ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

УДК 519.63

ЩАДИНСКИЙ
Денис Александрович

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 — вычислительная математика

Минск 2024

Работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Научный руководитель: **Матус Петр Павлович,**
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, главный научный сотрудник отдела информационных технологии Института математики Национальной академии наук Беларуси

Официальные оппоненты: **Лапин Александр Васильевич,**
доктор физико-математических наук, профессор института компьютерных наук и математического моделирования Сеченовского университета

Лемешевский Сергей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела исследований и разработки ООО «НТЦ «Симмэйкерс»

Оппонирующая организация: **Учреждение образования «Белорусский государственный университет»**

Защита состоится «26» апреля 2024 г. в 12:30 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.

Тел. ученого секретаря совета (+375–17)–378–17–62, email: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «25» марта 2024 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

В системах разной природы встречаются сверхбыстрые процессы, в которых исследуемая величина (например, энергия, температура или же денежный капитал) неограниченно возрастают на конечном интервале времени. Многие математические модели, в которых решения могут неограниченно расти, не учитывают факторы, ограничивающие рост исследуемой функции вблизи момента обострения (конечность ресурсов и т.д.). Однако такие математические модели позволяют понять и изучить наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются вплоть до момента обострения[1].

Современная математическая физика рассматривает в основном существенно нелинейные процессы, описываемые нелинейными уравнениями в частных производных. Известная классическая теория нелинейных уравнений математической физики рассматривает вопросы существования решений и их свойства. В то же время, известно, например, что отдельные нелинейные уравнения, например, нелинейное уравнение Клейна-Гордона с кубической нелинейностью в трехмерном случае не имеет глобального по времени решения задачи Коши при определенных начальных данных. Это явление разрушения решения (blow-up) проявляется в самофокусировке светового пучка в активной нелинейной среде. Этот эффект разрушения решений нелинейных уравнений присущ многим нелинейным уравнениям математической физики. Даже для классического нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза[2], описывающего многие нелинейные процессы в современной физике, при определенных начальных данных имеет место разрушение решения за конечное время. Явление разрушения решений нелинейных уравнений представляет не только математический, но и физический интерес, поскольку разрушение решений - это катастрофа реальных процессов, описываемых соответствующими нелинейными математическими моделями.

Теория разрушения решения имеет приложение в различных областях, например, таких как самофокусировка световых пучков в нелинейных средах, нестационарные структуры в магнитной гидродинамики (Т-слой), безударное сжатие в задачах газовой динамики[3]. Методология решения «задач на обострение» позволяет с нетрадиционной точки зрения рассмотреть ряд классических задач механики, связанных с процессами сжатия, кумуляции,

[1]Никольский, И.М. Решения нелинейных параболических уравнений, развивающиеся в режиме с обострением: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / И.М. Никольский; Гос. акад. упр. им. С. Орджоникидзе. — Москва, 1993. — 18 с.

[2]Похожаев, С.И. О сингулярных решениях уравнения Кортевега–де Фриза / С.И. Похожаев // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 5. — С. 770–777.

[3]Самарский, А.А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. — Москва: Наука, 1987. — 480 с.

кавитации, коллапсов. Есть основания предположить, что возможны новые подходы к задачам коллапса, быстрого сжатия вещества, к химической кинетике, метеорологии (катастрофическим явлениям в атмосфере Земли), экологии (росту и вымиранию биологических популяций), нейрофизиологии (моделированию распространения сигналов по нейронным сетям), эпидемиологии (вспышкам инфекционных заболеваний)[4].

Эффект разрушения решения был предметом исследования многих учёных. В работе Fujita[5] для задачи Коши для параболического уравнения с нелинейным степенным источником было доказано, что решение этой задачи всегда разрушается на конечном интервале времени при квадратичном источнике и одномерной задаче. В статье Levine[6] были найдены условия разрушения решения начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с нелинейным источником. В работе Fila[7] были найдены условия, при которых решение задачи Дирихле для уравнения параболического типа с нелинейным источником не разрушается. Тем самым было показано, что диффузионный оператор может предотвратить процесс возникновения разрушения решения. Следует отметить труды Похожаева[8] [9], Самарского[3], Галактионова[10,11], которые изучали задачи с эффектом разрушения решения для нелинейных уравнений параболического типа.

Множество работ было посвящено эффекту разрушения решения в разностных схемах. В работе Nakagawa[12] было доказано, что решение некоторой явной схемы сходится к решению аппроксимируемой ею задаче Дирихле для уравнения теплопроводности во всех точках по времени до момента blow-up. Chen[13] рассмотрел аналогичную задачу с произвольным степенным источни-

[4]Князева, Е.Н. Синергетическая парадигма. основные понятия в контексте истории культуры / Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов // Живая этика и наука. — 2008. — № 1. — С. 379–443.

[5]Fujita, H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. / H. Fujita // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I. — 1966. — Vol. 13. — P. 109–124.

[6]Levine, H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathfrak{F}(u)$. / H.A. Levine // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1973. — Vol. 51. — P. 371–386.

[7]Fila, M. Dirichlet boundary conditions can prevent blow-up in reaction-diffusion equations and systems. / M. Fila, H. Ninomiya, J.L. Vázquez // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2006. — Vol. 14, № 1. — P. 63–74.

[8]Pohozaev, S.I. Blow-up of sign-changing solutions to quasilinear parabolic equations / S.I. Pohozaev // Proc. Steklov Inst. Math. — 2010. — Vol. 269. — P. 208–217.

[9]Mitidieri, E. A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities. Transl. from the Russian / E. Mitidieri, S.I. Pohozaev. — Moscow: MAIK Nauka/Interperiodica, 2001. — 362 p.

[10]Галактионов, В.А. Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений / В.А. Галактионов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1982. — Т. 22, № 2. — С. 322–338.

[11]Галактионов, В.А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$ / В.А. Галактионов // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 5. — С. 836–842.

[12]Nakagawa, T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ / T. Nakagawa // Appl. Math. Optim. — 1976. — Vol. 2. — P. 337–350.

[13]Chen, Y. Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. / Y. Chen // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A. — 1986. — Vol. 33. — P. 541–574.

ком, построил разностную схему для задачи и доказал сходимость времени численного разрушения решения к времени разрушения решения дифференциальной задачи. Стоит также отметить работу Самарского [3], где были получены достаточные условия разрушения решения неявной разностной схемы, которая аппроксимирует аналогичную задачу Дирихле для уравнения теплопроводности со степенным коэффициентом теплопроводности.

Отметим, что при изучении задач с разрушением решения широко используются теоремы сравнения. Во второй главе были сформулированы и доказаны дискретные аналоги теорем сравнения, которые в дальнейшем были использованы для доказательства разрушения решений разностных схем и оценки времени их разрушения.

В третьей главе был изучен эффект разрушения решения в задачах для параболического уравнения с нелинейными источник и коэффициентом диффузии, а также в разностных схемах, которые аппроксимируют такие задачи. Для задач Неймана были получены условия разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения решения. Для разностной схемы аппроксимирующей такую задачу со вторым порядка аппроксимации были получены аналогичные условия разрушения решения разностной схемы и верхняя оценка разрушения. Для задачи Дирихле на основе закона сохранения были найдены условия разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения. Была полученная разностная схема для которой выполняется сеточный аналог закона сохранения.

В заключительной части диссертации были получены результаты аналогичные полученным результатам во второй главе для задачи Неймана, но для многомерной задачи Неймана для параболического уравнения с градиентной нелинейностью коэффициента диффузии и разностной схемы, которая аппроксимирует такую задачу.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема утверждена решением Ученого совета Института математики НАН Беларуси от 02.12.2014, протокол № 9, соответствует направлению 12.1 перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук». Исследования проводились в соответствии с заданиям следующих программ и тем:

– договор с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований № Ф12Р–177 «Разработка, анализ и применение новых эффективных разностных методов решения многомерных задач фильтрации и конвекции-диффузии» № госрегистрации 20130053;

– государственной программы научных исследований («Конвергенция – 2020») на 2016–2020 гг. — задание 1.5.01 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения задач для дифференциальных уравнений» № госрегистрации 20160176;

– договор с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований № Ф20МС–005 «Применение стохастических уравнений и функциональных интегралов к одношаговым процессам» № госрегистрации 20201045;

– государственной программы научных исследований («Конвергенция – 2025») на 2021–2025 гг. — задание 1.4.01 «Методы вычислительной математики и математического моделирования физических, технических и технологических процессов», НИР1 «Численные методы моделирования физических, технических и технологических процессов», № госрегистрации 2021025;

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является нахождение условий на входные данные при которых решения задач для уравнений в частных производных параболического типа и разностных схем, аппроксимирующих их, разрушаются на конечном интервале времени.

Для достижения этой цели в ходе работы над диссертацией были поставлены следующие задачи:

– доказать дискретные аналоги теорем сравнения для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

– на основании дискретных аналогов теорем сравнения, построить разностные схемы, воспроизводящие эффект разрушения решения аппроксимируемых ими задач Неймана для квазилинейных уравнений параболического типа.

– построить разностную схему повышенной консервативности, которая аппроксимирует задачу Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа с эффектом разрушения решения и удовлетворяет сеточному закону сохранения энергии.

Объект исследования — разностные схемы, аппроксимирующие начально-краевые задачи для квазилинейных уравнений параболического типа.

Предмет исследования — свойства разностных схем связанные с эффектом разрушения решения.

Научная новизна

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Их новизна состоит в том, что

1. доказаны дискретные аналоги теорем сравнения для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения;

2. найдены новые условия на входные данные, при которых решения задач Неймана и Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа разрушаются на конечном интервале времени, причём условия разрушения решения задачи Дирихле включают случай положительной энергии;

3. получены согласованные с дифференциальным случаем условия на входные данные, при которых решения полученных разностных схем, аппроксимирующих задачи Неймана для квазилинейных уравнений параболического типа, разрушаются на конечном интервале времени;

4. построена разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа и удовлетворяющая сеточному закону сохранения энергии;

Положения, выносимые на защиту

1. Дискретные аналоги теорем сравнения для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Разностные схемы, решения которых разрушаются при тех же условиях, что и аппроксимируемые ими задачи Неймана для квазилинейных уравнений параболического типа.

3. Разностная схема повышенной консервативности, аппроксимирующая задачу Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа с эффектом разрушения решения при положительной энергии.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты диссертационной работы и положения, выносимые на защиту получены автором лично. Работы [1, 3–5] опубликованы в соавторстве с научным руководителем доктором физико-математических наук, профессором, членом-корреспондентом НАН Беларуси П.П. Матусом. Научному руководителю принадлежат постановка задач и общие рекомендации относительно методов их решения, а автору диссертации — реализация этих рекомендаций и доказательство соответствующих результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- на XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругиские чтения – 2014» (г. Новополоцк, 2014);
- на VII Международной конференции «Computational Methods in Applied Mathematics: CMAM-7» (г. Jyvaskyla, 2016);
- на Международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (г. Минск, 2016);
- на XX Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке – 2023» (г. Минск, 2023);

Опубликованность результатов диссертации

Материалы диссертации опубликованы в 13 научных работах, из них 5 статей в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РБ (общим объемом – 2,1 авторских листа), 7 тезисов в сборниках материалов конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка. Объем диссертации составляет 80 страниц, включая 5 рисунков и 1 таблицу, встроенных в текст. Библиографический список на 9 страницах включает 94 источника (с учетом 13 публикаций соискателя).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы и изложены результаты, полученные в диссертации.

В **первой главе** дан аналитический обзор литературы по теме исследований.

Вторая глава посвящена доказательству разностных аналогов теорем сравнения для решения задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). В дальнейшем, эти теоремы используются для анализа возникновения эффекта разрушения решения (blow-up) в разностных схемах, аппроксимирующих соответствующую задачу Коши для ОДУ.

В **разделе 2.1** приведены вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования. Была сформулирована основная задача для ОДУ.

Предположим, что существует классическое решение $u(t) \in C^1(0,T] \cap C[0,T]$ задачи

$$\frac{du}{dt} = g(t)f(u), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = u_0. \tag{1}$$

где

$$\left[\begin{array}{l} g(t) \text{ — непрерывная положительная неубывающая функция} \\ \text{для всех } t \in (0,T], \\ f(v) \text{ — непрерывная положительная возрастающая функция} \\ \text{при всех } v \in D. \end{array}\right] \tag{2}$$

D — некоторая связная область, причём $D_u \subseteq D$, где D_u — область значений решения задачи.

В **разделе 2.2** доказаны дискретные аналоги леммы Бихари.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (2). *Пусть* $\alpha^0 \leq u_0$ *и*

$$\alpha^n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k g(t_k) f(\alpha^k), \quad n = 1, 2, ..., N_0, \tag{3}$$

где $\alpha^k \in D$, $t_k \in (0,T]$ *для всех* $k = 0, 1, ..., N_0$, $t_0 = 0$, *а* $\tau_k = t_{k+1} - t_k \geq 0$ *для всех* $k = 0, 1, ..., N_0 - 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\alpha^n \leq \Psi^{-1}(\Phi(t_n)) = u(t_n), \quad n = 0, 1, ..., N_0, \tag{4}$$

где $u(t)$ *— решение задачи* (1).

Замечание 1. *Теорема 1 является обобщением теоремы, сформулированной в работе Демидовича* [14].

Теорема 2. *Предположим, выполнены условия* (2). *Пусть* $u_0 \leq \beta^0$ *и*

$$\beta^n \geq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k g(t_{k+1}) f(\beta^{k+1}), \quad n = 1, 2, ..., N_0, \tag{5}$$

где $\beta^k \in D$, $t_k \in (0, T]$ *для всех* $k = 0, 1, ..., N_0$, $t_0 = 0$, *а* $\tau_k = t_{k+1} - t_k \geq 0$ *для всех* $k = 0, 1, ..., N_0 - 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\beta^n \geq \Psi^{-1}(\Phi(t_n)) = u(t_n), \quad n = 0, 1, ..., N_0, \tag{6}$$

где $u(t)$ *— решение задачи* (1).

В **разделе 2.3** сформулированы и доказаны дискретные аналоги теорем сравнения.

На отрезке $[0, T]$ введём неравномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \tau_n > 0, n = 0, 1, ..., N_0 - 1, t_0 = 0, t_{N_0} = T\}$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau / \{0\}$. Пусть v^n, α_τ^n, β_τ^n — сеточные функции, заданные на сетке $\bar{\omega}_\tau$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_n} = \varphi(t_{n+1}, t_n) q(v^{n+1}, v^n), \quad n = 0, ..., N_0 - 1, \quad v^0 = u_0, \tag{7}$$

$$\frac{\alpha_\tau^{n+1} - \alpha_\tau^n}{\tau_n} \leq g(t_n) f(\alpha_\tau^n), \quad n = 0, ..., N_0 - 1, \quad \alpha_\tau^0 \leq u_0, \tag{8}$$

$$\frac{\beta_\tau^{n+1} - \beta_\tau^n}{\tau_n} \geq g(t_{n+1}) f(\beta_\tau^{n+1}), \quad n = 0, ..., N_0 - 1, \quad \beta_\tau^0 \geq u_0, \tag{9}$$

где

$$\varphi(t_+, t_-) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} g(\zeta) d\zeta,$$

$$q(v^+, v^-) = \left[\frac{1}{v^+ - v^-} \int_{v^-}^{v^+} \frac{dw}{f(w)} \right]^{-1},$$

выбираются из условия точной разностной схемы [15].

[14] Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — Москва: Наука, 1967. – 472 с.

[15] Matus, P. Exact difference schemes for time-dependent problems. / P. Matus, U. Irkhin, M. Lapinska-Chrzczonowicz // Comput. Methods Appl. Math. — 2005. — Vol. 5, № 4. — P. 422–448.

Теорема 3. *Пусть сеточная функция* $\alpha_\tau^n \in D$, $n = 0, 1, ..., N_0$ *удовлетворяет неравенствам* (8). *Тогда*

$$\alpha_\tau^m \leq v^m, \quad m = 0, 1, ..., N_0. \tag{10}$$

Следствие 1. *Пусть* $y_\alpha \in D$ *— решение разностной схемы*

$$\frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau_n} = g(t_n) f(y_\alpha^n), \quad n = 0, ..., N_0 - 1, \quad y_\alpha^0 = u_0. \tag{11}$$

Тогда справедлива следующая оценка

$$y_\alpha^m \leq v^m = u(t_m), \quad m = 0, ..., N_0.$$

Теорема 4. *Пусть сеточная функция* $\beta_\tau^n \in D$, $n = 0, 1, ..., N_0$ *удовлетворяет неравенствам* (9). *Тогда*

$$\beta_\tau^m \geq v^m, \quad m = 0, 1, ..., N_0. \tag{12}$$

Следствие 2. *Пусть для разностной схемы*

$$\frac{y_\beta^{n+1} - y_\beta^n}{\tau_n} = g(t_{n+1}) f(y_\beta^{n+1}), \quad n = 0, ..., N_0 - 1, \quad y_\beta^0 = u_0, \tag{13}$$

решение $y_\beta \in D$ *существует и единственно. Тогда справедлива следующая оценка*

$$y_\beta^m \geq v^m = u(t_m), \quad m = 0, ..., N_0.$$

В **разделе 2.4** приведены двухсторонние оценки решения задачи Коши для ОДУ, полученные на основе результатов для разностных схем и разностных неравенств, рассматриваемых в предыдущих разделах.

В **разделе 2.5** найдены достаточные условия существования решения для неявной разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1), (2).

Раздел 2.6 посвящён введению используемых в диссертации определений "эффекта разрушения решения задачи"для непрерывного и разностного случая. Сформулированы утверждения, связанные с эффектом разрушения решения, и приведён простейший пример разрушения решения разностной схемы.

Для изучения разрушения решения дифференциальной задачи рассмотрим задачу (1), определённую на временном интервале до момента разрушения решения t_b

$$\frac{du}{dt} = g(t) f(v), \quad 0 < t < t_b < T, \quad u(0) = u_0. \tag{14}$$

где функции $g(t)$, $f(v)$ и u_0 взяты из задачи (1), а область D, такая, что $[u_0, \infty) \subset D$.

Определение 1. *Будем говорить, что решение задачи* (14) *разрушается, если существует такое* t_b, *для которого*

$$\lim_{t\to t_b-0} u(t) = \infty.$$

Рассмотрим общее определение разрушения решения. Предположим, что имеется нестационарная дифференциальная задача $\mathscr{A}$, заданная на $\Omega \times [t_0, \infty)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, m — константа. Обозначим через $u(x,t)$ решение дифференциальной задачи $\mathscr{A}$. Пусть $||\cdot||_\Omega$ — некоторая норма по области Ω.

В работах, исследующих неограниченные решения начально-краевых задач, не формулируется строгих математических определений общеприменимого понятия "разрушения решения". На основе рассуждений из работы Nakagawa[16], которые близки к определению понятия "разрушения решения" можно ввести следующее определение.

Определение 2. *Решение* $u(x,t)$ *дифференциальной задачи* $\mathscr{A}$, *определённое в* $\Omega \times [t_0, \infty)$, *разрушается в норме* $||\cdot||_\Omega$, *если существует* T_b, *такое, что* $t_0 < T_b < \infty$ *и для которого верно следующее соотношение*

$$\lim_{t\to T_b-0} ||u(t)||_\Omega = \infty.$$

В этом случае T_b *называется временем разрушения решения задачи* $\mathscr{A}$.

Так как нельзя говорить о разрушении, основываясь на конечном наборе значений сеточной функции, то для определения разрушения решения понадобится последовательность узлов на которой будет определено решение разной схемы или сетка со счётным количеством узлов $\omega_\tau = \{t_n | t_{n+1} > t_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Предположим, что имеется разностная схема $\mathscr{A}_h$, которая аппроксимирует дифференциальную задачу $\mathscr{A}$ и определена на сетке $\omega = \omega_\tau \times \omega_h$. Обозначим через y_n решение разностной схемы $\mathscr{A}_h$ на сетке ω_h во временном узле t_n. Пусть $||\cdot||_{\omega_h}$ — некоторая сеточная норма по сетке ω_h.

Определение 3. *Разностная схема* $\mathscr{A}_h$, *определённая на* ω, *"допускает" разрушение решения в норме* $||\cdot||_{\omega_h}$, *если существует такая сетка* ω_τ, *для которой последовательность* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *стремится к некоторому конечному числу, то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = T_{hb} < \infty$, *а решение* $\mathscr{A}_h$ *стремится к бесконечности в данной норме, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n||_{\omega_h} = \infty.$$

[16] Nakagawa, T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ / T. Nakagawa // Appl. Math. Optim. — 1976. — Vol. 2. — P. 337–350.

В **разделе 2.7** приведены результаты численного эксперимента с использованием неявной и явной схем, аппроксимирующих задачу (1), (2). Результаты численного эксперимента согласуются с ранее полученными теоретическим выводами.

В **третьей главе** найдены новые условия на входные данные при которых решения задач Дирихле и Неймана для квазилинейного уравнения параболического типа разрушаются на конечном интервале времени. Условия разрушения решения задачи Дирихле допускают разрушение решения даже при положительной энергии. Также для задачи Неймана получены согласованные с дифференциальным случаем условия на входные данные, при которых решение рассмотренной разностной схемы, аппроксимирующей данную задачу Неймана, разрушается на конечном интервале времени. Построена разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле и удовлетворяющая сеточному закону сохранения энергии.

В **разделе 3.1** приведена постановка задачи Дирихле и получен закон сохранения энергии.

Рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{15}$$

$$u(x,t) = \mu, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{16}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{17}$$

где $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)\} \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\mu = const \geq 0$, $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $u_0(x) \geq \mu$ для всех $x \in \Omega$ и $u_0(x) = \mu$ для всех $x \in \partial\Omega$, $f(u)$ — непрерывная и неотрицательная функция при $u \geq \mu$,

$$Au = -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

или

$$Au = -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\varphi(u), \quad \varphi^{'}(u) = k(u), \quad \varphi(\mu) = 0.$$

Здесь $k(u)$ — непрерывная, неотрицательная функция при $u \geq \mu$ и дифференцируема при $u > \mu$, $\varphi(u)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая положительная функция при $u > \mu$. Обозначим через $\Phi(u)$ одну из первообразных функции $\varphi(u)$. Из свойств функции $\varphi(u)$ следует, что $\Phi(u)$ — возрастающая при всех $u > \mu$.

В дальнейшем будем использовать скалярное произведение $(u,v) = \int\limits_{\Omega} uvdx$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и норму $||u||^2 = (u,u)$.

Для задачи (15), (16), (17) верен следующий закон сохранения

$$E(t) = E(0), \tag{18}$$

где

$$E(t) = \int\limits_0^t 2\left(k(u), \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) dt + \sum_{\alpha=1}^{m} \left\|\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(u)\right\|^2 - (F(u),1).$$

Величину $E(t)$ в дальнейшем будем называть энергией.

В **разделе 3.2** сформулирована теорема разрушения решения для задачи Дирихле, условия которой допускают разрушение решения даже при положительной энергии $E(t)$.

Сформулируем условия на входные данные, при которых решение задачи (15)–(17) будет разрушаться за конечное время.

Теорема 5. *Пусть для произвольно выбранной первообразной $F(u)$ функции $2k(u)f(u)$ выполнены условия:*

1. Функция

$$G(v) = \varphi(\Phi^{-1}(v))f(\Phi^{-1}(v)) - F(\Phi^{-1}(v))$$

монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_0$,

2. Существует $T_1 < \infty$, которая удовлетворяет уравнению

$$T_1 = \int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{G(w) - E(0)} < \infty,$$

где

$$v_0 = v(0) = \frac{1}{mes\Omega}\int\limits_{\Omega} \Phi(u(x,0)dx, \quad mes\Omega \text{ — мера пространства},$$

3. Выполнено следующее неравенство

$$E(0) < \min_{v \geq v_0} G(v). \tag{19}$$

Тогда решение задачи (15)–(17) разрушается на конечном временном интервале, то есть

$$\lim_{t \to T_b - 0} \sup_{x \in \Omega} u(x,t) = \infty,$$

причём $T_b \leq T_1$

Замечание 2. *Из формулы (19) видно, что доказанная Теорема 5 говорит о разрушении решения даже при положительной начальной энергии* $(E(0) > 0)$*, что практически не встречается в литературе, изучающей разрушение решений задач энергетическими методами.*

В **разделе 3.3** построена разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле и удовлетворяющая сеточному аналогу закона сохранения.

Пусть

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, \ldots, x_m)| \quad 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}\},$$

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_m)| \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}\}, \quad \partial\Omega = \bar{\Omega}/\Omega.$$

Введём сетки в области Ω

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \gamma_h = \bar{\omega}_h/\omega_h, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\},$$

где

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad t_0 = 0, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, m} \right\},$$

$$\omega_h = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = \overline{1, m} \right\},$$

$$\omega_\alpha^+ = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha - 1} \right\},$$

с постоянными шагами $h_1, h_2, \ldots, h_m$ и переменным шагом τ_n по пространственным и временной переменной соответственно.

Рассмотрим разностную схему

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^{m} (\varphi(y))_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(0,5)} + \frac{1}{\varphi(\hat{y}) - \varphi(y)} \int\limits_{y}^{\hat{y}} k(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \omega, \tag{20}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\omega}_h, \tag{21}$$

$$y(x,t)=\mu, \quad x\in\gamma_h \quad t\in\bar{\omega}_\tau. \tag{22}$$

Обозначим $s=\prod\limits_{\alpha=1}^{m} h_\alpha$. Тогда для разностной схемы (20), (21), (22) верен сеточный закон сохранения

$$E_h(t_n)=E_h(0), \tag{23}$$

$$E_h(t_n)=2\sum_{k=0}^{n}\tau_k\left((y_t^k,\left(\varphi(y^k)\right)_t\right)_h+\sum_{\alpha=1}^{m}||\varphi(y^n)_{\bar{x}_\alpha}]|_{(\alpha)}^2-\left(F(y^n),1\right)_h. \tag{24}$$

Таким образом, для разностной схемы (20), (21), (22) выполнен сеточный закон сохранения, то есть разностная схема является схемой повышенной консервативности. Также заметим, что сеточный закон сохранения (23), (24) аппроксимирует закон сохранения (18) аппроксимируемой дифференциальной задачи (15), (16), (17).

Раздел 3.4 посвящён вычислительному эксперименту, проводимому с использованием разностной схемы (20), (21), (22).

В **разделе 3.5** приведена постановка задачи Неймана для уравнения параболического типа.

Рассмотрим задачу Неймана для одномерного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{25}$$

$$k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \qquad t\in(0,T], \tag{26}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{27}$$

где $\Omega=\{x:0<x<l\}$, $l=const>0$. Функция k — положительная в $\mathbb{R}^+$ и $k\in C(\mathbb{R}^+)$, функция f — неотрицательная и $f\in C(\mathbb{R}^+)$. Функция $u_0\in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x)\geq 0, x\in\Omega$.

В **разделе 3.6** доказана теорема разрушения решения для задачи Неймана (25), (26), (27).

Теорема 6. *Предположим, что следущие условия выполнены*

1. Функция $f(v)$ — монотонно возрастающая и выпуклая при $v\geq v_0$, *2. Существует $T_1 < \infty$, которое удовлетворяет уравнению*

$$T_1 = \int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{f(w)}, \tag{28}$$

где

$$v_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{0}^{l} u_0(x) dx.$$

Тогда решение задачи (25), (26), (27) *разрушается за конечное время, то есть*

$$\lim_{t \to T_b - 0} \sup_{0 \le x \le l} u(x,t) = \infty, \tag{29}$$

и более того, $T_b \le T_1$.

В **разделе 3.7** рассмотрена неявная разностная схема и указаны условия, при которых решение разностной схемы "допускает" разрушение решения.

Введём следующие сетки

$$\omega_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad \tau_n > 0, \quad n = \overline{0, N_0 - 1} \quad t_0 = 0, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad h = l/N, \quad i = \overline{1, N-1}\},$$

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0\} \cup \{l\}.$$

Рассмотрим теперь разностную схему

$$y_t = (a y_{\bar{x}})_x^{(\sigma)} + f(y^{n+1}), \quad (x,t) \in \omega, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \tag{30}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad a_i^n = 0.5(k(y_{i-1}^n) + k(y_i^n)), \qquad (x,t) \in \omega \tag{31}$$

$$(a_1 y_{x,0})^{(\sigma)} - \frac{h}{2}(y_{t,0} - f(y_0^{n+1})) = (a_N y_{\bar{x},N})^{(\sigma)} + \frac{h}{2}(y_{t,N} - f(y_N^{n+1})) = 0, \tag{32}$$

которая аппроксимирует задачу (25)–(27) с порядком $O(h^2 + \tau)$, где $\sigma \in [0,1]$ значение весовой оператор $\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left(\sigma \mu^{n+1} + (1-\sigma)\mu^n\right)$.

Теорема 7. *Предположим, что следующие условия выполнены*

1. Функция $f(v)$ — монотонно возрастающая и выпуклая при $v \ge v_0$, *2. Существует* $T_1 < \infty$ *, которая удовлетворяет уравнению*

$$T_1 = \int\limits_{v_h^0}^{\infty} \frac{dw}{f(w)}, \tag{33}$$

где

$$v_h^0 = \frac{1}{l}\left(\frac{h}{2}y_0^0 + \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^0 + \frac{h}{2}y_N^0\right).$$

Тогда решение задачи (30)–(32) *"допускает" разрушение решения, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty, \tag{34}$$

и кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = T_{hb} \le T_1$.

Раздел 3.8 посвящён вычислительному эксперименту, проводимому с использованием разностной схемы (30), (31), (32). Численные результаты тестовых расчётов соответствуют полученным теоретическим результатам.

Четвёртая глава посвящена получению условий на входные данные, при которых решения задачи Неймана для уравнения параболического типа с градиентной нелинейностью коэффициента диффузии и разностная схема, аппроксимирующая данную задачу, разрушаются на конечном интервале времени.

В **разделе 4.1** приведена постановка задачи Неймана для уравнения реакции диффузии с градиентной нелинейностью.

$$\frac{\partial g(u)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + k(t)f(u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{35}$$

$$p\left(\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{36}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{37}$$

где $\bar{\Omega}$ — ограниченное связное множество в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция $g \in C(\mathbb{R}^+)$ и $g'(s) > 0$ для всех $s > 0$, функция p — положительная в $\mathbb{R}^+$ и $p \in C(\mathbb{R}^+)$, функция k — положительная в $\mathbb{R}^+$ и $k \in C(\mathbb{R}^+)$, функция f — неотрицательная и $f \in C(\mathbb{R}^+)$. n — внешняя единичная нормаль к границе области Ω. Функция $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x) \ge 0, x \in \bar{\Omega}$.

В **разделе 4.2** доказана теорема разрушения решения для задачи Неймана (35), (36), (37) и получена оценка времени разрушения решения.

Теорема 8. *Предположим, что следущие условия выполнены*

1. Функция

$$\varphi(v) = mes\Omega \cdot f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{mes\Omega}v\right)\right), \quad mes\Omega \text{ — мера пространства}$$

монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_0$,

2. Существует $T_1 < \infty$, *которое удовлетворяет уравнению*

$$\int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int\limits_0^{T_1} k(t)dt,$$

где

$$v_0 = v(0) = \int\limits_{\Omega} g(u(x,0))dx.$$

Тогда решение задачи (35), (36), (37) *разрушается за конечное время, то есть*

$$\lim_{t \to T_b - 0} \sup_{x \in \Omega} u(x,t) = \infty,$$

и более того, $T_b \leq T_1$.

В **разделе 4.3** рассмотрена неявная разностная схема, аппроксимирующая задачу Немана (35), (36), (37). Определим множества

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, \ldots, x_m)| \quad 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,m}\},$$

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_m)| \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,m}\}, \quad \partial\Omega = \bar{\Omega}/\Omega.$$

Заметим, что в данном случае мера множества $mes\Omega = \prod\limits_{\alpha=1}^{m} l_\alpha$.

На множестве Ω мы вводим сетку

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \gamma_h = \bar{\omega}_h/\omega_h, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\},$$

где

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad \tau_n > 0, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\bar{\omega}_h = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)}\right)\middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,m}\right\},$$

$$\omega_h = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = \overline{1, m} \right\},$$

$$\gamma_\alpha^0 = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = 0 \right\},$$

$$\gamma_\alpha^N = \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_m^{(i_m)} \right) \middle| x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = (N_\alpha - 1) h_\alpha \right\},$$

с постоянным шагами по пространству $h_1, h_2, \ldots, h_m$ и адаптивным шагом по времени τ_n.

Рассмотрим разностную схему, которая аппроксимируем задачу (35), (36), (37)

$$g(y)_t = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(y) + k(t_{n+1}) f(y^{n+1}), \quad (x,t) \in \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \tag{38}$$

$$A_\alpha(y) = \begin{cases} \frac{2}{h_\alpha} D(y_{x_\alpha}^{n+1}), & x \in \gamma_\alpha^0; \\ D(y_{x_\alpha}^{n+1})_{\bar{x}_\alpha}, & x \in \omega_h; \quad \alpha = \overline{1,m}, \\ -\frac{2}{h_\alpha} D(y_{\bar{x}_\alpha}^{n+1}), & x \in \gamma_\alpha^N; \end{cases} \tag{39}$$

$$y^0 = y_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{40}$$

где

$$D(u) = p\left(u^2\right) u.$$

В **разделе 4.4** сформулированы условия, при которых решение разностной схемы (38), (39), (40) “допускает” разрушение решения. Полученные условия согласованы с условиями разрушения решения задачи Неймана (35), (36), (37) из Теоремы 8. Получена верхняя оценка времени разрушения решения, аналогичная оценке из Теоремы 8.

Теорема 9. *Предположим, что следующие условия выполнены*

1. Функция

$$\varphi(v) = mes\Omega \cdot f\left(g^{-1} \left(\frac{1}{mes\Omega} v \right) \right),$$

монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_0$*,*

2. Существует $T_1 < \infty$*, которая удовлетворяет уравнению*

$$\int\limits_{v_h^0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int\limits_0^{T_1} k(t) dt,$$

где

$$v_h^0 = s\sum_{\omega_h} g(y_0) + s\frac{1}{2}\sum_{\gamma_h} g(y_0), \quad s = \prod_{\alpha=1}^{m} h_\alpha.$$

Тогда решение задачи (38)–(40) *“допускает” разрушение решения, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty,$$

и кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = T_{hb} \le T_1$.

В **разделе 4.5** найдены достаточные условия существования решения для неявной разностной схемы аппроксимирующей задачу (38), (39), (40).

Раздел 4.6 посвящён вычислительному эксперименту проводимым с использованием разностной схемы (38), (39), (40). Численные результаты тестовых расчётов соответствуют полученным теоретическим результатам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Настоящая диссертационная работа посвящена нахождению условий на входные данные, при которых решения задач для уравнений в частных производных параболического типа и разностных схем, аппроксимирующих их, разрушаются на конечном интервале времени.

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. доказаны дискретные аналоги теорем сравнения для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения [1, 3, 5], [7–9];

2. найдены новые условия на входные данные, при которых решения задач Дирихле и Неймана для квазилинейного уравнения параболического типа разрушаются на конечном интервале времени, причём условия разрушения задачи Дирихле включают случай положительной энергии [1–6], [7–13];

3. получены согласованные с дифференциальным случаем условия на входные данные, при которых решение полученных разностных схем, аппроксимирующих задачи Неймана для квазилинейных уравнений параболического типа, разрушаются на конечном интервале времени [1, 3, 5, 6], [7–9, 12];

4. построена разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа и удовлетворяющая сеточному закону сохранения энергии [2, 4], [10–12];

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы для определения наличия эффекта разрушения решения и оценки времени возникновения такого эффекта при моделировании физических процессов, которые описываются начально-краевыми задачами для уравнений параболического типа. Развитый математический аппарат исследования эффекта разрушения решения разностных схем может быть использован при построении разностных схем, воспроизводящих эффект разрушения решения начально-краевых дифференциальных задач.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи

1. Матус, П.П. Дискретные аналоги теорем сравнения и их применение / П.П. Матус, А. Парадинска, Д.А. Щадинский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2013. — Т. 57, № 4. — С. 16–20.

2. Щадинский, Д.А. Законы сохранения и их значение в разрушении решения в нелинейных задачах для параболических уравнений / Д.А. Щадинский // Тр. Ин-та матем. — 2015. — Т. 23, № 2. — С. 103–111.

3. Matus, P.P. Discrete analogs of the comparison theorem and two-sided estimates of solution of parabolic equations / P.P. Matus, R. Kozera, A. Paradzińska, D.A. Schadinskii // Appl. Math. Inf. Sci. — 2016. — Vol. 10, № 1. — P. 83–92.

4. Матус, П.П. О роли законов сохранения и входных данных при возникновении режимов с обострением в квазилинейных многомерных параболических уравнениях с нелинейным источником и их аппроксимациях / П.П. Матус, Н.Г. Чурбанова, Д.А. Щадинский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 7. — С. 981–981.

5. Kozera, R. Numerical blow-up time / R. Kozera, A. Paradzinska, D. Schadinskii // Exact finite-difference schemes / S. Lemeshevsky, P. Matus, D. Poliakov. — Berlin: De Gruyter, 2016. — P. 220–232

6. Щадинский, Д.А. Теоремы сравнения в задачах разрушения решения для уравнения реакции диффузии и в их аппроксимациях / Д.А. Щадинский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2023. — Т. 67, № 5. — С. 366–372.

Материалы конференций

7. Щадинский, Д.А. Дискретные аналоги теорем сравнения / Д.А. Щадинский // Еругиские чтения - 2014: тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20-22 мая 2014 г.: в 2 т. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. — Т. 2. — Минск, 2014. — С. 28–29.

8. Matus, P.P. Discrete analogs of the comparison theorem and two-side estimates of solution of parabolic equations / P.P. Matus, R. Kozera, D.A. Schadinskii // ICNAAM-2014 : proceedings of 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, September 22–28, 2014 / AIP Publishing. — Vol. 1648. — 2015. — P. 660017.

9. Matus, P. Two-side estimates of numerical solution for nonlinear parabolic equations / P. Matus, D.A. Schadinsky, V.T.K. Tuyen // LSSC'15: abstracts of The 10th International Conference on Large-Scale Scientific Computations, Sozopl, June 8-12, 2015 / Springer Cham. — 2015. — P. 57.

10. Щадинский, Д.А. Законы сохранения и их значение в разрушении решения в нелинейных задачах для параболических уравнений / Д.А. Щадинский // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сборник материалов Международной научно-практической конференции, Брест, 22–23 октября 2015 г. / Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест: БрГУ, 2015. — С. 32–33.

11. Schadinskii, D. Conservation laws in blow-up problems for nonlinear parabolic equations / D. Schadinskii // CMAM-7: Book of Abstracts Computational Methods in Applied Mathematics, Jyvaskyla, July 31 – August 6, 2016 / University of Jyvaskyla Printing House. — Jyvaskyla, 2016. — P. 55–56.

12. Schadinskii, D.A. The role of conservation laws in blow-up problems for nonlinear parabolic equations / D.A. Schadinskii // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г.; в 3 т. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Лепин. — Т. 3. — Минск: Беларусская наука, 2016. — С. 29.

13. Щадинский, Д.А. Разрушения решения в начально-краевых задачах для уравнения реакции диффузии и в их аппроксимациях / Д.А. Щадинский // Молодежь в науке – 2023: тез. докл. XX Междунар. науч. конф. молодых ученых, Минск, 20-22 сентября 2023 г. / Нац. акад. наук Беларуси, Совет молодых ученых; редкол.: В. Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск: Беларуская навука, 20-22 сентября 2023 года. — С. 559–561.

РЭЗЮМЭ

Шчадзінскі Дзяніс Аляксандравіч

Разбурэнне рашэнняў рознасных схем, якія апраксімуюць пачаткова-краявыя задачы для раўнанняў парабалічнага тыпу

Ключавыя словы: разбурэнне рашэння, дыскрэтныя аналагі тэарэм параўнання, пачаткова-краявыя задачы для парабалічнага раўнання, рознасныя схемы падвышанай кансерватыўнасці, законы захавання, час разбурэння рашэння

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца знаходжанне ўмоў на ўваходныя дадзеныя пры якіх рашэнні задач для раўнанняў у прыватных вытворных парабалічнага тыпу і рознасных схем, якія апраксімуюць іх, разбураюцца на канчатковым інтэрвале часу.

Метады даследавання: метады тэорыі рознасных схем.

У дысертацыі атрыманы наступныя **навуковыя вынікі**.

– даказаны дыскрэтныя аналагі тэарэм параўнання для задачы Кашы для звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання;

– знойдзены новыя ўмовы на ўваходныя дадзеныя, пры якіх рашэнні задач Нэймана і Дырыхле для квазілінейнага раўнання парабалічнага тыпу разбураюцца на канчатковым інтэрвале часу, прычым умовы разбурэння задачы Дырыхле ўключаюць выпадак станоўчай энергіі;

– атрыманы ўзгодненыя з дыферэнцыяльным выпадкам умовы на ўваходныя дадзеныя, пры якіх рашэнне атрыманых рознасных схем, апраксімуючых задачы Нэймана для квазілінейных раўнанняў парабалічнага тыпу, разбураюцца на канчатковым інтэрвале часу;

– пабудавана рознасная схема, якая апраксімуе задачу Дырыхле для квазілінейнага раўнання парабалічнага тыпу і якая задавальняе сеткаваму закону захавання энергіі;

Рэкамендацыі па практычным выкарыстанні. Атрыманыя вынікі могуць быць скарыстаны для вызначэння наяўнасці эфекту разбурэння рашэння і адзнакі часу ўзнікнення такога эфекту пры мадэляванні фізічных працэсаў, якія апісваюцца пачаткова-краявымі задачамі для раўнанняў парабалічнага тыпу. Развіты матэматычны апарат даследавання эфекту разбурэння рашэння рознасных схем можа быць выкарыстаны пры пабудове рознасных схем, якія прайграваюць эфект разбурэння рашэння пачаткова-краявых дыферэнцыяльных задач.

Галіна прымянення: Тэорыя рознасных схем

РЕЗЮМЕ

Щадинский Денис Александрович

Разрушение решений разностных схем, аппроксимирующих начально-краевые задачи для уравнений параболического типа

Ключевые слова: разрушение решения, дискретные аналоги теорем сравнения, начально-краевые задачи для параболического уравнения, разностные схемы повышенной консервативности, законы сохранения, время разрушения решения

Целью диссертационной работы является нахождение условий на входные данные, при которых решения задач для уравнений в частных производных параболического типа и разностных схем, аппроксимирующих их, разрушаются на конечном интервале времени.

Методы исследования: методы теории разностных схем.

В диссертации получены следующие **научные результаты**.

– доказаны дискретные аналоги теорем сравнения для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения;

– найдены новые условия на входные данные, при которых решения задач Неймана и Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа разрушаются на конечном интервале времени, причём условия разрушения задачи Дирихле включают случай положительной энергии;

– получены согласованные с дифференциальным случаем условия на входные данные, при которых решение полученных разностных схем, аппроксимирующих задачи Неймана для квазилинейных уравнений параболического типа, разрушаются на конечном интервале времени;

– построена разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле для квазилинейного уравнения параболического типа и удовлетворяющая сеточному закону сохранения энергии;

Рекомендации по практическому использованию. Полученные результаты могут быть использованы для определения наличия эффекта разрушения решения и оценки времени возникновения такого эффекта при моделировании физических процессов, которые описываются начально-краевыми задачами для уравнений параболического типа. Развитый математический аппарат исследования эффекта разрушения решения разностных схем может быть использован при построении разностных схем, воспроизводящих эффект разрушения решений начально-краевых дифференциальных задач.

Область применения: Теория разностных схем

SUMMARY

Denis Schadinskii

Blow-up solutions in difference schemes that approximate initial-boundary value problems for parabolic equations

Keywords: blow-up, discrete analogues of comparison theorems, initial-boundary value problems for a parabolic equation, difference schemes of increased conservatism, conservation laws, blow-up time

The purpose of the work is to obtain conditions on the input data under which solutions of problems for partial differential equations of parabolic type and difference schemes that approximate them blow up in finite time.

The methods of investigation: methods of the difference scheme theory.

The following **scientific results** were obtained in the dissertation:

– discrete analogues of comparison theorems for Cauchy problem for ordinary differential equation have been proved;

– new conditions on the input data on which the solutions of Neumann and Dirichlet problems for quasilinear equation of parabolic type blow up in finite time have been obtained and these blow-up conditions for Dirichlet problem include the case of positive energy;

– conditions on the input data which is consistent with differential case on which the solution of constructed difference schemes approximating the Neumann problem for quasilinear equations of parabolic type blows up in finite time have been obtained;

– the difference scheme that approximates the Dirichlet problem for quasilinear equation of parabolic type and satisfies grid energy conservation law has been constructed;

Recommendations on the practical application of the results. The obtained results can be used to determine the existence of blow-up solution and estimate blow-up time while modeling physical processes that are described by initial boundary value problems for parabolic type equations. Developed mathematical theory of studying blow-up effect for solutions of difference schemes can be used in a constructing of the difference schemes that reproduce the blow-up effect of initial-boundary value differential problems.

Application field: Theory of difference scheme