функций $f_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, неравенства (3) доказаны В.В. Бересневичем, В.И. Берником, Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом[16].

Дальнейшие исследования были связаны с классификацией действительных и комплексных чисел и доказательством гипотезы Малера[17].

Пусть x — действительное или комплексное число. Обозначим $w_n(x, H) = \min |P(x)|$, где $P(x) \in \mathcal{P}_n(H)$, $P(x) \neq 0$. Далее положим

$$w(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}\lim_{H\to\infty}} \frac{\ln \frac{1}{w_n(x,H)}}{n \ln H}.$$

Определим $s = s(x)$ следующим образом. Если $\overline{\lim}_{H\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{w_n(x,H)}}{n \ln H} = \infty$, то $s(x)$ — минимальный индекс, для которого это равенство выполняется. Во всех остальных случаях будем считать $s(x) = \infty$.

[8]Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. Минск : Наука и техника., 1967. 181 с., Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В.Г. Спринджук. Наука. Ленингр. отд-ние, 1977. 143 с.

[9]Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 50, No. 2. P. 97–112.

[10]Kovalevskaja E.I. Metric theorems on the approximation of zero a linear combination of polynomials with integral coefficients / E.I. Kovalevskaja // Acta Arithmetica. 1973. Vol. 25, No. 3. P. 93–104.

[11]Берник В.И. Диофантовы приближения в $\mathbb{Q}_p$ и размерность Хаусдорфа / В.И. Берник, И.Л. Мороцкая // Вести АН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. 1986. № 3. С. 3–9.

[12]Budarina N. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, V.I. Bernik, D. Dickinson // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149, No. 2. P. 193–216, Бударина Н. В. Оценки снизу для количества векторов с алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей / Н. В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник // Доклады НАН Беларуси. 2020. Т. 64, № 1. С. 7—11.

[13]Берник В.И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. 1989. Т. 53. С. 17—28.

[14]Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 50, No. 2. P. 97–112.

[15]Берник В.И. Теорема Хинчиновского типа для целочисленныхполиномов от комплексной переменной / В.И. Берник, Д.В. Васильев // Труды Института математики НАН Беларуси. 1999. № 3. С. 10—20.

[16]Beresnevich V.V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V.V. Beresnevich // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 2002. Vol. 94, No. 1–2. P. 99–130, Bernik V.I. Khintchine–type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions / V.I. Bernik, D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Internat. Res. Notices. 2001. Vol. 9. P. 453–486, Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V.V. Beresnevich [et al.] // Mosc. Math. J. 2002. Vol. 2. P. 203–225.

[17]Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Mathematische Annalen. 1932. Vol. 106. P. 131–139.

В 1957 г. Т. Шнайдер[18] доказал, что для любого трансцендентного числа m существует бесконечная последовательность целочисленных полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству

$$|P(x)| < c(n, x)H^{-w},$$

где $w = n$, если $x \in \mathbb{R}$ и $w = \frac{n-1}{2}$, если $x \in \mathbb{C}$, а $H = H(P) \to \infty$. То есть,

$$w_n(x) \geq \begin{cases} n, & \textit{если } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{n-1}{2}, & \textit{если } x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

К. Малер доказал, что существует величина $t > 0$, такая, что для почти всех x верно неравенство

$$|P(x)| > H^{-nt},$$

где $P(x) \in \mathcal{P}_n(H)$.

Также К. Малер доказал, что

$$t = \begin{cases} 4 + \varepsilon, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{7}{2} + \varepsilon, & x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Тем самым он показал, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ верно $w_n(x) \leq 4n$, а для $x \in \mathbb{C}$ выполняется $w_n(x) \leq \frac{7}{2}n$. Он также предположил, что:

$$w_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{n}{2}, & x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Попытки улучшить результат К. Малера предпринимались различными учеными. Вначале Ю. Коксма[19] улучшил оценку К. Малера до

$$w_n(x) \leq \begin{cases} 3n, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{5n}{2}, & x \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

затем У. Левек[20], используя лемму А. Фельдмана[21], получил

$$w_n(x) \leq \begin{cases} 2n, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{3n}{2}, & x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

[18]Schneider T. Einführung in die Transzendenten Zahlen / T. Schneider. Springer, 1957. 158 p.

[19]Koksma J. Uber die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplex Zahlen durch algebraische Zahlen / J. Koksma // Mh. Math. Physik. 1939. Vol. 48. P. 176–189.

[20]LeVeque W.J. Note on S–numbers / W.J. LeVeque // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4. P. 189–190.

[21]Фельдман Н.И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, 1 / Н.И. Фельдман // Известия АН СССР. Серия математическая. 1951. Т. 15. С. 53—74.

Ф. Каш и Б. Фолькман[22] получили

$$w_n(x) \le \begin{cases} 2n-2, & x \in \mathbb{R}, n \ge 2, \\ n-1, & x \in \mathbb{C}, n \ge 2, \end{cases}$$

а О. Шмидт[23] улучшил их результат, получив $w_n(x) \le 2n - \frac{7}{3}$ $(x \in \mathbb{R}, n \ge 3)$.

Б. Фолькман, в свою очередь, улучшил результат О. Шмидта, получив[24]

$$w_n(x) \le \begin{cases} \frac{4n}{3}, & x \in \mathbb{R}, n \ge 2, \\ \frac{4n-6}{6}, & x \in \mathbb{C}, n \ge 2. \end{cases}$$

В.Г. Спринджук получил[25] для $2 \le n \le 7$:

$$w_n(x) \le \begin{cases} \frac{10n-3}{8}, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{10n-11}{16}, & x \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

и для $n \ge 8$:

$$w_n(x) \le \begin{cases} \frac{4n-3}{3}, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{2n-3}{3}, & x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Обобщения проблемы Малера–Спринджука

Пусть $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{C}^{n+1}(I)$ — $n+1$ раз дифференцируемые функции действительной переменной $x \in I$, такие что их Вронскиан не равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \ne 0, \tag{4}$$

для почти всех $x \in I$. Пусть $K_n(\psi)$ — множество таких $x \in I$, что неравенство

$$|F(x)| = |a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0| < H^{-n+1}\psi_1(H)$$

имеет бесконечное число решений. Здесь $H = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$. О. Шмидт доказал, что для $\psi_1(H) = H^{-\gamma}, \gamma > 1$ верно равенство $\mu K_2(\psi_1) = 0$.

[22]Kasch F. Zur Mahlerschen Vermutung über S–Zahlen / F. Kasch, B. Volkmann // Mathematische Annalen. 1958. Vol. 136. P. 442–453.

[23]Schmidt W. Bounds for certain sums; a remark on a conjecture of Mahler / W. Schmidt // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 101, No. 2. P. 200–210.

[24]Volkmann B. Zur Mahlerschen Theorie der S–Zahlen, II / B. Volkmann // J. reine und angew. Math. 1963. Vol. 213, No. 1–2. P. 58–65.

[25]Спринджук В.Г. К гипотезе К. Малера о мере множества S–чисел / В.Г. Спринджук // Лит. матем. сб. 1963. Т. 2, № 2. С. 221—226.

В.Г. Спринджук предположил, что для произвольного n и $\psi_1(H) = H^{-\gamma}, \gamma > 1$, верно равенство $\mu K_n(\psi_1) = 0$. Эту гипотезу доказали Д. Клейнбок и Г. Маргулис[26]. Вскоре для невырожденной кривой $S(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, при условии (4) была доказана следующая теорема.

Для множества $K_n(\psi)$ верны следующие равенства:

$$\mu K_n(\psi) = 0, \ \textit{если} \ \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty, \tag{5}$$

$$\mu K_n(\psi) = \mu I, \ \textit{если} \ \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \tag{6}$$

Неравенство (5) было доказано независимо В.В. Бересневичем[27], В.И. Берником, Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом[28]. Неравенство (6) было доказано данными авторами в 2002 году[29].

Совместные диофантовы приближения

Результатами, положившими начало метрической теории диофантовых приближений, были теорема Хинчина–Грошева и проблема Малера. Й. Кубилюс получил полное решение проблемы Малера для $n = 2$, рассмотрев сначала совместные приближения параболы рациональными точками в $\mathbb{R}^2$ и применив принцип переноса Хинчина[30].

Следующую большую проблему совместных приближений поставил В.Г. Спринджук[31].

Для фиксированного вектора $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n$, пусть $w \leq w_n(x)$ — точная верхняя оценка положительных $w_1 > 0$ таких, что система неравенств

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left(|P(x_j)| < H^{-w_1} \right)$$

[26] Kleinbock D.Y. Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds / D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Ann. of Math. 1998. Vol. 148, No. 1. P. 339–360.

[27] Beresnevich V.V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V.V. Beresnevich // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 2002. Vol. 94, No. 1–2. P. 99–130.

[28] Bernik V.I. Khintchine–type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions / V.I. Bernik, D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Internat. Res. Notices. 2001. Vol. 9. P. 453–486.

[29] Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V.V. Beresnevich [et al.] // Mosc. Math. J. 2002. Vol. 2. P. 203–225.

[30] Касселс Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж.В.С. Касселс. М.: Мир., 1961. 213 с.

[31] Спринджук В.Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S–чисел / В.Г. Спринджук // Известия АН СССР. Серия математическая. 1965. Т. 29, № 2. С. 379—436, Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. Минск : Наука и техника., 1967. 181 с.

имеет бесконечно много решений в многочленах $P(t) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = H$. Гипотеза Спринджука заключалась в том, что $w = \frac{n-k+1}{k}$. Гипотеза Спринджука была доказана в 1980 г. В.И. Берником[32]. В том же году В. Спринджук поставил задачу[33] о приближении точек в пространстве $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p = \{(x, z, \omega)\}$ алгебраическими числами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$. Он предположил, что верно следующее утверждение. Пусть μ_1 — мера Лебега в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а μ_2 — мера Хаара в $\mathbb{Q}_p$. Для почти всех $\overline{u} = (x, z, \omega)$ (относительно меры произведения $\mu_1 \times \mu_2$) система неравенств

$$|P(x)| < H^{-v_1}, \qquad |P(z)| < H^{-v_2}, \qquad |P(\omega)| < H^{-v_e},$$

где $v_j \geq -1$, $j = 1, 2$, $v_3 \geq 0$ имеет лишь конечное число решений от многочленов $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Эту гипотезу доказал Ф. Желудевич[34]. Следующим крупным шагом было обобщение результатов Ф. Желудевича на системы неравенств, где правые части являются произвольными функциями $\psi(H)$. Доказаны аналоги теоремы Хинчина как для случая сходимости, так и для случая расходимости[35].

Особый интерес представляют статьи[36], в которых использовался метод Д. Клейнбока и Г. Маргулиса.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами) и темами

Результаты диссертации были получены в рамках выполнения Государственной программы научных исследований “Конвергенция–2020”,

[32]Берник В.И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1. С. 24—45.

[33]Спринджук В.Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений / В.Г. Спринджук // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, № 2. С. 3—68.

[34]Zeludevich F. Simultane diophantische Approximationen abhängiger Grössen in mehreren Metriken / F. Zeludevich // Acta Arithmetica. 1986. Vol. 46. P. 285–296.

[35]Budarina N. A divergent Khintchine Theorem in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, V.I. Bernik, D. Dickinson // Lithuanian Mathematical Journal. 2008. Vol. 48, No. 2. P. 1–16, Budarina N. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, V.I. Bernik, D. Dickinson // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149, No. 2. P. 193–216.

[36]Beresnevich V.V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation / V.V. Beresnevich // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, No. 2. P. 187–235, Beresnevich V.V. Simultaneous inhomogeneous diophantine approximation on manifolds / V.V. Beresnevich, S.L. Velani // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 180, No. 5. P. 531–541.

“Конвергенция–2025”, задание “Распределение корней целочисленных многочленов в кругах комплексной плоскости, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты, и их приложения в задачах математической физики” (подпрограмма “Математические модели и методы”), НИР “Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений” по договору 2021–25–162 с Национальной академией наук Беларуси.

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является получение эффективных оценок мер в метрической теории диофантовых приближений для множеств действительных и комплексных чисел с малыми значениями модулей целочисленных многочленов; получение оценок сверху и снизу для полиномов специального вида.

Основные задачи диссертации: получить эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений для множеств действительных чисел и использовать в эффективизации теоремы Спринджука, доказывающей проблему Малера; получить оценки снизу и сверху мер Лебега множества действительных чисел, в которых модули целочисленных многочленов не превосходят заданной величины.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и могут быть применены в дальнейших исследованиях в метрической теории диофантовых приближений.

Положения, выносимые на защиту

- Получены оценки сверху для мер множеств решений диофантовых неравенств с многочленами специального вида [5, 7, 8, 9].
- Найдены оценки снизу для данных мер в случае многочленов специального вида [4, 5, 7, 8, 9].
- Решена проблема о точном значении мер решений неравенств $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, и указаны длины интервалов, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты [1, 2, 6, 10, 11].
- Вычислена размерность Хаусдорфа в задаче приближения действительных чисел алгебраическими [3].

- Получены эффективные оценки меры Лебега и оценка размерности Хаусдорфа для множеств чисел, реализующих малые значения полиномов в комплексном случае [3, 12].

Личный вклад соискателя ученой степени

Статья [5] написана аспирантом без соавторов. В статьях [1, 2, 3, 4] В.И. Бернику принадлежит постановка задачи, а аспиранту — доказательство теорем в случае классов первого рода. В статье [6] аспирантом найдены интервалы, не содержащие алгебраических чисел данной высоты.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации были представлены аспирантом на XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2020); XI Международной математической конференции имени В. Я. Скоробогатько (Львов, Украина, 2020); XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2021); XVIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке 2021» (Минск, Беларусь, 2021); семинарах по теории чисел в Институте математики НАН Беларуси (руководитель — профессор В.И. Берник).

Опубликование результатов диссертации

Все основные результаты, выносимые на защиту, опубликованы в журнальных статьях, включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований: [1, 2, 3, 5, 4, 6]. Опубликовано 6 докладов на конференциях: [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Общее число публикаций — 12.

Общее количество страниц опубликованных материалов — 56 страниц.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, аннотации, перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав, заключения, библиографического списка, включающего 73 наименования. Полный объём диссертации составляет 79 страниц, из них 7 страниц занимает библиографический список.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В работе рассматриваются эффективные оценки для мер решений неравенств $|P(x)| < Q^{-w}$ в действительном и комплексном случае, а также диофантовы приближения с использованием полиномов специального вида.

Доказаны результаты об эффективных оценках снизу и сверху мер Лебега множеств действительных чисел, в которых модули целочисленных полиномов не превосходят заданной величины.

В **главе 1** дается обзор литературы по теме диссертации. Рассмотрены наиболее известные задачи метрической теории диофантовых приближений, а также история их развития. Показана связь этих задач с проблемами, исследуемыми в диссертации. Кроме того сформулированы основные полученные результаты.

Глава 2 содержит вспомогательные утверждения и леммы, используемые в диссертации.

Глава 3 посвящена диофантовым приближениям с использованием многочленов специального вида в действительном и комплексном случае, а также обобщению комплексного случая.

Рассматривается задача о мере множеств $x \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых разрешимы неравенства

$$|P(x)| < \varepsilon, \varepsilon = Q^{-w}, w > 0, Q > 1, \tag{7}$$

в полиномах $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i| \le Q$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q)$ множество решений (7), μ_1 и μ_2 — меры Лебега в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Бударина[37] доказала, что $\mu\mathcal{L}_n(Q, w) \ll Q^{-\frac{w-n}{n}}$.

Пусть полиномы $P(x)$ имеют специальный вид

$$P(x) = (ax + b)^n. \tag{8}$$

Будем рассматривать множество $\mathcal{L}_1(w)$ таких x, что разрешимо уравнение

$$|P(x)| < Q^{-w}, w > n. \tag{9}$$

[37] Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers / N. Budarina // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.

Теорема 3.1 *Справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_1(w) \asymp Q^{-\frac{w-1}{n}}.$$

Обобщим данную оценку на интервалы $I \subset [0;1)$. Для этого будем рассматривать множество $\mathcal{L}_2(w)$ таких $x \in I = [d;e) \subset [0;1)$, для которых выполняется неравенство (9).

Теорема 3.2 *В описанных выше условиях верны оценки*

$$\mu\mathcal{L}_2(w) \ll Q^{-\frac{w-1}{n}}(\mu I + 1),$$
$$\mu\mathcal{L}_2(w) \gg \left(Q^{-\frac{w-3}{n}} - Q^{-\frac{w-2}{n}}\right)\mu I - Q^{-\frac{2w-2}{n}}.$$

В комплексном случае многочлены вида (8) заменяются на многочлены

$$P(z) = (a_2z^2 + a_1z + a_0)^{\frac{n}{2}} \tag{10}$$

комплексной переменной z с целыми коэффициентами $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Будем полагать n чётным, в противном случае домножим рассматриваемый многочлен на линейный множитель, что приводит к похожему результату. Введём $\mathcal{P}_n(Q)$ — класс многочленов вида (10) с условиями: $\deg P = n$, $H(P) \le Q$. Будем рассматривать $\mathcal{L}_n(w, Q)$ — множество таких z из круга $K(z) \subset C(0,1)$ комплексной плоскости, для которых неравенство

$$|P(z)| < Q^{-w}, w > \frac{n-1}{2} \tag{11}$$

разрешимо хотя бы для одного многочлена вида (10) степени n и высоты Q.

Лемма 3.1 *В описанных выше условиях верно неравенство:*

$$\mu\mathcal{L}_n(w, Q) \ll Q^{-\frac{4w-2}{n}}.$$

Лемма 3.3 *В описанных выше условиях верно неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(w, Q) \gg Q^{-\frac{4w+2}{n}}.$$

Рассмотрим полином $S(z)$, $\deg S = n$, $H(S) \le Q$. Пусть он имеет вид

$$S(z) = T(z) \cdot P(z), \tag{12}$$

где $P(z) = (a_2z^2 + a_1z + a_0)^m$, $1 \le m \le \frac{n}{2}$. $T(z)$ — произвольный полином степени $n - 2m$. Обозначим $R(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$.

Тогда $\deg R = 2$, $\deg P = 2m$, $H(P) \asymp Q^\lambda$, $0 \le \lambda \le 1$, $H(R) \asymp Q^{\frac{\lambda}{m}}$, $\deg T = n - 2m$, $H(T) \asymp Q^{1-\lambda}$.

Пусть K — комплексный круг радиуса 1 с центром в нуле. Определим $\mathcal{L}_2\left(w, Q^{\frac{\lambda}{m}}\right)$ — множество таких $z \in K$, для которых неравенство

$$|S(z)| < Q^{-w}, w > \frac{n-1}{2}, \tag{13}$$

разрешимо хотя бы для одного многочлена вида $R(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ степени 2 и высоты $Q^{\frac{\lambda}{m}}$.

Теорема 3.3 *В описанных выше условиях верно неравенство*

$$Q^{-\frac{2w+2-\lambda}{m}} \ll \mu\mathcal{L}_2\left(w, Q^{\frac{\lambda}{m}}\right) \ll Q^{-\frac{2w+2-3\lambda}{m}}.$$

Рассмотрим $\mathcal{L}_n^*(w, Q)$ — множество таких $z \in K$, для которых неравенство (13) разрешимо хотя бы для одного полинома вида (12) степени n и высоты Q.

Теорема 3.4 *В описанных выше условиях верны неравенства*

$$\mu\mathcal{L}_n^*(w, Q) \ll Q^{-\frac{4w-2}{n-2}},$$
$$\mu\mathcal{L}_n^*(w, Q) \gg Q^{-2w-n-1}.$$

В **главе 4** рассматривается теорема Спринджука и эффективные оценки в действительном случае для мер решений неравенств $|P(x)| < Q^{-w}$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{14}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P_n(x)$.

В данной главе получены метрические теоремы о разрешимости неравенств вида (14), удобные для приложений.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q, w)$ множество точек $x \in I$, для которых разрешимо неравенство

$$|P_n(x)| < Q^{-w}, Q > 1, w > n \tag{15}$$

в классе полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

В работе [10] Н. Бударина доказала неравенство

$$\mu\mathcal{L}_n(Q, w) \ll Q^{-\frac{w-n}{n}}, w > n.$$

В данной главе этот результат улучшен для $w \ge n + 1$.

Теорема 4.1 *При $w \ge n + 1$ справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(Q, w) < c_{18}(n) Q^{-\frac{w-1}{n}}. \tag{16}$$

Глава 5 содержит оценки снизу для мер множеств действительных чисел с малыми значениями полиномов.

Мы улучшаем при $n < w < n + 1$ оценку теоремы Будариной[38], при этом длина интервала I будет равна $Q^{-\gamma}$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Теорема 5.2 *При* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ *и* $n < w < n + 1$ *справедливо неравенство*

$$\mu B_1 < c_{31} Q^{-w+n+\varepsilon} \mu I. \tag{17}$$

Глава 6 содержит доказательства эффективных оценок для мер решений неравенств $|P(z)| < Q^{-v}$ в комплексном случае.

Будем рассматривать

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \quad —$$

многочлен действительной или комплексной переменной t с целыми коэффициентами, $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Будем обозначать $\deg P = n$ — степень $P(t)$, $H = H(P) = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$ — высоту многочлена $P(t)$, μ — меру Лебега на действительной прямой или комплексной плоскости. В диофантовых приближениях одной из основных задач является изучение множества $\mathcal{L}_n(\varepsilon, Q)$ — множества t из некоторого интервала I или круга в комплексной плоскости, для которых неравенство

$$|P(t)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{18}$$

имеет решение в многочленах $P(t)$ из класса многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) : \quad \deg P \le n, \quad H(P) \le Q\}$$

при фиксированном натуральном числе Q. В (18) величина ε зависит, как правило, от характеристик многочлена $P(x)$: степени, высоты, приводимости и т.д.

Получено улучшение теоремы Будариной для комплексного случая:

Теорема 6.2 *Пусть* $P(z) < Q^{-w}$, $w > \frac{n-1}{2}$, $z \in \mathbb{C}$. *Определим множество* $\mathcal{L}_n(w)$ *как множество таких* $z \in K$, *что* $P(z) < Q^{-w}$, $w > \frac{n-1}{2}$, $z \in \mathbb{C}$ *имеет хотя бы одно решение в* $P(z) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Тогда $\mu \mathcal{L}_n(w) < c_{52}(n) Q^{-u}$, $u = \frac{2w-n+1}{5} > 0$.

В работе используются методы В.Г. Спринджука, В.И. Берника и В.В. Бересневича, а также классические методы теории диофантовых приближений и геометрии чисел.

[38]Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers / N. Budarina // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.

Получены теоремы о распределении алгебраических чисел, сопряженных чисел, а также их дискриминантов и результантов. Выделен случай приводимых многочленов специального вида, в котором получены точные оценки мер множеств действительных и комплексных чисел с малыми значениями целочисленных полиномов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

- Получены оценки сверху для мер множеств решений диофантовых неравенств с многочленами специального вида [5, 7, 8, 9].
- Найдены оценки снизу для данных мер в случае многочленов специального вида [4, 5, 7, 8, 9].
- Решена проблема о точном значении мер решений неравенств $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, и указаны длины интервалов, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты [1, 2, 6, 10, 11].
- Вычислена размерность Хаусдорфа в задаче приближения действительных чисел алгебраическими [3].
- Получены эффективные оценки меры Лебега и оценка размерности Хаусдорфа для множеств чисел, реализующих малые значения полиномов в комплексном случае [3, 12].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер.

Материалы диссертации также могут использоваться в задачах математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей, а также в учебном процессе при чтении лекций и написании пособий по соответствующим разделам теории чисел для студентов физико–математических специальностей.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных изданиях в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Берник В.И. Диофантовы приближения с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах. 1 / В.И. Берник, Н.В. Бударина, Засимович Е.В. // Доклады НАН Беларуси. — 2021. — Т. 65, № 5. — С. 526—532.
2. Берник В.И. Диофантовы приближения с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах / В.И. Берник, Д.В. Васильев, Засимович Е.В. // Доклады НАН Беларуси. — 2021. — Т. 65, № 4. — С. 397—403.
3. Берник В.И. Приближения действительных чисел алгебраическими числами и оценки размерности Хаусдорфа / В.И. Берник, Е.В. Гусева, Сакович Н.В. // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2020. — Т. 28, № 1–2. — С. 3—10.
4. Берник В.И. Связь меры резонансных множеств с величиной правой части диофантовых неравенств / В.И. Берник, Е.В. Сакович, Е.В. Гусева // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. — 2020. — 1(55). — С. 4—11.
5. Гусева Е.В. Диофантовы приближения с приводимыми многочленами / Е.В. Гусева // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. — 2021. — 1(57). — С. 63—69.
6. Калоша Н.И. Интервалы малой длины, содержащие алгебраическое число заданной высоты / Н.И. Калоша, И.А. Корлюкова, Е.В. Гусева // Чебышевский сборник. — 2020. — Т. 21, № 1. — С. 213—220.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

7. Guseva, E. Diophantine approximation of zero by values of reducible polynomials. / E. Guseva, Z. Panteleeva, O. Rykova // 11th International Skorobohatko Mathematical Conference (October 26–30, 2020, Lviv, Ukraine): Abstracts. — Lviv, 2020. — P. 38.
8. Засимович, Е.В. Множества с малыми значениями целочисленных полиномов / Е.В. Засимович, И.А. Корлюкова, Н.В. Сакович // Материалы XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 18–22 мая 2021 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2021. — С. 145–146.
9. Засимович, Е.В. Точные оценки мер комплексных чисел с малыми модулями целочисленных многочленов / Е.В. Засимович, Д.В. Васильев, Н.В. Сакович // Материалы XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 17–21 мая 2022 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2022. — С. 227–229.

10. Гусева, Е.В. Интервалы малой длины, содержащие алгебраические числа заданной степени и высоты / Е.В. Гусева, Н.В. Бударина, И.А. Корлюкова // Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 23–26 сентября 2020 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2020. — С. 234.
11. Засимович, Е.В. О приближении нуля с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах / Е.В. Засимович // Материалы XVIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке 2021». Минск, 27–30 сентября 2021 г. / Изд-во Беларуская навука. — Минск, 2021. — С. 564–566.
12. Гусева, Е.В. О точных значениях меры Лебега множеств комплексных чисел с заданным порядком аппроксимации / Е.В. Гусева, Н.В. Сакович, Н.В. Шамукова // Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 23–26 сентября 2020 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2020. — С. 253–254.

РЭЗЮМЭ

Засімовіч Алена Васільеўна

Эффектыўныя аценкі мер
у метрычнай тэорыі дыяфантавых
набліжанняў

Ключавыя словы: дыяфантавы набліжанні, гіпотэза Спрынджука, паліномы спецыяльнага віда, мера Лебега, геаметрыя лікаў.

Мэта працы: атрыманне эфектыўных ацэнак мер у метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжанняў для мностваў сапраўдных і камплексных лікаў з малымі значэннямі модуляў цэлалікавых паліномаў; атрыманне ацэнак зверху і знізу для паліномаў спецыяльнага віду.

Метады даследавання: метады алгебры і тэорыі лікаў, метады метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжанняў, метады геаметрыі лікаў і тэорыі імавернасцяў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У працы атрыманы наступныя новыя вынікі.

- Атрыманы ацэнкі зверху для мер мностваў рашэнняў диофантовых няроўнасцей з мнагачленамі спецыяльнага выгляду [5, 7, 8, 9].
- Знойдзены ацэнкі знізу для дадзеных мер у выпадку мнагачленаў адмысловага выгляду [4, 5, 7, 8, 9].
- Вырашана праблема аб дакладным значэнні мер рашэнняў няроўнасцей $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, і паказаны даўжыні інтэрвалаў, утрымоўваючых алгебраічныя лікі дадзенай ступені і вышыні [1, 2, 6, 10, 11].
- Вылічана памернасць Хаўсдорфа ў задачы набліжэння сапраўдных лікаў алгебраічнымі [3].
- Атрыманы эфектыўныя ацэнкі меры Лебега і ацэнка памернасці Хаўсдорфа для мностваў лікаў, якія рэалізуюць малыя значэнні паліномаў у камплексным выпадку [3, 12].

Рэкамендацыі па выкарыстанню.

Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар.

Матэрыялы дысертацыі таксама могуць выкарыстоўвацца ў задачах матэматычнай фізікі пры вырашэнні праблемы малых назоўнікаў, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні лекцый і напісанні дапаможнікаў па адпаведных раздзелах тэорыі лікаў для студэнтаў фізіка-матэматычных спецыяльнасцей.

Галіна прымянення: метрычная тэорыя дыяфантавых набліжанняў, раўнанні матэматычнай фізікі, лекцыйныя курсы ў навучальных установах.

РЕЗЮМЕ

ЗАСИМОВИЧ Елена Васильевна

Эффективные оценки мер в метрической теории диофантовых приближений

Ключевые слова: диофантовы приближения, гипотеза Спринджука, полиномы специального вида, мера Лебега, геометрия чисел.

Цель работы: получение эффективных оценок мер в метрической теории диофантовых приближений для множеств действительных и комплексных чисел с малыми значениями модулей целочисленных многочленов; получение оценок сверху и снизу для полиномов специального вида.

Методы исследования: методы алгебры и теории чисел, методы метрической теории диофантовых приближений, методы геометрии чисел и теории вероятностей.

Полученные результаты и их новизна. В работе получены следующие новые результаты.

- Получены оценки сверху для мер множеств решений диофантовых неравенств с многочленами специального вида [5, 7, 8, 9].
- Найдены оценки снизу для данных мер в случае многочленов специального вида [4, 5, 7, 8, 9].
- Решена проблема о точном значении мер решений неравенств $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, и указаны длины интервалов, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты [1, 2, 6, 10, 11].
- Вычислена размерность Хаусдорфа в задаче приближения действительных чисел алгебраическими [3].
- Получены эффективные оценки меры Лебега и оценка размерности Хаусдорфа для множеств чисел, реализующих малые значения полиномов в комплексном случае [3, 12].

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер.

Материалы диссертации также могут использоваться в задачах математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей, а также в учебном процессе при чтении лекций и написании пособий по соответствующим разделам теории чисел для студентов физико–математических специальностей.

Область использования: метрическая теория диофантовых приближений, уравнения математической физики, курсы лекций в образовательных учреждениях.

SUMMARY

Zasimovich Elena Vasilievna

Effective estimates of measures in the metric theory of Diophantine approximation

Keywords: Diophantine approximation, Sprindžuk's conjecture, polynomials of a special form, Lebesgue measure, geometry of numbers.

Aim of the research: obtaining effective estimates of measures in metric theory of Diophantine approximation for sets of real and complex numbers with small moduli of integer polynomials; obtaining upper and lower bounds for polynomials of a special form.

Methods of the research: algebra and theory of numbers, methods of metric theory of Diophantine approximation, application of methods of geometry of numbers and probability theory.

Obtained results and their novelty. The following new results have been obtained.

- Upper bounds are obtained for measures of sets of solutions of Diophantine inequalities with polynomials of a special form [5, 7, 8, 9].
- Lower bounds are found for these measures in the case of polynomials of a special form [4, 5, 7, 8, 9].
- The problem of the exact value of the measures of solutions of the inequalities $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, is solved, and the lengths of intervals containing algebraic numbers of a given degree and height are specified [1, 2, 6, 10, 11].
- The Hausdorff dimension is calculated in the problem of approximation of real numbers by algebraic numbers [3].
- Effective estimates are obtained for the Lebesgue measure and the Hausdorff dimension of sets of numbers realizing small values of polynomials in the complex case [3, 12].

Recommendations for use. The nature of the results is theoretical.

The materials of the dissertation can also be used in problems of mathematical physics, specifically related to the problem of small denominators, as well as in the educational process when giving lectures and writing study material on the relevant sections of number theory for students specializing in physics and mathematics.

Areas of application: metric theory of Diophantine approximation, equations of mathematical physics, lecture courses at educational institutions.

ЗАСИМОВИЧ
Елена Васильевна

ЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ МЕР В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Отпечатано в РУП "Издательский дом "Белорусская наука"
Подписано в печать 26.12.2022.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,05. Уч.-изд. л. 0,95.
Тираж 60 экз. Заказ №273.