

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Задорожнюк Анны Олеговны «Свойства случайных блужданий на слабых экспандерах», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

### 1. Научная оценка диссертации.

#### Актуальность темы диссертации.

В связи с поиском хороших моделей устойчивых сетей в 70-е годы 20 века в работах М.С. Пинскера, Л.А. Бассалыго и Г.А. Маргулиса было введено понятие графа-экспандера (в дальнейшем экспандера) как пример разреженных графов с высокими показателями связности. Известно, что экспандеры обладают свойством быстрого перемешивания, что приводит к эффективным применениям экспандеров к криптографии и кодированию. Кроме того, известны глубокие связи экспандеров с алгеброй, теорией чисел, функциональным анализом, благодаря чему это направление теории графов является одним из наиболее развивающихся и востребованных в настоящее время. Первые явные конструкции экспандеров, основанные на графах Кэли абелевых групп, были предложены Г.А. Маргулисом. Альтернативный подход, основанный на случайных графах, был предложен и развит Н. Алоном. Понятия изопериметрической постоянной и спектрального пробела являются основными количественными характеристиками экспандеров. Начиная со второй половины 20 века интенсивно развиваются теория и приложения графов Кэли. Значительный интерес к графам Кэли вызван тем, что такие графы позволяют эффективно исследовать комбинаторные и метрические свойства групп, а также наличием многочисленных приложений графов Кэли в информатике, физике, химии. В частности, графы Кэли на симметрических группах обладают хорошей связностью, симметрией, удобны в генерации и представлении, что позволяет эффективно их использовать при построении топологий устойчивых компьютерных сетей, а также при исследовании скорости распространения информации в сети.

Резистивное расстояние является одним из наиболее эффективных и удобных инструментов исследования кластерной структуры сетей на основе графов. Впервые резистивное расстояние как метрика на графе было введено в конце 80-х годов 20 века в работе А.Д. Гвишиани и В.А. Гурвича. В дальнейшем эта метрика стала интенсивно использоваться в физике, информатике, хемометрике. Несмотря на наличие явных формул в терминах лапласиана графа для вычисления резистивных расстояний, применение этих формул для исследования кластерной структуры и асимптотических свойств больших графов, обладающих сложной структурой, не представляется возможным. Важным шагом к пониманию кластерной структуры больших графов является гипотеза, выдвинутая в 2011 году в работе У. Люксбург, А. Радль, М. Хайна, о том, что в больших и обладающих хорошей связностью графах резистивное расстояние является локальной характеристикой и асимптотически близко к сумме обратных величин к степеням данным вершин. Гипотеза Люксбург-Радль-Хайна была подтверждена для семейств экспандеров, а также для некоторых геометрических графов, включая решетки в евклидовом пространстве размерности не ниже трех. Несмотря на усилия ведущих математиков мира, в общем виде гипотеза остается открытой. В работах М.М. Васьковского и А.О. Задорожнюк продолжаются эти исследования, вводятся понятия обобщенной изопериметрической постоянной и новый класс графов (так называемые слабые экспандеры), которые, в частности, охватывают экспандеры, решетки, графы Кэли на группах комплексных отражений. Для таких графов исследуется справедливость гипотезы Люксбург-Радль-Хайна.

В ряде задач физики, химии важную роль играет исследование упорядоченности резистивных расстояний в графах, включая свойства монотонности и экстремальности относительно геодезического расстояния в графах. До работ диссертанта свойства упорядо-

ченности резисторных расстояний были исследованы лишь в наиболее простых графах, которые допускают получение явных формул для резистивных расстояний в терминах индексов вершин графа. Более интересные результаты в области экстремальности были также получены Б. Боллобашем. В работах А.О. Задорожнюк исследуются свойства монотонности и экстремальности резистивных расстояний в графах решеток. Резистивное расстояние может быть определено в терминах времени доступа для случайного блуждания на соответствующем графе, что демонстрирует глубокие связи с цепями Маркова на графах. Несмотря на важность задачи исследования упорядоченности вероятностей состояний случайных блужданий, до недавнего времени были известны лишь отдельные фрагментарные результаты, что объясняется сложностью задачи и отсутствием соответствующего аппарата исследования. В работах диссертанта разработан метод, который позволяет исследовать свойства монотонности вероятностей состояний случайных блужданий на графах решеток.

Как отмечалось ранее, свойство быстрого перемешивания в экспандерах играет ключевую роль во многих приложениях. Однако в ряде прикладных задач возникает необходимость устанавливать свойство быстрого перемешивания на графах Кэли симметрических групп, которые экспандерами не являются. Для таких графов в работах Д. Альдуса и других математиков разработан математический аппарат, основанный на концепции склеивания случайных блужданий. В работах А.О. Задорожнюк существенно развиваются идеи Д. Альдуса и устанавливается свойство быстрого перемешивания в графах Кэли групп комплексных отражений.

#### **Основные результаты диссертации, их новизна, достоверность, научная и практическая значимость.**

В первой главе диссертации приводится обзор литературы по теме исследования и формулируются решаемые задачи.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию асимптотических свойств резистивных расстояний в семействах слабых экспандеров. В диссертации разработаны новые методы получения точных асимптотических оценок резистивных расстояний в больших графах, обладающих хорошей связностью. С помощью этих методов доказывается гипотеза Люксбург-Радля-Хейна для семейств слабых экспандеров. Разработан новый метод анализа средних резистивных расстояний, с помощью которого получены более точные результаты для графов Кэли на симметрических группах, порожденных транспозициями. В диссертации получено обобщение теоремы Боллобаша и доказаны теоремы о монотонности и экстремальности резистивных расстояний в графах решеток.

Третья глава диссертации посвящена исследованию свойств случайных блужданий на решетках и графах Кэли групп комплексных отражений. В диссертации доказаны теоремы об упорядоченности вероятностей состояний случайных блужданий в решетках. Доказывается аналог теоремы Альдуса о скорости перемешивания случайных блужданий на графах Кэли групп комплексных отражений.

Все основные результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Все результаты диссертации строго доказаны и сопоставлены с известными ранее фактами.

Таким образом, А.О. Задорожнюк получила новые научные результаты и разработала новые методы в теории графов. Научные результаты А.О. Задорожнюк признаны математическим сообществом, как в Беларуси, так и за рубежом. Полученные результаты опубликованы в 12 научных работах, среди которых 4 статьи в изданиях, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 8 статей и тезисов в сборниках трудов научных конференций. Исследования проводились в рамках ГПНИ «Анализ асимптотических свойств решений дифференциальных и алгебраических систем» (2016-2020 гг.), «Анализ общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с приложениями в криптографии и теории кредитных рисков» (2021-2025 гг.). Научные результаты А.О.

Задорожнюк внедрены в учебный процесс БГУ, что подтверждается 1 актом о внедрении в образовательный процесс. Методы и результаты диссертационной работы многократно обсуждались на международных научных конференциях, научных семинарах в БГУ.

С учетом сказанного, можно сделать вывод об оригинальности полученных результатов и методов, их высокой теоретической и практической значимости.

## **2. Характеристика научной, научно-педагогической и производственной деятельности соискателя.**

Несмотря на то, что Задорожнюк А.О. является аспирантом первого года обучения, она имеет многолетний успешный научно-исследовательский опыт, что подтверждается наличием публикаций в высокорейтинговых научных журналах, входящих в БД Scopus и Web of Science.

А.О. Задорожнюк является участником и призером ряда престижных международных олимпиад и конкурсов научно-исследовательских работ молодых ученых, включая ICYS, ITYM, EGMO. Является победителем республиканского конкурса научных работ студентов УВО Республики Беларусь, лауреатом специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов.

Задорожнюк А.О. работает ассистентом кафедры высшей математики БГУ, проводит на высоком научно-методическом уровне практические занятия по дисциплинам модуля «Математический анализ» и по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Диссертант проводит большую работу с одаренными учащимися и студентами: является автором задач и членом жюри на республиканских и международных турнирах юных математиков, участвовала в подготовке команд Беларуси на международных турнирах юных математиков, руководит научно-исследовательской работой студентов на факультете прикладной математики и информатики.

**Выводы.** Считаю, что научные работы Задорожнюк А.О. выполнены на высоком уровне, вносят значительный вклад в теорию графов и соответствуют требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а их автор заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика за следующие новые научные результаты:

1) доказательство гипотезы Люксбург-Радль-Хайна об асимптотике резистивных расстояний для семейств слабых экспандеров, охватывающих графы Кэли групп комплексных отражений и графы решеток;

2) теоремы о монотонности и экстремальности резистивных расстояний и вероятностей состояний случайных блужданий на графах решеток;

3) теоремы о времени перемешивания случайных блужданий на группах комплексных отражений.

Научный руководитель  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
заведующий кафедрой высшей математики БГУ

М.М. Васьюковский