

УТВЕРЖДАЮ

Ректор учреждения образования
«Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»,
доктор экономических наук,
профессор



В.В. Богатырева
2024г.

ОТЗЫВ ОППОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Витебского государственного университета имени П.М. Машерова
о диссертации Пантелеевой Жанны Ивановны
«Совместные диофантовы приближения и
векторы с алгебраическими координатами»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки со ссылкой на область исследования паспорта соответствующей специальности, утвержденного ВАК

Диссертация Пантелеевой Ж.И. посвящена разработке методов метрической теории диофантовых приближений зависимых величин, а также получению конкретных результатов, связанных с распределением алгебраических чисел как в поле действительных, так и в поле p -адических чисел. В диссертации получены новые эффективные теоремы о разрешимости систем диофантовых неравенств, обобщающие и усиливающие результаты известных математиков К. Малера, В.Г. Спринджук, Б. Фолькмана в теории диофантовых приближений, а также А.О. Гельфонда в теории трансцендентных чисел.

Таким образом, все полученные и опубликованные результаты диссертационной работы Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами» полностью соответствуют отрасли «физико-математических наук» и паспорту специальности ВАК Республики Беларусь 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный вклад соискателя в решение научной задачи с оценкой его значимости

Выдающимися математиками 19-го века П. Дирихле, Ж. Лиувиллем, А. Гурвицем были заложены основы теории диофантовых приближений, связанных с приближением действительных чисел рациональными числами.

В 20-ых и 30-ых годах А.Я. Хинчиным и К. Малером были начаты исследования проблем, связанных с приближением действительных, комплексных и p -адических чисел алгебраическими числами. Часть этих проблем была решена в 50-ых и 60-ых годах Й. Кубилюсом, Б. Фолькманом, В.Г. Спринджуком, А. Бейкером и В. Шмидтом. В конце прошлого века в работах В.И. Берника, В.В. Бересневича, Д. Клейнбока, Г. Маргулиса указанные выше проблемы были обобщены с целочисленных многочленов на класс невырожденных кривых и поверхностей. Были получены асимптотические формулы для количества решений диофантовых неравенств в целочисленных полиномах.

В диссертации Пантелеевой Ж.И. установлены новые факты метрической теории диофантовых приближений. Отметим наиболее значимые из них. Важным моментом доказательства метрических теорем на многообразиях является конструктивное описание множеств действительных, комплексных и p -адических чисел, для которых выполняются системы неравенств

$$|P(x)| < H^{-w_1}, \quad |P(z)| < H^{-w_2}, \quad |P(\omega)|_p < H^{-w_3} \quad (1)$$

в целочисленных полиномах $P(t)$ степени n и высоты $H = H(P)$. Если ввести символ Виноградова $A \ll B$, означающий существование $c_1 = c_1(n)$ такого, что $A < c_1 B$, и обозначить через $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma_1 \in \mathbb{Q}_p$, корни $P(t)$, ближайшие к x , z и ω соответственно, то из результатов К. Малера, В.Г. Спринджука, М. Додсона следует, что

$$|x - \alpha_1| < c_2 \max \left(H^{-w_1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \max_{2 \leq j \leq n} \left(H^{-w_1} |P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j} \right), \quad (2)$$

$$|z - \beta_1| < c_3 \max \left(H^{-w_2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \max_{2 \leq i \leq n} \left(H^{-w_2} |P'(\beta_1)|^{-1} |\beta_1 - \beta_2| \cdots |\beta_1 - \beta_i| \right)^{1/i} \right), \quad (3)$$

$$|z - \gamma_1|_p < c_4 \max \left(H^{-w_3} |P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \max_{2 \leq m \leq n} \left(H^{-w_3} |P'(\gamma_1)|_p^{-1} |\gamma_1 - \gamma_2|_p \cdots |\gamma_1 - \gamma_m|_p \right)^{1/m} \right). \quad (4)$$

В (4) величина $|\mathbb{K}|_p$ обозначает меру Хаара цилиндра $K \subset \mathbb{Q}_p$. В диссертации доказано, что неравенства (2) — (4) являются точными.

Теорема 2.1. Пусть $P(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$, $t \in S(\alpha_1)$, t — вещественное или комплексное число, $|P(t)| < H^{-w}$, где

$$w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}, \text{ если } t - \text{ действительное число,}$$

$$w > \frac{3(n-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}, \text{ если } t - \text{ комплексное число.}$$

Тогда имеем

$$|t - \alpha_1| > \begin{cases} c_8 \frac{|P(t)|}{|P'(\alpha_1)|}, & \text{если } |t - \alpha_1| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2|, \\ c_9 \left(\frac{|P(t)| |\alpha_1 - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j|}{|P'(\alpha_1)|} \right)^{\frac{1}{j}}, & \text{если } |t - \alpha_1| > 2|\alpha_1 - \alpha_j|, \end{cases}$$

для упорядоченных корней многочлена $|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_3| < \dots < |\alpha_1 - \alpha_j|$.

Здесь $S(\alpha_1)$ обозначает множество комплексных t , для которых α_1 является ближайшим корнем $P(t)$.

В третьей главе получены новые результаты о мере множества p -адических пар (ω, ξ) в пространстве \mathbb{Q}_p^2 , в которых выполняются системы неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{Q}^{-\eta_1} < |P(\omega)|_p < \mathcal{Q}^{-\eta_1}, \quad \delta_0 < |P'(\omega)|_p < 1, \\ \delta_0 \mathcal{Q}^{-\eta_2} < |P(\xi)|_p < \mathcal{Q}^{-\eta_2}, \quad \delta_0 < |P'(\omega)|_p \leq 1, \end{aligned} \quad (5)$$

Доказано, что при $(\omega, \xi) \in K_1 \times K_2$, система неравенств (5) разрешима на множестве $B_1 \subset \mathbb{Q}_p^2$ с мерой Хаара $\mu B_1 > \frac{3}{4} \mu(K_1 \times K_2)$. Этот результат позволяет найти оценки как сверху, так и снизу для количества пар p -адических алгебраических чисел с заданными ограничениями сверху на p -адическую норму производных, а разработанный метод может быть обобщен на случай совместных приближений в пространствах действительных и p -адических чисел.

В четвертой главе получено обобщение леммы Гельфонда из теории трансцендентных чисел.

Теорема 4.1. Пусть $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{P}_n(\mathcal{Q})$ не имеют общих корней ни в \mathbb{C} , ни в \mathcal{Q}_p и пусть в прямоугольнике $I \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$, $\mu_1 I = \mathcal{Q}^{-\eta_1}$, $\mu_2 K = \mathcal{Q}^{-\eta_2}$, $\eta_i \geq 0$, выполняются неравенства

$$\max_{x \in I} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0, \quad \max_{\omega \in K} (|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$\tau_1 + 1 - p_1 > l_2 T^{-1}, \quad \tau_2 - q_1 > s_2 T^{-1}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + 1 + \tau_2 + 2 \sum_{k_1=1}^n \max(\tau_1 + 1 - k_1 \eta_1, 0) + 2 \sum_{k_2=1}^n \max(\tau_2 - k_2 \eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Научный вклад диссертанта, значимость его результатов также подтверждается их полной опубликованностью в 13 научных работах, из которых 6 статей в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК Республики Беларусь (Вестник МГУ им. А.А. Кулешова — 2 статьи, Вестник ГрГУ им. Я. Купалы — 3 статьи, Доклады НАН Беларуси — 1 статья), 7 тезисов докладов на международных научных конференциях.

Работа прошла апробацию на следующих международных конференциях: IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Гродно, Республика Беларусь, 2019), XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2020), XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2021), Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, Республика Беларусь, 2021), XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2021), XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2022), XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2023). Результаты диссертации докладывались на научных семинарах по теории чисел в Институте математики НАН Беларуси (руководитель — профессор В.И. Берник).

Исследования проводились в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция–2025», задание «Распределение действительных, комплексных и p -адических алгебраических чисел на множествах, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты»:

НИР1 «Распределение алгебраических чисел в действительных интервалах и p -адических цилиндрах, содержащих алгебраическое число заданной степени и высоты»,

НИР2 «Распределение корней целочисленных многочленов в кругах комплексной плоскости, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты, и их приложения в задачах математической физики».

Конкретные научные результаты (с указанием их новизны и практической значимости), за которые соискателю может быть присуждена искомая ученая степень

Диссертация Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами» является квалификационной научной работой, содержание которой соответствует специальности ВАК Республики Беларусь 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Пантелеевой Ж.И. может быть присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук за следующие новые научно обоснованные результаты:

1. Нахождение оценок снизу для расстояний от действительных или комплексных чисел до ближайшего корня многочлена с целочисленными коэффициентами.
2. Доказательство существования двумерных векторов с p -адическими алгебраическими координатами и получение оценки снизу для их количества в декартовом произведении p -адических цилиндров.
3. Получение оценок сверху для величины результатов полиномов без общих корней заданной степени и высоты, принимающих малые значения как на интервалах $I \subset \mathbb{R}$, так и в цилиндрах $K \subset \mathbb{Q}_p$.

Перечисленные выше результаты получены впервые. Проведенные исследования являются актуальными и практически значимыми, их результаты могут быть использованы при решении проблем теории диофантовых приближений.

Конкретные рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Полученные результаты имеют теоретический характер. Материалы диссертации могут использоваться в задачах математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей, а также в учебном процессе и написании пособий по алгебре и теории чисел для студентов физико-математических специальностей учебных заведений.

Замечания по диссертации

Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь к оформлению диссертационных работ. Автореферат диссертации

соответствует содержанию работы и правильно отражает результаты и основные положения, выносимые на защиту. Имеется несколько замечаний технического характера, которые не влияют на научную ценность полученных результатов:

1) В диссертации найдено несколько опечаток.

2) В некоторых местах вместо $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ следует писать $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ потому, что множество $|\omega - \gamma|_p < \varepsilon$ при малых ε может оказаться пустым.

3) В списке литературы можно было бы опустить некоторые не столь значительные публикации 19-го и 20-го века.

4) В доказательстве теоремы 3.7 стр. 49 при обозначении корней $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ следует ввести другой индекс, например $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ и использовать его далее по тексту.

Сделанные замечания не снижают научную и практическую значимость полученных автором результатов.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

Исходя из анализа содержания диссертации в целом, последовательности изложения материала, использованных методов исследования и опубликованности результатов диссертации в научных изданиях, можно сделать вывод, что научная квалификация соискателя Пантелеевой Ж.И. соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Диссертационная работа Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами» представляет собой законченную квалификационную научную работу, соответствующую требованиям ВАК Республики Беларусь, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, соответствует требованиям пп. 19-20 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности ВАК Республики Беларусь 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв о диссертации Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел согласно приказу № 21а от 11 марта 2024 г. ректора Витебского государственного университета имени П.М. Машерова рассмотрен и обсужден на заседании научного собрания факультета математики и информационных технологий 14 марта 2024 г.

Ж.И. Пантелеева выступила на научном собрании с докладом. На научном собрании состоялась дискуссия, соискатель дала исчерпывающие ответы на заданные вопросы.

В работе научного собрания и в голосовании принимали участие три доктора физико-математических наук (Воробьев Н.Т., Трубников Ю.В., Воробьев Н.Н.) и одиннадцать кандидатов физико-математических наук (Залеская Е.Н., Мехович А.П., Караулова Т.Б., Сурин Т.Л., Никитин А.И., Шлапаков С.А., Прохожий С.А., Корчевская Е.А., Ермоченко С.А., Иванова Ж.В., Подоксенов М.Н.). Результаты открытого голосования: «за» — 14, «против» — нет, «воздержались» — нет.

Председатель научного собрания
декан факультета математики
и информационных технологий
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-
математических наук, доцент



Е.Н. Залеская

Секретарь научного собрания
зав. кафедрой математики
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-
математических наук



Т.Б. Караулова

Эксперт оппонировавшей организации
доктор физико-
математических наук, профессор,
профессор кафедры математики
ВГУ имени П.М. Машерова



Н.Т. Воробьев



Подпись удостоверяю
начальник отдела кадров

Е.П. Соловьёва

14.03.2024