ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права
УДК 519.179.2, 519.217.2

Задорожнюк Анна Олеговна

Свойства случайных блужданий на графах геометрических групп

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 —
дискретная математика и математическая кибернетика

Минск, 2023

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель:	**Васьковский Максим Михайлович,** доктор физико-математических наук, заведующий кафедры высшей математики ФПМИ Белорусского государственного университета
Официальные оппоненты:	**Демиденко Виталий Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор Белорусского государственного экономического университета
	Бенедиктович Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел и математической кибернетики Института математики Национальной академии наук Беларуси
Оппонирующая организация:	**Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси»**

Защита состоится «29» ноября 2023 г. в 13:30 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.

Тел. ученого секретаря совета (+375–17)–378–17–62, email: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «27» октября 2023 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

Введение

Резистивное расстояние — один из наиболее распространенных инструментов для исследования кластерной структуры графов. Впервые эта метрика появилась в работе А.Д. Гвишиани и В.А. Гурвича (1987), и в дальнейшем приобрела популярность в хемометрике, информатике, математической физике. Название метрики обусловлено тем, что ее можно определить как сопротивление в соответствующей графу электрической цепи, однако существует и эквивалентное определение, опирающееся на случайные блуждания на графе.

Известны явные формулы для вычисления резистивного расстояния, однако их применение для исследования его асимптотического поведения на больших графах со сложной структурой не представляется возможным. В работе У. Люксбург, А. Радль и М. Хайна (2014) была выдвинута гипотеза об асимптотике резистивного расстояния в достаточно больших и обладающих хорошей связностью графах, суть которой в том, что оно зависит в основном от степеней двух рассматриваемых вершин и, таким образом, является локальной характеристикой.

Для некоторых классов графов гипотеза была доказана, и важную роль в доказательстве играют параметры расширения. Разреженные графы, обладающие хорошими связностью и параметрами расширения, называются экспандерами. Они впервые возникли в работах М.С. Пинскера, Л.А. Бассалыго (1973) и Г.А. Маргулиса (1973), посвященных поиску моделей устойчивых сетей. Первые явные их конструкции были предложены Г.А. Маргулисом (1973), Н. Алоном и В. Милманом (1985). Исследование экспандеров – одно из наиболее развивающихся направлений теории графов в настоящее время. Обнаруживается его связь с алгеброй, теорией чисел и гиперболической геометрией, а сами экспандеры находят применение в криптографии и кодировании благодаря свойству быстрого перемешивания. Многие довольно простые и полезные графы, однако, не являются экспандерами, чем и мотивировано введение в работе понятия слабых экспандеров с менее строгими требованиями к изопериметрическим характеристикам.

Хотя полученные в диссертации результаты применимы для более широких классов графов, особенно подробно рассматриваются семействах слабых экспандеров, представляющих собой также геометрические структуры. Таковыми являются решетки, а также графы Кэли групп комплексных отражений и симметрической группы. Эти графы обладают хорошей связностью, симметрией, удобны в генерации и представлении, что позволяет эффективно их использовать при построении топологий устойчивых компьютерных сетей, а также при исследовании скорости распространения информации в сети.

Упорядоченность резистивных расстояний относительно геодезических играет важную роль в ряде задач физики и химии, однако до сих пор была исследована в основном лишь для довольно простых графов с помощью вычисления точных значений. Более общие результаты в этой области были получены Б. Боллобашем и Г. Брайтвеллом (1997). Другой вид упорядоченности, который можно рассмотреть – упорядоченность вероятностей состояний случайного блуждания с фиксированным количеством шагов. Некоторые результаты по нему были получены, например, Г. Уайтом (2016) для блужданий на группах Коксетера.

Наконец, важной характеристикой случайных блужданий на графе является время перемешивания. Интерес к нему возникает в таких задачах как генерация случайных элементов больших множеств со сложной структурой или изучение мутаций в ДНК. Как уже было сказано, экспандеры обладают свойством быстрого перемешивания, однако помимо них глубоко было исследовано поведение случайных блужданий на графах Кэли, в частности – графах Кэли симметрической группы. Начиная с 1980-х в этом направлении в работах П. Диакониса, М. Шахшахани, Д. Альдуса, Л. Салофф-Косте и многих других было разработаны разнообразные методы оценки времени перемешивания: оценки характеров неприводимых представлений группы, склеивание распределений, метод сильного стационарного времени, спектральный анализ.

Общая характеристика работы

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих проектов:

- Анализ асимптотических свойств решений дифференциальных и алгебраических систем (2016–2020 гг., номер госрегистрации 20162496);
- Анализ общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с приложениями в криптографии и теории кредитных рисков (2021–2025 гг., номер госрегистрации 20213106);
- Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем (подпрограмма «Математические модели и методы» Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. «Конвергенция-2025», номер госрегистрации 20212620).

Цели и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование асимптотических свойств случайных блужданий и резистивных расстояний в семействах графов геометрических групп. Для достижения этой цели в работе решаются следующие задачи: доказать гипотезу Люксбург-Радль-Хайна для семейств слабых экспандеров, исследовать упорядоченность резистивных расстояний и вероятностей состояний случайных блужданий в решетках и установить свойство быстрого перемешивания для случайных блужданий на графах Кэли групп комплексных отражений.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются семейства графов геометрических групп. Предметом исследования являются асимптотические свойства случайных блужданий на графах этих семейств.

Научная новизна

В диссертации разработаны новые методы получения точных асимптотических оценок резистивных расстояний в больших графах с высокой степенью связности, с помощью которых гипотеза Люксбург-Радль-Хайна доказана для ряда семейств слабых экспандеров; разработан новый метод анализа средних резистивных расстояний; получено обобщение теоремы Боллобаша и доказаны теоремы о монотонности и экстремальности резистивных расстояний; доказаны теоремы о порядке вероятностей состояний случайных блужданий; доказан аналог теоремы Альдуса о времени перемешивания случайных блужданий на графах Кэли групп комплексных отражений.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство гипотезы Люксбург-Радль-Хайна для семейств слабых экспандеров, охватывающих графы Кэли групп комплексных отражений и графы решеток.

2. Обобщение теоремы Боллобаша о максимальности резистивных расстояний и аналог теоремы Уайта об упорядоченности вероятностей состояний случайных блужданий в графах решеток.

3. Оценки времени перемешивания, обобщающие теорему Альдуса о времени перемешивания в симметрических группах и устанавливающие свойство быстрого перемешивания для случайных блужданий на группах комплексных отражений.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты, приведенные в диссертационной работе, получены автором лично.

Работы [1-А, 2-А], посвященные получению асимптотических оценок резистивных расстояний в слабых экспандерах, выполнены совместно с научным руководителем М.М. Васьковским на паритетных началах. М.М. Васьковскому принадлежит идея синтеза спектральных, алгебраических и комбинаторных методов для получения точных оценок резистивных расстояний, автору диссертации принадлежит реализация предложенного подхода.

Работы [3-А, 4-А], посвященные исследованию монотонности, экстремальных свойств резистивных расстояний и вероятностей состояний случайных блужданий в графах решеток, а также исследованию времени перемешивания случайных блужданий в группах комплексных отражений, получены автором диссертации единолично. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и обсуждение полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на шести международных научных конференциях: «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 4–6 декабря 2017), «Еругинские чтения» (Минск, 16–20 мая 2017, Могилев, 14–17 мая 2019), «Big Data and Advanced Analytics» (Минск, 01–14 марта 2019), «63-я Всероссийская научная конференция МФТИ» (Москва, 23–29 ноября 2020), «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021), «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 01–04 июня 2021), а также на международных турнирах юных математиков ITYM-2016 (Санкт-Петербург, 04–11 июля 2016), ITYM-2018 (Париж, 05–12 июля 2018).

Результаты, включенные в диссертацию, отмечены серебряной медалью международного турнира юных математиков ITYM-2016 (Санкт-Петербург), бронзовой медалью международной научной конференции ICYS-2016 (Клуж-Напока, Румыния), дипломом 1-й категории XXIV республиканского конкурса научных работ студентов УВО Республики Беларусь (2018), третьей премией с вручением нагрудного знака «Лауреат специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов» (2016), второй премией специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2019).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс БГУ, что подтверждается актом о практическом использовании результатов исследования в образовательном процессе от 26.01.2021 № 24/13.

Публикация результатов диссертации

Основные научные результаты диссертационного исследования опубликованы в 12 научных работах, среди которых: 4 статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 4 из которых входят в наукометрические базы данных Scopus и Web of Science (общим объемом 2.6 авторских листов), 8 статей и тезисов в сборниках трудов научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 3 главы, заключения, библиографического списка, приложения, включающего документы о практическом применении результатов диссертации. Полный объем диссертации — 74 страницы, библиографический список содержит 74 наименования, включая собственные публикации автора, на 9 страницах, приложение занимает 2 страницы.

Основная часть

В *первой главе* проводится обзор литературных источников по теме диссертации.

Основным объектом исследования во *второй главе* являются резистивные расстояния в последовательностях графов. Мы рассматриваем связные, неориентированные графы $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E без петель и кратных ребер. Обозначим через A матрицу смежности G, через D — диагональную матрицу степеней вершин. Нас также будет интересовать матрица Лапласа $L = D - A$.

Пусть S — не более чем счетное множество. Определим на нём вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\Omega = S$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра всех подмножеств Ω, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Мы будем рассматривать случайное блуждание на множестве S, элементы которого не обязательно являются числами. Поэтому случайный процесс будем определять не как совокупность случайных величин, а как совокупность случайных элементов.

Определение 2.2. *Случайным блужданием* (далее также *«блужданием»*) (X_t), $t = 0, 1, 2, \dots$, на множестве S будем называть случайный процесс $X : \Omega \times \mathbb{N}_0 \to S$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $X_t(\omega) = \omega$.

Когда речь идет о случайном блуждании на графе, S является множеством его вершин. Рассматриваемые далее случайные блуждания на графах являются также цепями Маркова, т.е. для них имеет место: $\mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, \dots, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$. Для таких случайных блужданий на $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ можно определить матрицу вероятностей одношаговых переходов $M = (M_{ij})$: $M_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = \omega_j | X_t = \omega_i)$. Если не сказано иное, предполагается, что для случайного блуждания на графе $M_{ij} = A_{ij}/D_{ii}$.

Определение 2.3. *Время доступа* $H_{u,v}$ для любой пары вершин u, $v \in V$ определяется как математическое ожидание времени, которое потребуется случайному блужданию на G, чтобы, выйдя из вершины u, впервые попасть в вершину v.

Определение 2.4. *Время связи* $C_{u,v}$ для любой пары вершин u, $v \in V$ – математическое ожидание времени, которое потребуется случайному блужданию на G чтобы, выйдя из вершины u, попасть в v, а затем вернуться в u. Таким образом, $C_{u,v} = H_{u,v} + H_{v,u}$.

Определение 2.5. *Резистивным расстоянием* (далее также «сопротивлением») $R_{u,v}$ между вершинами u и v называется величина $\dfrac{C_{u,v}}{2|E|}$.

Резистивное расстояние также может быть определено с помощью законов Кирхгофа и Ома как сопротивление между узлами u и v электрической цепи, соответствующей графу G, где каждое ребро обладает единичным сопротивлением.

Вторая глава фокусируется на следующем свойстве.

Свойство Люксбург-Радль-Хайна. *Будем говорить, что семейство графов $G_n = (V_n, E_n), n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет свойству Люксбург-Радль-Хайна, если существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для любого n и любых вершин $u, v \in V_n$ выполняется неравенство*

$$C_1 \left(1/d_u + 1/d_v\right) \le R_{u,v} \le C_2 \left(1/d_u + 1/d_v\right),$$

где d_u и d_v – степени вершин u и v соответственно.

В дальнейшем для обозначения подобных асимптотических неравенств будет использоваться символ Θ.

Определение 2.6. Запись $f(n) = \Theta(g(n))$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо $C_1|g(n)| \le |f(n)| \le C_2|g(n)|$.

Определение 2.7. *Вершинной границей* $\partial_V S$ подмножества $S \in V$ вершин графа называется множество вершин из $V \setminus S$, каждая из которых смежна с некоторой вершиной из S.

Определение 2.8. *Реберной границей* $\partial_E S$ подмножества $S \in V$ вершин графа называется множество ребер, один конец которых лежит в S, а другой — в $V \setminus S$.

Определение 2.9. *Изопериметрическая постоянная* графа G — это величина $h(G) := \min \dfrac{|\partial S|}{|S|}$, где ∂S — соответствующая подмножеству $S \subset V$ граница, где минимум берется по всем подмножествам $S \subset V$, таким, что $0 < |S| \leq |V|/2$.

В зависимости от того, какая граница рассматривается, можно ввести вершинную и реберную изопериметрические постоянные, которые мы будем обозначать $h_V(G)$ и $h_E(G)$. Определение семейства экспандеров тогда можно дать следующим образом.

Определение 2.10. *Семейством реберных (вершинных) экспандеров* называется последовательность графов G_n с равномерно ограниченными степенями, для которых существует такое $c > 0$, что $h_E(G_n) > c$ ($h_V(G_n) > c$) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Чтобы определить слабые экспандеры, вводится понятие обобщенной изопериметрической постоянной.

Определение 2.11. Пусть $\delta \in (0, 1]$. *Обобщенной (реберной) изопериметрической постоянной* для графа $G = (V, E)$ называется величина $h_E(\delta, G) := \min \dfrac{|\partial_E S|}{|S|^\delta}$, где минимум берется по всем подмножествам $S \subset V$, таким, что $0 < |S| \leq |V|/2$.

Определение 2.12. *Семейством слабых экспандеров* будем называть последовательность графов G_n, для которых существует такое $c > 0$, что $h_E(\delta, G_n) > c$ для любого $n \in \mathbb{N}$ при некотором фиксированном $\delta \in (0, 1]$.

Пусть $d_{\max,n}$ и $d_{\min,n}$ — максимальная и минимальная степени в графе G_n.

Определение 2.24. *Семейством почти регулярных графов* назовем последовательность G_n, в которой $\dfrac{d_{\max,n}}{d_{\min,n}} = O(1)$.

Теорема 2.1. *Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq \mathbb{N}$, – семейство почти регулярных графов. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ существует постоянная $M = M(\varepsilon) > 0$, такая, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и u, $v \in V_n$ справедливы неравенства*

$$\frac{2}{d_{\max,n} + 1} \leq R_{u,v} \leq \frac{M d_{\max,n}}{h_E^2(\varepsilon + 1/2, G_n)}.$$

Замечание 2.2. Пусть $\{G_n\}$ — последовательность почти регулярных графов. Для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$ справедливо $h_E(\varepsilon + 1/2, G_n) = O(d_{\max,n})$.

Следствие 2.1. *Если существует* $\varepsilon \in (0, 1/2]$, *такое что* $h_E(\varepsilon + 1/2, G_n) = \Theta(d_{\max,n})$, *то семейство* $\{G_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *обладает свойством Люксбург-Радль-Хайна.*

Однако получение оценки снизу на изопериметрическую постоянную само по себе является сложной задачей. В диссертации доказаны оценки снизу для $h_E(\delta, G_n)$, $\delta \in (0, 1)$ для некоторых более узких классов графов.

Собственные значения матрицы Лапласа L неотрицательны и наименьшее из них равно 0. Следующее по величине собственное значение положительно тогда и только тогда, когда граф связный.

Определение 2.13. *Спектральный пробел* графа — это наименьшее положительное собственное значение его матрицы Лапласа, которое будем обозначать через λ_2.

Утверждение 2.5. *Пусть* $G = (V, E)$ — d*-регулярный граф* ($d \geq 3$) *с обхватом* $g \geq 4$. *Тогда для любого* $\delta \in (0, 1)$ *выполняется неравенство*

$$h_E(\delta, G) \geq \min\left\{d - 2, \min\left\{\frac{\lambda_2}{2}, \frac{d}{3}\right\}\left(\frac{d}{3}\right)^{(g/2-1)(1-\delta)}\right\}. \tag{1}$$

Утверждение 2.6. *Пусть* G — d*-регулярный* ($d \geq 3$) *реберно-транзитивный граф с обхватом* $g = 4$. *Тогда для любого* $\delta \in (0, 2/3)$ *справедливо неравенство*

$$h_E(\delta, G) \geq \min\left\{\frac{d}{9}, \frac{\lambda_2 d^{1/2}}{2}\right\}. \tag{2}$$

Ниже приведены примеры семейств графов, обладающих свойством Люксбург-Радль-Хайна в силу теоремы 2.1. Все они являются семействами слабых экспандеров, но не экспандеров.

1. Семейство d_n-регулярных ($d_n \geq 3$) графов Рамануджана, где $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (d-регулярным графом Рамануджана называется d-регулярный граф, у которого все собственные значения матрицы Лапласа, кроме максимального и минимального, принадлежат промежутку $[d - 2\sqrt{d-1}, d + 2\sqrt{d-1}]$);

2. Семейство полных двудольных графов с долями размеров $d_{1,n}$ и $d_{2,n}$, такими, что $\dfrac{\max\{d_{1,n}, d_{2,n}\}}{\min\{d_{1,n}, d_{2,n}\}} = O(1)$;

3. Семейство d-мерных ($d \geq 3$) решеток $n \times \cdots \times n$;

4. Семейство n-мерных ($n \geq 3$) решеток $k \times \cdots \times k$.

Для графов Кэли удалось получить явную оценку на резистивные расстояния.

Определение 2.14. Пусть Γ — конечная группа, T — её порождающее множество, такое что $1_\Gamma \notin T$ и $T^{-1} = T$, т.е. T содержит обратные ко всем своим элементам. *Графом Кэли* $\mathrm{Cay}(\Gamma, T)$ группы Γ, порожденным T, называется граф с множеством вершин $V = \Gamma$ и множеством ребер $E = \{(x, y) | x, y \in \Gamma, yx^{-1} \in T\}$.

Все графы Кэли регулярны и вершинно-транзитивны. При рассмотрении семейств графов Кэли будем говорить, что графы в них *вложенные*, если G_{n+1} содержит подграф, изоморфный G_n для любого n.

Определение 2.15. Граф Кэли называется *минимальным*, если его порождающее множество минимально, т.е. не содержит других порождающих собственных подмножеств.

Теорема 2.2. *Пусть* $G_n = \mathrm{Cay}(\Gamma_n, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *— семейство конечных связных вложенных минимальных графов Кэли, для которых* $|\Gamma_n| \to \infty$ *и существуют постоянные* $\alpha \in (0, 1)$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, *такие, что выполняются следующие условия: (1)* $|\Gamma_{n+1}| \leq |\Gamma_n| \exp(n^\alpha)$*; (2)* $\mathrm{diam}(G_n) \leq \log^\mu |\Gamma_n|$*; (3)* $d_n := |T_n| \geq \log^\nu |\Gamma_n|$. *Тогда существует не зависящая от* n *постоянная* $M = M(\mu, \nu, \alpha) > 0$, *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и любой пары вершин* $u, v \in \Gamma_n$ *справедливы неравенства:*

$$\frac{2}{d_n + 1} \leq R_{u,v}(G_n) \leq \frac{M}{d_n}.$$

В частности, данная теорема позволяет доказать наличие свойства Люксбург-Радль-Хайна у семейств минимальных графов Кэли групп комплексных отражений.

Пусть $p | m$, U_m — мультипликативная группа комплексных корней из 1 степени m, и $\Xi_{m,n}$ — множество диагональных матриц порядка n, диагональные элементы которых принадлежат множеству U_m. Отображение $M \to (\det M)^{m/p}$ является сюръекцией из $\Xi_{m,n}$ в U_p. Обозначим ядро этого отображения через $A(m, p, n)$.

Определение 2.17. *Группа комплексных отражений* $G(m, p, n)$, $m, p, n \in \mathbb{N}$, $p | m$ – это полупрямое произведение $A(m, p, n) \rtimes S_n$.

Элементы $G(m, p, n)$ можно представить как мономиальные матрицы порядка n, элементами которых являются ξ^{a_k} ($\xi \in \mathbb{C}$ – первообразный корень из 1 степени m, $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^n a_k \equiv 0 (\bmod p)$). Групповой операцией в этом случае является умножение матриц.

В случае $m = p = 1$ имеем симметрическую группу S_n, отражения которой можно рассматривать и в действительном пространстве. Матрицу, у которой элементы ξ^{a_k} стоят на позициях $(k, \sigma(k))$ ($\sigma \in S_n$), будем обозначать парой $(\sigma, (a_1, a_2, \ldots, a_n))$. Пусть (i, j) обозначает транспозицию из симметрической группы, меняющую i-ый и j-ый элементы местами, а id — единичный элемент симметрической группы. Для группы $G(m,p,n)$ определим минимальное порождающее множество $T_{m,p,n}$ следующим образом:

- $s_i = ((i,i+1),(0,0,\dots,0))$, $i=\overline{1,n-1}$;
- $r = (\mathrm{id},(p,0,\dots,0))$ если $m>1$;
- $r^{-1} = (\mathrm{id},(-p,0,\dots,0))$ если $m>1$;
- $r_1 = ((1,2),(m-1,1,0\dots,0))$ если $m>1$ и $p>1$.

Теорема 2.2 позволяет доказать наличие свойства Люксбург-Радль-Хайна, например, у следующих семейств графов:

1. Семейство графов Кэли групп $G(m,p,n)$ (m и p фиксированы) с порождающим множеством $T_{m,p,n}$;
2. Семейство графов Кэли групп S_n, порожденных множеством транспозиций $\{(i,i+1)|i=\overline{1,n-1}\}$ — частный случай п.1;
3. Семейство графов Кэли групп S_n, порожденных множеством префикс-реверсалов $\{(1,i)(2,i-1)\dots(\lfloor(i+1)/2\rfloor,\lceil(i+1)/2\rceil)|i=\overline{2,n}\}$.

В заключительной части второй главы исследуется поведение среднего резистивного расстояния в графе.

Определение 2.23. Для $G=(V,E)$ назовем

$$R_{\mathrm{av}}(G) = \frac{2}{|V|(|V|-1)}\mathrm{Kf}(G),$$

средним резистивным расстоянием по всем парам вершин, где

$$\mathrm{Kf}(G) = \frac{1}{2}\sum_{u,v\in V, u\neq v} R_{u,v}$$

обозначает индекс Кирхгофа графа G.

Теорема 2.3. *Пусть $G_n=(V_n,E_n)$ — связный d_n-регулярный граф ($d_n\geq 3$). Для среднего резистивного расстояния R_{av} справедливы неравенства*

$$\frac{2}{d_n}\left(1-\frac{d_n}{(|V_n|-1)(d_n+1)}\right) \leq R_{\mathrm{av}}(G_n) \leq \frac{2}{d_n}\left(\frac{1}{\lambda_{2,n}\rho_n^2}+\frac{1}{1-\rho_n\sqrt{1+d_n-\gamma_n d_n}}\right),$$

где $\lambda_{2,n}$ — спектральный пробел G_n, $\gamma_n = |V_n|/(|V_n|-1)$, $\rho_n\in(0,\frac{1}{\sqrt{1+d_n-\gamma_n d_n}})$ — корень уравнения $\rho^3\lambda_{2,n}\sqrt{1+d_n-\gamma_n d_n} = 2(1-\rho\sqrt{1+d_n-\gamma_n d_n})^2$.

Следствие 2.2. *Если существует положительная константа* λ *такая, что* $\lambda_{2,n} \geq \lambda \ \forall n \geq n_0$, *то справедлива оценка*

$$R_{\text{av}}(G_n) = \Theta(1/d_n).$$

Более того, если $\lambda_{2,n} \to \infty$, $d_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то* $R_{\text{av}}(G_n) \sim 2/d_n$ *при* $n \to \infty$.

Примерами семейств графов, удовлетворяющих требованиям следствия 2.2, служат следующие:

1. Семейство графов Кэли групп S_n с порождающим множеством $\{(1,i) | i = \overline{2,n}\}$. Спектральный пробел этих графов равен 1. Используя оценки из теоремы 2.3, получаем, что справедливы неравенства $\liminf\limits_{n\to\infty} d_n R_{\text{av}}(G_n) \geq 2$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} d_n R_{\text{av}}(G_n) \leq 10.4383$, что можно записать в виде асимптотического неравенства $\frac{2}{n} \lesssim R_{\text{av}}(G_n) \lesssim \frac{10.4383}{n}$ при $n \to \infty$.

2. Семейство графов Кэли групп S_n, порожденных множеством всех транспозиций. Их спектральный пробел $\lambda_{2,n} = n$, т.е. имеем $R_{\text{av}}(G_n) \sim \frac{2}{d_n}$ при $n \to \infty$, где $d_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

В первом параграфе *третьей главы* исследуется экстремальность резистивных расстояний и их монотонность относительно геодезических.

На графе G порядка N рассмотрим квадратичную форму $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} (x_i - x_j)^2$$

(аргумент x_i соответствует вершине v_i), матрица которой равна матрице Лапласа. Для сопротивления между v_a и v_b справедливо следующее[1],

$$\frac{1}{R_{v_a,v_b}} = \inf_{x_i \in \mathbb{R}, x_a = 1, x_b = 0} f(x_1, \ldots, x_N).$$

Инфимум в левой части достигается в стационарной точке функции f. Координаты этой точки совпадают с потенциалами в соответствующих вершинах сети в физической интерпретации резистивного расстояния, в чем можно убедиться, например, с помощью метода множителей Лагранжа.

Определение 3.1. Граф H на N вершинах, для которого существует такой порядок $(v_1, \ldots, v_N)$ вершин, что для любого набора чисел $x_1 \leq \cdots \leq x_N$ и любой его перестановки σ :

$$f(x_1, \ldots, x_N) \leq f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}),$$

[1]Bollobás, B. Random Walks and Electrical Resistances in Products of Graphs / B. Bollobás, G. Brightwell // Discrete Applied Mathematics. – 1997. – Vol. 73, Iss. 1. – P. 69-79.

будем называть *упорядоченным.*

Теорема 3.1. *Пусть H — упорядоченный граф на N вершинах. Тогда для любого связного графа G резистивное расстояние $R_{(v_a,v_i),(v_b,v_j)}$ в графе $G \times H$ максимально при $i = 1$, $j = N$.*

Определение 3.2. В произведении $H_1 \times \cdots \times H_n$ упорядоченных графов будем называть вершины $(v_1, \ldots, v_n)$ и $(w_1, \ldots, w_n)$ *противоположными*, если существует такой порядок на каждом H_i, что v_i и w_i – первая и последняя вершины в нем, соответственно.

Теорема 3.2. *Пусть G — прямое произведение упорядоченных графов. Тогда максимальное резистивное расстояние в G достигается на паре противоположных вершин.*

Следствие 3.1. *Если G — прямое произведение некоторого набора полных графов, цепей и циклов, то максимальное резистивное расстояние в нем достигается на паре самых удаленных друг от друга вершин.*

Утверждение 3.1. *Пусть Q — n-мерный куб, а v, u, w — такие его вершины, что для геодезических расстояний между ними справедливо* $\mathrm{dist}_Q(v, u) \le \mathrm{dist}_Q(v, w)$. *Тогда $R_{v,u} \le R_{v,w}$.*

Второй параграф третьей главы посвящен похожей задаче для вероятностей состояний случайных блужданий. Здесь и далее рассматриваются «ленивые» блуждания — помимо перехода в смежную вершину они могут в следующий момент времени остаться в той же. Вероятности каждого из переходов полагаются одинаковыми, т.е. равными $1/(d_v+1)$, где d_v — степень вершины.

Введем частичный порядок на графе G относительно некоторой его вершины v: будем говорить, что $w \le_v u$, если существует кратчайшая цепь, соединяющая v и u, которая содержит w.

Определение 3.3. Будем называть граф G *монотонным*, если для любой его вершины v справедливо следующее: $\forall n \in \mathbb{N}$ и любых двух сравнимых вершин $w \le_v u$ существует инъекция из множества $P(u)$ цепей длины n, соединяющих v и u, во множество цепей $P(w)$ длины n, соединяющих v и w, обладающая следующим свойством: если в цепи $p(u) \in P(u)$ совпадают i-ая и $(i+1)$-ая вершины, то и в соответствующей ей цепи $p(w) \in P(w)$ эти вершины совпадают.

Теорема 3.3. *Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, где все графы G_i монотонны. Тогда для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \le_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n, начавшееся в v, заканчивается в w' не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w.*

Можно показать, что цепь и цикл — монотонные графы. Тогда справедливо, в частности, следующее.

Следствие 3.2. *Пусть граф G — d-мерная решетка (торическая в* *случае произведения циклов или квадратная в случае произведения цепей). Для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \leq_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n заканчивается в w' не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w.*

Последний параграф третьей главы посвящен времени перемешивания случайных блужданий. Время перемешивания характеризует, как быстро распределение вероятностей состояний случайного блуждания приближается к равномерному. Особенно глубоко время перемешивания исследовалось на различных графах Кэли симметрической группы S_n. Для нее с порождающим множеством, состоящим из транспозиций соседних элементов, Альдусом (1983) были доказаны оценки $C_1 n^3 \leq \tau_{\mathrm{mix},n} \leq C_2 n^3 \log n$. Мы же рассматриваем естественное обобщение симметрической группы — группу комплексных отражений $G(m,p,n)$ (при $p = 1$).

Определение 3.4. Пусть μ и ν — вероятностные меры на пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω конечно. *Расстояние по вариации* между этими мерами определяется по формуле

$$d(\mu, \nu) = \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Обозначим через π равномерное распределение на множестве S, через P^{X_t} — распределение вероятностей состояний случайного блуждания (X_t) на этом множестве в момент времени t.

Определение 3.5. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторая фиксированная величина. *Временем перемешивания* случайного блуждания (X_t) на S будем называть величину

$$\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, X_t) = \min\left\{t : d(P^{X_t}, \pi) < \varepsilon\right\}$$

Обозначим $\tau_{\mathrm{mix}}(m, n, \varepsilon)$ время перемешивания случайного блуждания на $\mathrm{Cay}(G(m,1,n), T_{m,1,n})$. Принимая вероятность для блуждания остаться на месте равной $\frac{1}{2}$, а вероятности перейти в смежную вершину по ребрам, соответствующим s_i, r и r^{-1}, — равными p_s, p_r и p_r (где $(n-1)p_s + 2p_r = \frac{1}{2}$), мы получаем следующие оценки для времени перемешивания $\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, m, n)$ в графе $\mathrm{Cay}(G(m,1,n), T_{m,1,n})$.

Теорема 3.4. *Для любого m выполняется следующая оценка на время перемешивания:*

$$\tau_{\mathrm{mix}}(m, n, \varepsilon) \geq \frac{n^2}{4p_s}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right).$$

Теорема 3.5. *Для любого m при $n \geq 4/\varepsilon$ для времени перемешива-*

ния справедлива следующая оценка:

$$\tau_{\text{mix}}(m,n,\varepsilon) \le \lceil 2\log_2 n \rceil \left(\left\lceil \frac{m\,(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil + \right.$$
$$\left. + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil + \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \right)$$

Следствие 3.3. *Пусть* $p_r = \dfrac{1}{4}$, $p_s = \dfrac{1}{2(n-1)}$. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *существуют положительные постоянные* $C_1(\varepsilon)$, $C_2(m)$ *такие, что для любого* $n \ge 4/\varepsilon$ *для времени перемешивания выполняются неравенства*

$$C_1(\varepsilon)n^3 \le \tau_{\text{mix}}(m,n,\varepsilon) \le C_2(m)n^3 \log n.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Установлено, что свойством Люксбург-Радль-Хайна обладают классы регулярных и почти регулярных графов, у которых не ограничены степени или стремится к нулю изопериметрическая постоянная. Введено понятие обобщенной изопериметрической постоянной, используемое для определения семейств слабых экспандеров и доказаны оценки на резистивное расстояние в них. Приведены оценки обобщенной изопериметрической постоянной для графов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Для семейств графов Кэли разработан новый метод получения явных и асимптотически точных оценок на резистивное расстояние. С помощью анализа спектра матрицы Лапласа доказаны оценки на среднее сопротивление в регулярном графе по всем парам вершин. Приведены условия, при которых эти оценки становятся асимптотически точными для семейства графов. Эти результаты получены в работах [1; 2] и изложены во второй главе диссертации.

2. Найдены пары вершин с максимальным сопротивлением между ними в графах квадратных и торических решеток, а также доказан более общий результат о паре вершин с максимальным сопротивлением в прямом произведении графов. Исследована упорядоченность вероятностей состояний ленивого случайного блуждания фиксированной длины в графе. Приведен общий метод доказательства наличия для них определенного слабого порядка. Показано, что метод может быть применен к квадратным и торическим решеткам. Эти результаты получены в работе [3] и изложены в третьей главе диссертации.

3. Разработан подход, использовавшийся в аналогичной задаче для симметрической группы и показано, что случайные блуждания на минимальных графах Кэли на группах комплексных отражений $G(m, 1, n)$ обладают свойством быстрого перемешивания. Этот результат получен в работе [4] и изложен в третьей главе диссертации.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты и методы диссертации могут быть использованы при проведении исследований метрических свойств графов, обладающих сложной алгебраической и комбинаторной структурой, и при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей по теории графов и сетей.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Vaskouski M. Resistance Distances in Cayley Graphs on Symmetric Groups / M. Vaskouski, A. Zadorozhnyuk // Discrete Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 227. – P. 121-135.

2. Васьковский М.М. Асимптотическое Поведение Резисторных Расстояний в Графах Кэли / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Доклады Нац. акад. Наук Беларуси. – 2018. – Т.26, №2. – С. 140-146.

3. Задорожнюк А.О. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечны решетках / А.О. Задорожнюк // Журнал Белорусского Государственного Университета. Математика. Информатика. – 2022. – №1. – С. 38-45.

4. Задорожнюк А.О. Аналог теоремы Альдуса о времени перемешивания для групп комплексных отражений / А.О. Задорожнюк // Известия Нац. акад. Наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2023. – Т.59, №1. – С. 51-61.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Vaskouski M. On estimating resistance distances in regular graphs / M. Vaskouski, A. Zadorozhnyuk // Еругинские чтения-2017: тез. докл. междунар. конф., Минск, 16-20 мая 2017 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2017. – Ч. 2. – С. 66.

6. Васьковский М.М. Оценки сопротивлений в ориентированных графах / М.М.Васьковский, А.О. Задорожнюк // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (ANM-2017): материалы междунар. науч.-техн. конф., Пенза, Россия, 4-6 декабря 2017 г. / Изд-во ПГУ; редкол.: И.В. Бойков [и др.]. – Пенза 2017. – С. 49-53.

7. Задорожнюк А.О. Новые изопериметрические методы построения асимптотически точных оценок резисторных расстояний в последовательностях графов с низкими параметрами спектрального расширения / А.О. Задорожнюк, М.М. Васьковский // Сборник научных

работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС 2018» / Редкол.: И.А. Старовойтова [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2019. – С. 23.

8. Васьковский М.М. Анализ и прогнозирование кредитных потерь с помощью дискретных моделей выживаемости / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Big Data and Advanced Analytics: сб. материалов междунар. науч.-практ. конф., Минск, 1-14 марта 2019 г. В 2 ч. / БГУИР; редкол.: В.А. Богуш [и др.]. — Минск, 2019. – Ч. 1. – С. 285–293.

9. Васьковский М.М. Асимптотические свойства решений дискретных уравнений Пуассона на графах Кэли / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Еругинские чтения-2019: тез. докл. междунар. конф., Могилев, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2019. – Ч. 2. – С. 65.

10. Васьковский М.М. Асимптотические оценки критических вероятностей возникновения гигантской компоненты связности при перколяции в графах Кэли групп комплексных отражений / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ, Москва, 23-29 ноября 2020 / МФТИ; редкол.: Н.Е. Кобзева. – Москва, 2020. – С. 72-73.

11. Васьковский М.М. О слабой сходимости распределений случайных блужданий на группах комплексных отражений / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. конф., Минск, 1-4 июня 2021 г./ Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2021. – С. 208-210.

12. Задорожнюк А.О. Явные оценки резисторных расстояний на минимальных графах Кэли симметрической группы / А.О. Задорожнюк, А.Д. Досова // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси; Ред. В.В. Лепин – Ч. 2. – Минск, 2021. – С. 4.

РЕЗЮМЕ

Задорожнюк Анна Олеговна

Свойства случайных блужданий на графах геометрических групп

Ключевые слова: случайное блуждание, резистивное расстояние, изопериметрическая постоянная, граф Кэли, группа комплексных отражений, время перемешивания.

Цель работы: исследование асимптотического поведения и экстремальности резистивных расстояний, а также времени перемешивания и упорядоченности вероятностей состояний случайного блуждания в семействах графов геометрических групп.

Методы исследования: методы теории графов.

Полученные результаты и их новизна: в диссертации разработаны новые методы получения точных асимптотических оценок резистивных расстояний в больших графах с высокой степенью связности, с помощью которых гипотеза Люксбург-Радль-Хайна доказана для ряда семейств слабых экспандеров; разработан новый метод анализа средних резистивных расстояний; получено обобщение теоремы Боллобаша и доказаны теоремы о монотонности и экстремальности резистивных расстояний; доказаны теоремы о монотонности вероятностей состояний случайных блужданий; доказан аналог теоремы Альдуса о времени перемешивания случайных блужданий на графах Кэли групп комплексных отражений.

Рекомендации по использованию: результаты и методы диссертации могут быть использованы при проведении дальнейших исследований свойств случайных блужданий, в частности на графах с плохими параметрами расширения, и при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей.

Область применения: результаты исследования могут быть применены в теории графов и теории вероятностей при исследовании свойств случайных блужданий на графах.

РЭЗЮМЭ

Задаражнюк Ганна Алегаўна

Уласцівасці выпадковых блуканняў на графах геаметрычных груп

Ключавыя словы: выпадковае блуканне, рэзістыўная адлегласць, ізаперыметрычная пастаянная, граф Кэлі, група камплексных адлюстраванняў, час перамешвання.

Мэта працы: даследаванне асімптатычных паводзін і экстрэмальнасці рэзістыўных адлегласцей, а таксама часу перамешвання і ўпарадкаванасці выпадковога блукання ў сямействах графаў геаметрычных груп.

Метады даследавання: метады тэорыі графаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна: у дысертацыі распрацаваны новыя метады атрымання дакладных асімптатычных ацэнак рэзістыўных адлегласцей у вялікіх графах з высокай ступенню сувязнасці, з дапамогай якіх гіпотэза Люксбург-Радль-Хайна даказана для некаторых сямействаў слабых экспандэраў; распрацаваны новы метад аналіза сярэдніх рэзістыўных адлегласцей; атрымана абагульненне тэарэмы Балабаша і даказаны тэарэмы аб манатоннасці і экстрэмальнасці рэзістыўных адлегласцей; даказаны тэарэмы аб манатоннасці імавернасцей станаў выпадковых блуканняў; даказан аналаг тэарэмы Альдуса аб хуткасці перамешвання выпадковых блуканняў на графах Кэлі груп камплексных адлюстраванняў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні: вынікі і метады дысертацыі могуць выкарыстоўвацца пры правядзенні далейшых даследаванняў уласцівасцей выпадковых блуканняў, у тым ліку на графах з дрэннымі параметрамі пашырэння, і пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей.

Вобласць ужывання: вынікі даследавання могуць выкарыстоўвацца ў тэорыі графаў і тэорыі імавернасцей пры даследаванні ўласцівасцей выпадковых блуканняў на графах.

RESUME

Zadarazhniuk Hanna

Properties of random walks on graphs of geometric groups

Keywords: random walk, resistance distance, isoperimetric constant, Cayley graph, complex reflection group, mixing time.

Objective: the study of asymptotic and extremal behaviour of resistance distances, mixing time and order of state probabilities of random walks in families of graphs of geometric groups.

Research methods: graph theory methods.

The results obtained and their novelty: new methods of obtaining exact asymptotic estimates on resistance distances in large graphs with high degree of connectivity are obtained; using them, the Luxburg-Radl-Hein hypithesis was proved for some families of weak expanders; new method of average resistance distance analysis is developed; a generalization of Bollobás' theorem is proved along with theorems about monotonicity and extremality of resistance distances; theorems about monotonicity of state probabilities of random walks are proved; an analogue of Aldous' theorem about mixing time of random walks is proved for Cayley graphs of complex reflection groups.

Recommendations for use: the results and methods of the thesis can be used for future study of properties of random walks, in particular on graphs with poor expansion parameters, and when reading special courses for students of mathematical specialities.

Application area: the results of the study can be applied in graph theory and probability theory when studying properties of random walks on graphs.