ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертационной работе ПАНТЕЛЕЕВОЙ Жанны Ивановны
«Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации

В середине 19 века П.Г. Дирихле доказал, что для любого действительного числа x существуют сколь угодно большие натуральные числа q такие, что дроби вида $\frac{p}{q}$ при целом числе p очень хорошо приближают x. Затем в работах Ж. Лиувилля, А. Туэ, А. Гурвица, Э. Бореля задача Дирихле была развита в различных направлениях, которые позднее стали целыми областями теории чисел.

Согласно теореме Дирихле, для любого $x \in \mathbb{R}$ неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-2}, \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений. Неравенство (1) очень точное, поскольку есть — числа, например, $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, для которых всегда верно неравенство $\left| x_1 - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3} q^{-2}$. Как показал Э. Борель, множество $t \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $\left| t - \frac{p}{q} \right| < q^{-3}$ имеет бесконечное число решений, имеет нулевую меру Лебега. Ровно сто лет назад выдающийся советский математик А. Хинчин рассмотрел более общее чем (1) неравенство

$$|qx - p| < \Psi(q) \tag{2}$$

для монотонно убывающей функции $\Psi(x), \quad x > 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество действительных чисел из интервала $I = [a,b]$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Тогда для меры Лебега μ на прямой $\mathbb{R}$ верно равенство

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi)=\begin{cases}0, & \text{если ряд } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) \text{ сходится,}\\ \mu I, & \text{если ряд } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) \text{ расходится.}\end{cases}$$

А. Хинчин начал рассматривать неравенства вида (2) в задачах приближения действительных чисел алгебраическими числами степени n и высоты H. В таких задачах $\mathcal{L}_n(w)$, $\mathcal{L}_n(\Psi)$ — это множества $x\in\mathbb{R}$, для которых неравенства

$$|P_n(x)|<H^{-w},\quad w>n, \tag{3}$$

$$|P_n(x)|<H^{-n+1}\Psi(H), \tag{4}$$

имеют бесконечное число решений в полиномах степени n и высоты $H=H(P)$. Аналогом случая сходимости в теореме Хинчина выступила гипотеза К. Малера, поставленная в 1932-м году: $\mu\mathcal{L}_n(w)=0$ при $w>n$. Ее доказал в 1964-м году В.Г. Спринджук. Полный аналог теоремы Хинчина состоял в доказательстве равенства

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi)=\begin{cases}0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)<\infty, & (5)\\ \mu I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)=\infty. & (6)\end{cases}$$

Равенство (5) доказал В.И. Берник в 1989-м году, а равенство (6) установил В.В. Бересневич в 1999-м году. Для изучения множеств $\mathcal{L}_n(w)$ при любом $w>n$ применяют понятие размерности Хаусдорфа, обозначаемой как $\dim$.
Оказывается, что

$$\dim\mathcal{L}_n(w)=\frac{n+1}{w+1}. \tag{7}$$

Оценка снизу для $\dim\mathcal{L}_n(w)$ была найдена в 1970-м году А. Бейкером и В. Шмидтом, а оценка сверху была доказана в 1983-м году В.И. Берником.

Диссертация Ж.И. Пантелеевой посвящена решению новых задач метрической теории диофантовых приближений, связанных с ней неравенствами (2) — (6).

Таким образом, диссертация содержит решения актуальных задач теории чисел и соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Заметим, что исследуемые множества действительных чисел охарактеризованы неравенствами (3), (4) не явно. Предыдущие авторы К. Малер, В.Г. Спринджук, М. Додсон в специальных леммах находили интервалы I, в которых содержатся решения неравенств (3), (4) при фиксированном полиноме $P(x)$. Например, В.Г. Спринджук доказывал, что при $w > n-1$ эти решения лежат в интервале или объединении двух интервалов, которые не могут содержать более двух корней $P(x)$. Основным результатом второй главы диссертации является теорема 2.1, полностью характеризующая множество решений (3), (4) при любом $w > 0$ в полях действительных, комплексных и p-адических чисел.

Теорема 2.1. *Пусть* $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $t \in S(\alpha_1)$, t *– вещественное или комплексное число,* $|P(t)| < H^{-w}$, *где*

$$w > \frac{3(\mathrm{n}-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}, \text{ если } t \text{ – действительное число,}$$

$$w > \frac{3(\mathrm{n}-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}, \text{ если } t \text{ – комплексное число.}$$

Тогда имеем

$$|t-\alpha_1| > \begin{cases} c_8 \dfrac{|P(t)|}{|P'(\alpha_1)|}, & \text{если} \quad |t-\alpha_1| \le 2|\alpha_1 - \alpha_2|, \\ c_9 \left(\dfrac{|P(t)||\alpha_1-\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_1-\alpha_j|}{|P'(\alpha_1)|} \right)^{\frac{1}{j}}, & \text{если} \quad |t-\alpha_1| > 2|\alpha_1-\alpha_j|, \end{cases}$$

для упорядоченных корней многочлена $|\alpha_1-\alpha_2| < |\alpha_1-\alpha_3| < \ldots < |\alpha_1-\alpha_j|$.

В 1998-м году Г. Маргулис и Д. Клейнбок предложили новый метод решения задач метрических проблем, основанный на свойствах орбит динамических систем. В.В. Бересневич применил его для доказательства разрешимости систем диофантовых неравенств на множестве действительных чисел положительной плотности из некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$. Развитие его метода позволило получить несколько новых результатов о распределении алгебраических чисел на интервалах I.

В третьей главе диссертации доказана метрическая теорема о положительной мере Хаара множества р-адических чисел w, для которых и сам полином, и его производная лежат в заданных цилиндрах $\mathbb{Q}_p$. На основании этой теоремы получена оценка снизу для количества полиномов с малыми по мере Хаара производными в корне.

Теорема 3.8. *Для любых цилиндров* K_1 *и* K_2 *обозначим количество векторов* $\overline{u} = (\gamma, \kappa)$ *с алгебраическими* $\gamma \in K_1 \subset \mathbb{Q}_p$, $\kappa \in K_2 \subset \mathbb{Q}_p$, *которые являются корнями полинома* $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$, *через* $\mathcal{N}_{n,Q}(K_1, K_2)$. *Существует такая положительная константа* c_{71}, *что справедлива оценка снизу*

$$\mathcal{N}_{n,Q}(K_1, K_2) \geq c_{71} Q^{n+1} \mu(K_1 \times K_2).$$

При оценке сверху размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной степенью трансцендентности В.И. Берник доказал лемму о связи меры интервала со степенью и высотой двух целочисленных полиномов без общих корней.

В четвертой главе установлено обобщение его леммы на параллелепипеды $I \times K$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, а $K \subset \mathbb{Q}_p$ — p-адический цилиндр.

Теорема 4.1. *Пусть* $P_1(t)$, $P_2(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$ *не имеют общих корней ни в* $\mathbb{C}$, *ни в* $\mathbb{Q}_p$, *и пусть в прямоугольнике* $I \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$, $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$, $\mu_2 K = Q^{-\eta_2}$, $\eta_i \geq 0$ *выполняются неравенства*

$$\max_{x \in I}\left(|P_1(x)|, |P_2(x)|\right) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0, \qquad \max_{\omega \in K}\left(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\right) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$\tau_1 + 1 - p_1 > l_2 T^{-1}, \quad \tau_2 - q_1 > s_2 T^{-1}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta)$ *справедливо неравенство*

$$\tau_1 + 1 + \tau_2 + 2\sum_{k_1=1}^{n} \max(\tau_1 + 1 - k_1\eta_1, 0) + 2\sum_{k_2=1}^{n} \max(\tau_2 - k_2\eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Установленная теорема позволяет получить оценки сверху для количества целочисленных полиномов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа.

Таким образом, содержание диссертационной работы Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, соответствует отрасли «физико-математических наук» и паспорту специальности ВАК Республики Беларусь 01.01.06 — математическая логика, алгебра теория чисел.

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные теоремы всех глав диссертации усиливают или обобщают результаты ведущих специалистов в области метрической теории диофантовых приближении. К ним можно отнести, прежде всего, упомянутые выше теоремы.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут использованы в метрической теории диофантовых приближений и в учебном процессе на математических факультетах университетов. Кроме этого, они могут найти свое применение в рамках прикладных задач, связанных с проблемами помех в беспроводной связи.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Основные положения диссертационной работы достаточно полно отражены в опубликованных статьях и материалах конференций. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ. Из них 6 статей в научных рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК Республики Беларусь («Вестник могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова» — 2, «Вестник гродненского государственного университета им. Я. Купалы» — 3, «Доклады НАН Беларуси» — 1), 7 — в материалах международных математических конференций.

Считаю, что результаты, полученные Пантелеевой Ж.И. при написании диссертационной работы, опубликованы в необходимом объеме.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

В целом, оформление диссертации и автореферата отвечают требованиям ВАК Республики Беларусь. Структура работы ясно отражает логику и динамику проведенного исследования. Полученные результаты изложены грамотно и четко, снабжены полными доказательствами.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что научная квалификация соискателя Пантелеевой Ж.И. соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Замечания

В диссертации сказано, что некоторые результаты могут быть перенесены и на поле комплексных чисел, однако конкретные результаты содержатся

только во второй главе. Хотелось бы, например, получить хотя бы какую-то информацию о теореме из главы четыре в поле комплексных чисел.
Мною замечено несколько неточностей и описок. Некоторые словесные конструкции можно было бы уточнить и заменить их на более общепринятые.

Заключение

Диссертационная работа Пантелеевой Ж.И. «Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами» представляет собой завершенную квалификационную научную работу. Ее содержание соответствует требованиям ВАК Республики Беларусь, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Считаю, что за

1. получение двухсторонних оценок мер Лебега и Хаара множеств действительных, комплексных и p-адических чисел с малыми по мере целочисленными полиномами;
2. нахождение двумерных векторов, а также оценку снизу их количества в цилиндрах $\mathbb{Q}_p^2$;
3. усиление результатов А.О. Гельфонда и В.И. Берника о связи мер в интервалах $I \subset \mathbb{R}$ и цилиндров $K \subset \mathbb{Q}_p$ со степенями и высотами полиномов, принимающих на $I \times K$ малые значения,

Пантелеева Ж.И. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доцент кафедры теории чисел
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова
д.ф.-м.н. Герман О.Н.

11.03.2024