ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права
УДК 519.63

УТЕБАЕВ
Бахадыр Даулетбай улы

КОМПАКТНЫЕ И МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 — вычислительная математика

Минск, 2022

Научная работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Научный руководитель: **Матус Петр Павлович,**
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, главный научный сотрудник отдела информационных технологии Института математики Национальной академии наук Беларуси

Официальные оппоненты: **Галанин Михаил Павлович,**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, исполняющий обязанности заведующего отделом «Вычислительные методы и математическое моделирование» Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук»

Лемешевский Сергей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела исследований и разработки ООО «НТЦ «Симмэйкерс»

Оппонирующая организация: **Белорусский государственный университет**

Защита состоится «22» декабря 2022 г. в 14:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11. Тел. ученого секретаря +375 17 378 17 62, email: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «14» ноября 2022 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач вычислительной математики является построение и исследование разностных схем повышенного порядка точности, аппроксимирующих уравнения математической физики. Такие методы разработаны и хорошо обоснованы для линейных уравнений математической физики. Менее изучены эти вопросы в случае полулинейных и квазилинейных нестационарных уравнений в ограниченных областях. Некоторые методы построения схем высокого порядка аппроксимации условно можно классифицировать следующим образом: метод экстраполяции Ричардсона; использование многоточечных шаблонов; применение дифференциальных следствий исходных уравнений; компактные и бикомпактные аппроксимации.

При построении разностных схем высокого порядка аппроксимации для различных задач математической физики большую популярность получили *компактные разностные схемы*. Под компактными разностными схемами понимаются разностные схемы повышенных порядков аппроксимации и/или точности, записывающиеся на стандартных для данного уравнения шаблонах. Такие схемы используются для решения разных типов уравнений математической физики, включая системы гиперболических уравнений, уравнение теплопроводности, уравнение конвекции-диффузии и т.д. Построению и исследованию компактных разностных схем посвящены, например, работы Ш.Е. Микеладзе, Джима Дугласа (Jim Douglas), А.А. Самарского, В.К. Саульева, Джеймса Брэмбла (James Bramble), И.В. Фрязинова, В.К. Полевикова.

При теоретическом исследовании разностных схем основное внимание уделяется анализу таких свойств как аппроксимация, устойчивость и сходимость. Эти свойства послужили необходимой базой для широкого исследования и построения эффективных разностных схем для задач математической физики. Значительная работа по исследованию сходимости и устойчивости разностных схем была проделана для линейных задач. Наиболее сильные результаты получены А.А. Самарским, который создал общую теорию устойчивости линейных операторно-разностных схем.

При математическом моделировании прикладных задач выжным свойством является также и монотонность разностной схемы. Монотонные схемы позволяют получить численные решения без нефизических осцилляций. Существует достаточно много определений монотонности. В линейном случае наиболее часто используют определение, связанное с выполнением принципа максимума на сеточном уровне. Оно достаточно близко к определению монотонности схемы по Фридрихсу, т.е. в канонической форме записи разностного решения все коэффициенты неотрицательны, а их сумма равна единице (требование аппроксимации). Так как монотонные по Фридрихсу разностные схемы удовлетворяют принципу максимума, то в этом смысле условия выполнения принципа максимума являются более слабым условием, чем условия монотонности по Фридрихсу.

При построении разностных схем повышенного порядка точности для гиперболических уравнений первого порядка важно сохранить монотонность разностной схемы. Особую роль в формировании направления развития эффективных алгоритмов сыграла теорема Годунова[1], утверждающая, что линейные, монотонные разностные схемы не могут иметь порядок аппроксимации выше первого. Эта теорема фактически наложила запрет на поиск приемлемого решения в классе линейных алгоритмов безусловной аппроксимации и направила усилия математиков на построение и исследование нелинейных разностных схем. Тем не менее существуют схемы в вычислительной практике, которые относятся к разряду условной аппроксимации. Достаточно указать разностные схемы Саульева, Дюфорта-Франкела[2], Лакса-Вендроффа[3].

В связи с этим актуальным является развитие подходов к построению разностных схем повышенного порядка точности на стандартных шаблонах с сохранением свойства монотонности.

Так как для параболических уравнений на дифференциальном уровне имеет место принцип максимума, то для таких уравнении важно строить монотонные разностные схемы. Ярким представителем этих уравнении является уравнение Фишера, которое играет важную роль в математической биологии. Уравнение Фишера или Колмогорова–Петровского–Пискунова и его модификации встречаются в различных задачах, в том числе в теории горения, в теории фазовых переходов, в физике плазмы и др. В работе Ж. Маррея[4] (J.D. Murray) было предложено обобщенное уравнение Фишера (обобщенное уравнение Бюргерса-Фишера с нелинейной конвекцией), для учета различных видов конвективного движения. Анализу численного решения уравнения Фишера посвящены работы.[5,6]

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем на стандартных шаблонах. Основные направления исследований: монотонные разностные схемы условной аппрок-

[1] Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С.К. Годунов // Матем. сб. — 1959. — Т. 47(89), № 3. — С. 271–306.

[2] Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 616 с.

[3] Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. — М.: Мир, 1972.

[4] Murray, J.D. Mathematical biology: I. An introduction / J.D. Murray. — New York, Springer-Verlag, 2002.

[5] Mickens, R. E. A best finite difference scheme for the Fisher equation / R.E. Mickens // Numerical methods for partial differential equations. — 1994. — Vol. 10, № 5. — P. 581–585.

[6] Gazdag, J. Numerical solution of Fisher's equation / J. Gazdag, J. Canosa // Journal of applied probability. — 1974. — Vol. 11, № 3. — P. 445–457.

симации и произвольного порядка точности для гиперболических уравнений первого порядка; компактные и монотонные разностные схемы для линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена в отделе информационных технологий государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Результаты диссертационного исследования использовались при выполнении государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2020 » на 2016–2020 гг. – задание 1.5.01 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения задач для дифференциальных уравнений», № госрегистрации 20160176; при выполнении государственной программы научных исследований « Конвергенция – 2025 » на 2021–2025 гг., – задание 1.4.01 «Методы вычислительной математики и математического моделирования физических, технических и технологических процессов», НИР1 «Численные методы моделирования физических, технических и технологических процессов», № госрегистрации 20210251.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является построение и исследование компактных и монотонных разностных схем на стандартных шаблонах, аппроксимирующих гиперболические уравнения первого порядка, линейные, полулинейные и квазилинейные параболические уравнения.

Для достижения этой цели в ходе работы над диссертацией были поставлены следующие задачи:

– построить и исследовать монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для гиперболических уравнений первого порядка в одномерном и двумерном случаях; доказать сходимость разностного решения к точному решению в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае;

– на равномерных сетках для линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений построить монотонные и компактные разностные схемы;

– для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией построить компактные и монотонные разностные схемы.

Объектом исследования являются разностные схемы, аппроксимирующие гиперболические уравнения первого порядка; линейные, полулинейные и квазилинейные уравнения параболического типа. *Предметом исследования* являются компактность и монотонность таких разностных схем.

Научная новизна

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключается в следующем:

1. для одномерного и двумерного гиперболического уравнения первого порядка построены монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности, доказаны оценки точности разностного решения в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае;

2. для параболических уравнений на стандартных шаблонах построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы, доказаны устойчивость и монотонность компактных схем, аппроксимирующих полулинейные уравнения Фишера;

3. для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией разработаны компактные разностные схемы, доказана их монотонность и получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе двусторонних оценок сеточного решения.

Положения, выносимые на защиту

В настоящей диссертационной работе получены и выносятся на защиту следующие результаты:

1. монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для одномерного и двумерного гиперболического уравнения первого порядка, оценки точности разностных схем в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае;

2. монотонные и компактные разностные схемы на стандартных шаблонах для линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений, априорные оценки устойчивости для полулинейного уравнения Фишера;

3. компактные и монотонные разностные схемы для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией, двусторонние оценки сеточного решения.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты диссертационной работы и положения, выносимые на защиту получены автором лично. Работы [1–4] опубликованы в соавторстве с научным руководителем доктором физико-математических наук, профессором, членом-корреспондентом НАН Беларуси П.П. Матусом. Научному руководителю принадлежат постановка задач и общие рекомендации относительно методов их решения, а автору диссертации – реализация этих рекомендаций и доказательство соответствующих результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- на XVII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке» (г. Минск, 2020);
- на XVIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке» (г. Минск, 2021);
- на Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (г. Минск, 2021);
- на X Международной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г. Саранск, 2022);
- на Международной конференции «Partial differential equations and related topics» (г. Белгород, 2022);
- на Международной конференции «Computational models and technologies» (г. Ташкент, 2022).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 научных работах, из которых 5 – статьи в научных журналах в соответствии с частью первой п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 2.7 авт. л.), 6 – тезисы докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из содержания, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Список использованных источников содержит 114 наименований, из которых 11 - собственные публикации автора. Полный объем диссертации составляет 99 страниц, включая 4 рисунка и 13 таблиц, встроенных в текст.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы и изложены результаты, полученные в диссертации.

В **первой главе** дается аналитический обзор литературы по теме исследований.

Вторая глава посвящена построению и исследованию монотонных разностных схем произвольного порядка точности для линейного гиперболического уравнения первого порядка или уравнения переноса.

В **разделе 2.1** в прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассматривается начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \mathrm{const} > 0, \quad 0 < x \le l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u\left(0,t\right) = \mu\left(t\right), \quad t > 0, \quad u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \left[0,l\right]. \tag{2}$$

В области $\bar{Q}_T$ вводятся обычные равномерные сетки узлов с постоянными шагами h, τ соответственно по пространству и времени

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \bar{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0,N}, \quad hN = l\right\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \left\{x_0 = 0\right\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{t_n = n\tau,\ n = \overline{0,N_0}, \quad \tau N_0 = T\right\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \left\{t_0 = T\right\}, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau.$$

Для численного решения задачи (1), (2) используется широко известная явная схема бегущего счета “левый уголок”

$$y_t + a y_{\bar{x}} = 0, \tag{3}$$

$$y\left(0,\hat{t}\right) = \mu\left(\hat{t}\right), \quad t \in \omega_\tau, \quad y\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{4}$$

или в индексной форме

$$y_i^{n+1} = \left(1-\gamma\right) y_i^n + \gamma y_{i-1}^n, \quad i = \overline{1,N}; \quad n = \overline{0,N_0-1},$$

где $\gamma = a\tau/h$ – число Куранта, удовлетворяющее условию монотонности и устойчивости решения разностной схемы

$$0 < \gamma \le 1. \tag{5}$$

Рассматривается следующая задача для погрешности метода $z = y - u$

$$z_i^{n+1} = \left(1-\gamma\right) z_i^n + \gamma z_{i-1}^n + \tau\psi_i^n,$$

$$z_0^{n+1} = 0, \quad z_i^0 = 0.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x,t) \in C^{k+1}_{k+1}(\bar{Q}_T)$ *и выполнено условие*

$$\gamma = 1 - \alpha h^{k-1},$$

где $\alpha \geq 0$ *– произвольная постоянная, удовлетворяющая условию* (5), $k \geq 1$ *– целое число. Тогда решение разностной схемы "левый уголок"* (3), (4) *сходится к точному решению дифференциальной задачи* (1), (2) *с произвольным порядком* k *и для произвольного* $n = 0, 1, 2..., N_0 - 1$ *имеет место оценка*

$$\left\|z^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \leq T\|\psi^n\|_C \leq c\left(h^k + \tau^k\right), \quad k \geq 1, \quad c = const > 0.$$

Здесь $\|\cdot\|_{\bar{C}} = \max\limits_{x \in \bar{\omega}_h} \|\cdot\|, \quad \|\cdot\|_C = \max\limits_{x \in \omega_h} \|\cdot\|.$

В **разделе 2.2** для неоднородного уравнения показывается, что аналогичными свойствами обладает как чисто неявная схема "по потоку", так и целый класс схем со взвешиванием сеточного решения как по времени, так и по пространству.

В **разделе 2.3** построены аналогичные монотонные и устойчивые методы произвольного порядка точности для двумерного уравнения переноса.

В области

$$\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T], \ \bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : \ 0 \leq x_k \leq l_k, \ k = 1,2\} = \Omega \cup \partial\Omega,$$

$$\partial\Omega = \left\{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \ x_k = 0, \ k = 1,2\right\},$$

рассматривается следующая начально-краевая задача для двумерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \ t \in (0,T], \ b_k = const > 0, \ k = 1,2, \quad (6)$$

$$u|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = g(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad (7)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (8)$$

В $\bar{\Omega}$ вводится равномерная прямоугольная сетка

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2},$$

$$\bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \ i_\alpha = 0,1,...,N_\alpha, \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha\right\} = \omega_{h_\alpha} \cup \{0\},$$

$$\alpha = 1,2, \ \partial\bar{\omega}_h = \omega_h \cap \partial\Omega.$$

На отрезке $[0,T]$ используется равномерная временная сетка $\bar{\omega}_\tau$ с постоянным шагом τ.

При получении необходимых результатов при аппроксимации производных по одному направлению взвешивается численное решение по другому пространственному направлению. Далее используются обозначения

$$y_{(\mu_1)} = \mu_1 y_{i_1 i_2} + (1-\mu_1)\, y_{i_1-1 i_2},$$

$$y_{(\mu_2)} = \mu_2 y_{i_1 i_2} + (1-\mu_2)\, y_{i_1 i_2-1}, \quad 0 \le \mu_1, \mu_2 \le 1.$$

Для аппроксимации задачи (6)–(8) применяется разностная схема вида

$$y_t + b_1 y_{(\mu_2)\bar{x}_1} + b_2 y_{(\mu_1)\bar{x}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_h,\ t \in \omega_\tau, \tag{9}$$

$$y|_{\mathbf{x}\in\partial\omega_h} = g(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\omega_h \times \omega_\tau, \tag{10}$$

$$y(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}_h. \tag{11}$$

Запишем разностное уравнение (9) в каноническом виде схемы бегущего счета:

$$y_{i_1 i_2}^{n+1} = (1-\gamma_1\mu_2-\gamma_2\mu_1)\, y_{i_1 i_2}^n + (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2(1-\mu_1))\, y_{i_1-1 i_2}^n + \tag{12}$$

$$+ (\gamma_2\mu_1 - \gamma_1(1-\mu_2))\, y_{i_1 i_2-1}^n + (\gamma_1(1-\mu_2)+\gamma_2(1-\mu_1))\, y_{i_1-1 i_2-1}^n.$$

Тогда при выполнении условий

$$0 < \gamma_1, \gamma_2 \le 1, \quad \gamma_1\mu_2 + \gamma_2\mu_1 \le 1,$$

все коэффициенты в (12) неотрицательны. Следовательно, разностная схема (9)–(11) является монотонной.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $u(x,t) \in C_{k+1}^{k+1,k+1}\left(\bar{Q}_T\right)$ *и выполнены условия*

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad \gamma = 1 - \alpha\left(h_1^k + h_2^k\right) > 0.$$

Тогда решение разностной схемы $(9)-(11)$ *сходится к точному решению дифференциальной задачи* $(6)-(8)$ *с произвольным порядком* k *и для произвольного* $n = 0, 1, 2, , ..., N_0 - 1,$ *имеет место оценка*

$$\left\|z^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le T\|\psi^n\|_C \le c_1\left(h_1^k + h_2^k + \tau^k\right), \quad k \ge 1, \quad c_1 = const > 0.$$

Раздел 2.4 посвящен построению монотонных разностных схем условной аппроксимации и произвольного порядка точности для трехмерного уравнения переноса.

В **разделе 2.5** приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих теоретический порядок точности предложенных вычислительных методов.

В **третьей главе** на стандартных шаблонах строятся и исследуются монотонные и компактные разностные схемы для линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений.

В **разделе 3.1** рассматривается каноническая форма записи разностной схемы общего вида.

Пусть задано начальное число точек – сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где ω_h – множество внутренних точек, γ_h – множество граничных узлов. Окрестностью точки x называется множество $M'(x) = M(x) \backslash x$, $M(x)$ – шаблон. Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x,\xi)$, $F(x)$, определенные при любых $x \in \omega_h$ и принимающие вещественные значения. Далее каждой точке $x \in \omega_h$ сопоставим одно и только одно уравнение вида

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \tag{13}$$

называемое *канонической формой записи* разностной схемы. Для уравнения (13) в граничных узлах зададим условие Дирихле

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{14}$$

Предполагается выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0,\ B(x,\xi) > 0 \ \text{ для всех } \ \xi \in M'(x),\, x \in \omega_h, \tag{15}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi) > 0 \ \text{ для всех } \ \xi \in M'(x),\, x \in \omega_h, \tag{16}$$

гарантирующих однозначную разрешимость, монотонность и её устойчивость в равномерной норме по отношению к малому возмущению входных данных.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов* (15), (16). *Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы* (13), (14) *принадлежит интервалу изменения входных данных:*

$$m_1 \le y(x) \le m_2, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$m_1 = \min\left\{\min_{x\in\gamma_h}\mu(x), \min_{x\in\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\right\},$$

$$m_2 = \max\left\{\max_{x\in\gamma_h}\mu(x), \max_{x\in\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\right\}.$$

Раздел 3.2 посвящен исследованию свойств монотонности компактной разностной схемы А.А. Самарского[7] для линейного параболического уравнения с постоянными коэффициентами.

В **разделе 3.3** в области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \cup [0, T]$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \{x : 0 \le x \le l\}$, Γ– граница области, рассматривается начально-краевая задача для уравнения Фишера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1-u) + f_1(x,t), \quad 0 < x < l, \ 0 < t \le T, \ \ \lambda = const > 0, \tag{17}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0, \ 0 \le x \le l, \ \ u(x,t) = \mu(x,t) \ge 0; \ x \in \Gamma, \tag{18}$$

где $f_1(x,t) \ge 0$ для всех $(x,t) \in Q_T$, т.е. априори предполагается неотрицательность всех входных данных.

Всюду в дальнейшем предполагается, что:

1) решение соответствующих дифференциальных задач существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных задачи (корректность по Адамару);

2) все функции, входящие в дифференциальные уравнения, имеют необходимое число непрерывных и ограниченных производных, требуемых по ходу изложения.

На равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \left\{(x_i, t_n) \in \bar{Q}_T\right\}$ дифференциальная задача (17), (18) аппроксимируется разностной схемой с весом вида

$$y_t = y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} + \bar{f} + \overline{f}_1, \quad \sigma = 1 - h^2/(12\tau), \quad 0 < \sigma < 1, \tag{19}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \ x \in \bar{\omega}_h, \ \ \hat{y}_0 = \mu_1, \ \hat{y}_N = \mu_2. \tag{20}$$

Здесь

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{n+1} + (1-\sigma) y^n,$$

$$\overline{f} = \lambda \bar{y} - \frac{5\lambda}{6} y\hat{y} - \frac{\lambda}{12}(y_-\hat{y}_- + y_+\hat{y}_+), \ y_\pm = y_{i\pm1}, \ \bar{y} = \frac{5}{6}y + \frac{1}{12}(y_- + y_+), \ \hat{y} = y^{n+1}.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены следующие условия*

$$h < h_0, \quad h_0^2 < \frac{12}{\lambda m_2} e^{\lambda T}, \quad \tau > \frac{h^2}{12 - h^2 \lambda e^{\lambda T} m_2}. \tag{21}$$

Тогда разностное решение $y(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\omega}$ *неотрицательно и для всех* $i = 0, 1, ..., N$, $k = 0, 1, ..., N_0$, *имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \le y_i^k \le e^{\lambda t_k} m_2,$$

[7]Самарский, А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А.А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1963. — Т. 3, № 5. — С. 812–840.

где $m_2 = \max\limits_{(x,t)\in Q_T} \left\{\max\left\{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\right\} + Tf_1(x,t)\right\}.$

Следствие 3.2. *Для решения разностной схемы* (19), (20) *имеет место априорная оценка*

$$\|y^n\|_C \leq m_2 e^{\lambda t_n}, \quad n = 0, 1, ...N_0.$$

В **разделе 3.3** также доказывается монотонность разностной схемы (19), (20).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2*. Тогда имеет место оценка*

$$\left\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\right\|_C \leq$$
$$\leq e^{c_1 t_{n+1}} \left\{\max\left(\max_{k,t} \left|\tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t)\right|, \|\tilde{u}_0 - u_0\|_C\right) + \sum_{s=1}^{n} \tau \left\|\tilde{\bar{f}}_1^s - \bar{f}_1^s\right\|_C\right\},$$

выражающая устойчивость разностной схемы (19), (20) *по отношению к малому возмущению всех входных данных.*

В **разделе 3.4** рассматривается важный для приложений класс квазилинейных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u\right),$$

которые могут быть переписаны в эквивалентной форме уравнений типа быстрой диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\phi(u)\right) + f\left(x, t, u\right), \ \phi' = k(u) \geq k_1 > 0, \tag{22}$$

с начальным и граничными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \ 0 \leq x \leq l, \quad u(x,t) = \mu(x,t); \ x \in \Gamma.$$

Для аппроксимации уравнения (22) предлагается компактная разностная схема порядка 4+2, т.е. четвертого порядка по пространственной переменной и второго по временной на стандартном шаблоне вида

$$y_t = \left(\phi(y)\right)^{(\sigma)}_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} y_{t\bar{x}x} + \varphi\left(y\right), \ \sigma = 0.5,$$
$$y\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \ x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = \mu_1, \ \hat{y}_N = \mu_2,$$

где

$$\varphi\left(y\right) = \frac{5}{6} f_i^{(0.5)} + \frac{1}{12}\left(f_{i-1}^{(0.5)} + f_{i+1}^{(0.5)}\right).$$

Для ее реализации применялся метод Ньютона.

В **разделе 3.5** приводятся результаты тестовых расчетов, которые иллюстрируют повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах.

Четвертая глава посвящена построению и исследованию на стандартных шаблонах компактных и монотонных разностных схем для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией, а также для линейных уравнений конвекции-диффузии.

В **разделе 4.1** приводятся вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования разностных схем. В частности, приводятся компактные безусловно монотонные разностные схемы четвертого порядка точности для одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии.

Раздел 4.2 посвящен построению и исследованию компактных разностных схем для уравнений конвекции-диффузии с дивергентными и недивергентными конвективными слагаемыми. Построение таких схем базируется на использовании экспоненциальных разностных схем[8].

В **разделе 4.3** в прямоугольнике $\bar{Q}_T$ рассматривается начально-краевая задача для одномерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+u\left(1-u\right),\quad 0<x<l,\quad 0<t\le T, \tag{23}$$

с начальным и граничными условиями

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\quad u_0\left(x\right)\ge 0,\quad x\in\bar{\Omega}, \tag{24}$$

$$u\left(0,t\right)=\mu_1\left(t\right)\ge 0,\quad u\left(l,t\right)=\mu_2\left(t\right)\ge 0,\quad t\in\left(0,T\right], \tag{25}$$

т.е. априори предполагается неотрицательность входных данных.

На равномерной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальная задача (23)–(25) аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{gathered}\left(1+\lambda\right)y_t=\sigma\left(\kappa\hat{y}_{\bar{x}x}-b^+\hat{y}_{\bar{x}}-b^-\hat{y}_x\right)+\left(1-\sigma\right)\left(\kappa y_{\bar{x}x}-b^+y_{\bar{x}}-b^-y_x\right)+\\ +\frac{h^2}{12}\left(\kappa(y-y\hat{y})_{\bar{x}x}-b^+(y-y\hat{y})_{\bar{x}}-b^-(y-y\hat{y})_x\right)+\\ \tilde{a}\left(\tilde{\kappa}\hat{y}_{\bar{x}x}-\tilde{b}^+\hat{y}_{\bar{x}}-\tilde{b}^-\hat{y}_x\right)+\left(y-y\hat{y}\right)\left(1+\lambda\right),\end{gathered} \tag{26}$$

$$y\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ x\in\bar{\omega}_h,\quad \hat{y}_0=\mu_1,\ \hat{y}_N=\mu_2, \tag{27}$$

[8]Самарский, А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — “Едиториал УРСС”, 1999. — 248 с.

где

$$\lambda = h^2 / (12\sigma_1) \geq 0, \quad \sigma = 1 - h^2 / (12\tau),$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + R + R^2 + R^3}, \quad R = \frac{h|b|}{2}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{1 + \tilde{R} + \tilde{R}^2 + \tilde{R}^3}, \quad \tilde{R} = \frac{h\left|\tilde{b}\right|}{2},$$

$$b = b(y) = h'(y_i^n) + O\left(h^4\right), \quad b^+ = 0.5(b + |b|) \geq 0, \quad b^- = 0.5(b - |b|) \leq 0,$$

$$\tilde{b} = \frac{r_2 + \sigma_1 b}{r_1 + \sigma_1}, \quad \tilde{b}^+ = 0.5\left(\tilde{b} + \left|\tilde{b}\right|\right) \geq 0, \quad \tilde{b}^- = 0.5\left(\tilde{b} - \left|\tilde{b}\right|\right) \leq 0,$$

$$r_2 = (b(y))_{\bar{x}x} - b(y)(b(y))_x, \quad \tilde{a} = \frac{h^2}{12}(r_1 + \sigma_1), \quad r_1 = b(y)^2 - 2(b(y))_x.$$

Параметр регуляризации σ_1 определяется из условия $\tilde{a} > 0$, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma_1(y_i^n) = \begin{cases} -\min\limits_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 1 \leq n \leq N_0}} \{r_1(y(x_i, t_{n-1}))\}, & \text{если } r_1 < 0, \\ 0, & \text{если } r_1 > 0. \end{cases}$$

Доказывается, что разностная схема (26), (27) аппроксимирует задачу (23)-(25) с четвертым порядком по пространственной переменной и первым по временной.

Пусть

$$m_3 = \min_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \{\min\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, u_0(x)\},$$

$$m_4 = \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \{\max\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, u_0(x)\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (21) *. Тогда разностное решение* $y(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\omega}$ *неотрицательно и для всех* $i = 0, 1, ..., N$, $k = 0, 1, ..., N_0$, *имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \leq y_i^k \leq e^{\lambda t_k} m_4.$$

Следствие 4.1. *Для решения разностной схемы* (26), (27) *имеет место априорная оценка*

$$\|y^n\|_C \leq m_4 e^{\lambda t_n}, \quad n = 0, 1, ... N_0.$$

При выполнении условий (21) разностная схема (26), (27) является монотонной.

В **разделе 4.3** также приводятся вычислительные эксперименты, которые иллюстрируют эффективность рассматриваемых методов.

Раздел 4.4 посвящен построению и исследованию компактных и монотонных разностных схем на 9-точечном шаблоне для двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекции.

Пусть в области

$$\bar{Q}_T = \left\{(x,t) : x \in \bar{\Omega},\ 0 \le t \le T\right\},\ x = (x_1, x_2),$$

$$\bar{\Omega} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\},\ \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega,$$

где $\partial\Omega$ – граница, требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющей начально-краевой задаче для двумерного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - h'_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + u(1-u),\quad x \in \Omega,\quad t \in (0,T], \tag{28}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(x,t) = \mu(x,t) \ge 0,\quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{29}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0,\quad x \in \bar{\Omega}. \tag{30}$$

В области $\bar{Q}_T$ рассматривается равномерная сетка $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где множество внутренних узлов пространственной сетки определяется соотношением

$$\omega_h = \left\{x = \left(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}\right),\ x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1},\ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha,\ \alpha = 1,2\right\},$$

а через γ_h обозначено множество ее граничных узлов. На сетке $\bar{\omega}$ дифференциальная задача (28)–(30) аппроксимируется разностной схемой

$$(1+\lambda)\, y_t = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\Lambda_\alpha^{(b)} \sigma_\alpha \hat{y} + \Lambda_\alpha^{(b)} (1-\sigma_\alpha)\, y\right) + \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha^{(b)} \Lambda_{3-\alpha}^{(b)} \hat{y} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\sigma_0^* h^2}{12} \Lambda_\alpha^{(b)} \hat{y} + \tilde{a}_\alpha \Lambda_\alpha^{(\tilde{b})} \hat{y} + \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha^{(b)} y (1-\hat{y})\right) + (1+\lambda)\, y(1-\hat{y}), \tag{31}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t),\quad x \in \gamma_h,\quad t \in \omega_\tau,\quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$y(x,0) = u_0(x),\quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{32}$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{12}\left(\sigma_0^* + \sigma_1^*\right),\quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,\quad \sigma_\alpha = 1 - \frac{h_\alpha^2}{12\tau},$$

$$\Lambda_\alpha^{(b)} y = \kappa_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)\, y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)\, y_{x_\alpha},$$
$$\Lambda_\alpha^{(b)} y\hat{y} = \kappa_\alpha (y\hat{y})_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)\, (y\hat{y})_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)\, (y\hat{y})_{x_\alpha},$$
$$\Lambda_\alpha^{(b)} \hat{y} = \kappa_\alpha \hat{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)\, \hat{y}_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)\, \hat{y}_{x_\alpha}, \quad \kappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha + R_\alpha^2 + R_\alpha^3}, \quad R_\alpha = \frac{h_\alpha |b_\alpha|}{2},$$
$$\Lambda_\alpha^{(\tilde{b})} \hat{y} = \tilde{\kappa}_\alpha \hat{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^+(y)\, \hat{y}_{\bar{x}_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^-(y)\, \hat{y}_{x_\alpha}, \quad \tilde{\kappa}_\alpha = \frac{1}{1 + \tilde{R}_\alpha + \tilde{R}_\alpha^2 + \tilde{R}_\alpha^3}, \quad \tilde{R}_\alpha = \frac{h_\alpha \left|\tilde{b}_\alpha\right|}{2},$$
$$\Lambda_\alpha^{(b)} \Lambda_{3-\alpha}^{(b)} = \kappa_\alpha \left(\kappa_{3-\alpha} \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha} x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\, \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\, \hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right) -$$
$$-b_\alpha^+(y) \left(\kappa_{3-\alpha} \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha} x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\, \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\, \hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right) -$$
$$-b_\alpha^-(y) \left(\kappa_{3-\alpha} \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha} x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\, \hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\, \hat{y}_{x_{3-\alpha}}\right),$$
$$\tilde{a}_\alpha = \frac{h^2}{12} \left(\frac{h_\alpha^2}{h^2} r_{1\alpha} + \sigma_1^*\right), \quad r_{1\alpha} = b_\alpha^2 - 2(b_\alpha)_{x_\alpha},$$
$$\tilde{b}_\alpha = \frac{h^2}{12\tilde{a}} \left(r_{2\alpha} + b\sigma_1^*\right), \quad r_{2\alpha} = \Lambda_\alpha^{(b)}(b_\alpha), \quad b = h'_\alpha \left(y_{i_1 i_2}^n\right).$$

Параметр регуляризации σ_1^* определяется из условия $\tilde{a}_\alpha > 0$, т.е.

$$\sigma_1^* = \sigma_1^*\left(y_{i_1 i_2}^n\right) = \begin{cases} -\min\limits_\alpha \{r_{1\alpha}\}, & \text{если } r_{1\alpha} < 0, \\ 0, & \text{если } r_{1\alpha} > 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\sigma_0^* \geq \max_\alpha \left\{\frac{2}{h_\alpha^2}\right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5},$$

и

$$\max_{\alpha=1,2} \{h_\alpha\} < h_0, \quad h_0^2 = \frac{12}{m_5} e^T, \quad \tau > \tau_0, \quad \tau_0 = \max_{\alpha=1,2} \left\{\frac{h_\alpha^2}{12 - h_\alpha^2 e^T m_5}\right\}.$$

Тогда разностное решение $y(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\omega}$, *неотрицательно и для всех* $i = 0, 1, ..., N$, $k = 0, 1, ..., N_0$, *имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \leq y_{i_1, i_2}^k \leq e^{t_k} m_5,$$

где $m_5 = \max\limits_{(x,t) \in Q_T} \left\{\max\left\{\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t)\right\}, u_0(x)\right\}$.

При выполнений условий теоремы 4.3. разностная схема (31), (32) является монотонной.

Следствие 4.2. *Для решения разностной схемы* (31), (32) *имеет место априорная оценка*

$$\|y^n\|_C \leq m_5 e^{\lambda t_n}, \quad n = 0, 1, ...N_0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию компактных и монотонных разностных схем на стандартных шаблонах, аппроксимирующих гиперболические уравнения первого порядка, линейные, полулинейные и квазилинейные параболические уравнения.

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. для одномерного и двумерного гиперболического уравнения первого порядка построены монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности, доказаны оценки точности разностного решения в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае [1, 6];

2. для параболических уравнений на стандартных шаблонах построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы, доказаны устойчивость и монотонность компактных схем, аппроксимирующих полулинейные уравнения Фишера [2, 3, 5, 7, 8, 11];

3. для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией разработаны компактные разностные схемы, доказана их монотонность и получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе двусторонних оценок сеточного решения [4, 9, 10].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы при построении компактных разностных схем для различных типов уравнений математической физики и в численном моделировании. Они могут быть полезными при чтении специальных курсов по теории разностных схем.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в рецензируемых научных журналах

1. Матус, П.П. Монотонные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для уравнения переноса / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 367–380.

2. Матус, П.П. Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2020. — Т. 64, № 4. — С. 391–398.

3. Матус, П.П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Мат. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 60–78.

4. Матус, П.П. Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 947–961.

5. Утебаев, Б.Д. Компактные разностные схемы для уравнений конвекции-диффузии / Б.Д. Утебаев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. — 2021. — Т. 57, № 3. — С. 311–318.

Тезисы докладов

6. Утебаев, Б.Д. О монотонных схемах произвольного порядка точности для уравнения переноса / Б.Д. Утебаев // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 ноября, 2021 г.: в 2 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т матем., Белорус. гос. ун-т.; сост.: В.В. Лепин. — Минск, 2021. — Ч. 2. — С. 50–51.

7. Утебаев, Б.Д. О компактных разностных схемах для параболических уравнений / Б.Д. Утебаев // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: аннотации докл. X Междунар. науч. молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского, Саранск, 14–18 июля, 2022 г. / Нац. исслед. Мордовский гос. ун-т; редкол.: О.С. Язовцева [и др.]. — Саранск, 2022. — С. 49.

8. Утебаев, Б.Д. О монотонных схемах повышенного порядка точности / Б.Д. Утебаев // Молодежь в науке – 2020: тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. молодых ученых, Минск, 22–25 сентября, 2020 г. / Нац.

акад. наук Беларуси, Совет молодых ученых; редкол.: В.Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск, 2020. — С. 407–408.

9. Утебаев, Б.Д. Компактные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера / Б.Д. Утебаев // Уравнения в частных производных (PDERT'22): сб. материалов Междунар. конф., Белгород, 15–19 июля, 2022 г. / Белгородский гос. нац. исслед. ун-т; под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. — Белгород, 2022. — С. 138.

10. Утебаев, Б.Д. Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией / Б.Д. Утебаев // Computational models and technologies: Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia International Conference, Tashkent, 16–17 September, 2022. / National University of Uzbekistan [et al.]; ed: A.R. Hayotov, M.U. Khudoyberganov. — Tashkent, 2022. — P. 68.

11. Утебаев, Б.Д. Компактные разностные схемы для уравнений конвекций-диффузии / Б.Д. Утебаев // Молодежь в науке – 2021: тез. докл. XVIII Междунар. науч. конф. молодых ученых, Минск, 27–30 сентября, 2021 г.: в 2 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Совет молодых ученых; редкол.: В.Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск, 2021. — Ч. 2. — С. 195–197.

РЭЗЮМЭ

Уцябаев Бахадыр Даулетбай улы

Кампактныя і манатонныя рознасныя схемы для гіпербалічных ураўненняў першага парадку і парабалічных ураўненняў

Ключавыя словы: кампактная рознасная схема, манатонная рознасная схема, прынцып максімума, двухбаковая ацэнка, схема адвольнага парадку дакладнасці, раўнанне Фішэра, раўнанне канвекцыі-дыфузіі

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца пабудова і даследаванне кампактных і манатонных рознасных схем на стандартных шаблонах, якія апраксімуюць гіпербалічныя ўраўненні першага парадку, лінейныя, паўлінейныя і квазілінейныя парабалічныя ўраўненні.

Метады даследавання: метады тэорыі рознасных схем.

У дысертацыі атрыманы наступныя **навуковыя вынікі**.

1. Для аднамернага і двухмернага гіпербалічнага ўраўненні першага парадку пабудаваны манатонныя рознасныя схемы ўмоўнай апраксімацыі і адвольнага парадку дакладнасці, даказаны ацэнкі дакладнасці рознаснага рашэння ў сеткавым аналагу раўнамернай нормы ў лінейным выпадку.

2. Для парабалічных раўнанняў на стандартных шаблонах пабудаваны і даследаваны кампактныя і манатонныя рознасныя схемы, даказаны ўстойлівасць і манатоннасць кампактных схем, якія апраксімуюць паўлінейныя раўнанні Фішэра.

3. Для аднамернага і двухмернага абагульненага ўраўнення Фішэра з нелінейнай канвекцыяй распрацаваны кампактныя рознасныя схемы, даказана іх манатоннасць і атрыманы апрыёрныя ацэнкі рознаснага рашэння ў нелінейным выпадку на аснове двухбаковых адзнак сеткавага рашэння.

Рэкамендацыі па практычным выкарыстанні. Атрыманыя вынікі могуць быць скарыстаны пры пабудове кампактных рознасных схем для розных тыпаў раўнанняў матэматычнай фізікі і ў лікавым мадэляванні. Яны могуць быць карыснымі пры чытанні спецыяльных курсаў па тэорыі рознасных схем.

Галіна прымянення: Тэорыя рознасных схем

РЕЗЮМЕ

Утебаев Бахадыр Даулетбай улы

Компактные и монотонные разностные схемы для гиперболических уравнений первого порядка и параболических уравнений

Ключевые слова: компактная разностная схема, монотонная разностная схема, принцип максимума, двусторонняя оценка, схема произвольного порядка точности, уравнение Фишера, уравнение конвекции-диффузии

Целью диссертационной работы является построение и исследование компактных и монотонных разностных схем на стандартных шаблонах, аппроксимирующих гиперболические уравнения первого порядка, линейные, полулинейные и квазилинейные параболические уравнения.

Методы исследования: методы теории разностных схем.

В диссертации получены следующие **научные результаты**.

1. Для одномерного и двумерного гиперболического уравнения первого порядка построены монотонные разностные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности, доказаны оценки точности разностного решения в сеточном аналоге равномерной нормы в линейном случае.

2. Для параболических уравнений на стандартных шаблонах построены и исследованы компактные и монотонные разностные схемы, доказаны устойчивость и монотонность компактных схем, аппроксимирующих полулинейные уравнения Фишера.

3. Для одномерного и двумерного обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией разработаны компактные разностные схемы, доказана их монотонность и получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе двусторонних оценок сеточного решения.

Рекомендации по практическому использованию. Полученные результаты могут быть использованы при построении компактных разностных схем для различных типов уравнений математической физики и в численном моделировании. Они могут быть полезными при чтении специальных курсов по теории разностных схем.

Область применения: Теория разностных схем

SUMMARY

Utebaev, Bakhadir D.

Compact and monotone difference schemes for first-order hyperbolic equations and parabolic equations

Keywords: compact difference scheme, monotone difference scheme, maximum principle, two-sided estimate, scheme of arbitrary order of accuracy, Fisher equation, convection-diffusion equation

The purpose of the work is the construction and study of compact and monotone difference schemes on standard stencils, approximating first order hyperbolic equations, linear, semilinear and quasilinear parabolic equations.

The methods of investigation: methods of the theory of difference schemes.

The following **scientific results** were obtained in the dissertation:

1. Monotone difference schemes of conditional approximation and arbitrary order of accuracy are constructed for one-dimensional and two-dimensional first-order hyperbolic equations, and estimates for the accuracy of the difference solution in the discrete analog of the uniform norm in the linear case are proved.

2. For parabolic equations on standard stencils, compact and monotone difference schemes are constructed and studied, and the stability and monotonicity of compact schemes approximating semilinear Fisher equations are proved.

3. For the one-dimensional and two-dimensional generalized Fisher equation with nonlinear convection compact difference schemes are developed, their monotonicity is proved, and a priori estimates of the difference solution in the nonlinear case are obtained based on two-sided estimates of the grid solution.

Recommendations on the practical application of the results. The results obtained can be used in the construction of compact difference schemes for various types of mathematical physics equations and in numerical simulations. They can be useful when reading special courses on the theory of difference schemes.

Application field: Theory of difference schemes

Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 1,4. Учетн. изд. л. 1,25.
Тираж 60 экз. Заказ № 231.

Отпечатано в РУП «Издательский дом «Беларуская навука»