ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права
УДК 511.42

ПАНТЕЛЕЕВА
Жанна Ивановна

СОВМЕСТНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ВЕКТОРЫ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Минск, 2023

Научная работа выполнена в государственном научном учреждении “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”

Научный руководитель:	**Берник Василий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории чисел и дискретной математики государственного научного учреждения “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”.
Официальные оппоненты:	**Герман Олег Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;
	Калугина Марина Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”.
Оппонирующая организация:	Витебский государственный университет имени П.М. Машерова.

Защита состоится “29” марта 2024 г. в 15:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при государственном научном учреждении “Институт математики Национальной академии наук Беларуси” по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11, конференц-зал, тел. ученого секретаря: (017) 379–17–84, email: tbusel@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан “29” февраля 2024 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
кандидат физико-математических наук Т.С.Бусел

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена проблемам приближения действительных, комплексных и p-адических чисел алгебраическими числами заданной степени и высоты.

Первыми работами в области теории диофантовых приближений являются работы Л. Дирихле и Ж. Лиувилля.

В 1842 г. Л. Дирихле[1] доказал следующую теорему.

Теорема 1 (Дирихле)**.** *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого $Q > 1$, $Q \in \mathbb{N}$, всегда найдется натуральное число $1 \leq q \leq Q$ и целое p, для которых справедливо неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}, \tag{1}$$

или, что одно и тоже,

$$|\alpha q - p| < Q^{-1}. \tag{2}$$

Чуть позже, в 1844 г. Ж. Лиувиллем[2] была доказана следующая теорема.

Теорема 2 (Лиувилля)**.** *Для любого алгебраического числа β степени $n > 1$ существует величина $c(\beta) > 0$ такая, что*

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\beta)}{q^n} \tag{3}$$

для всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$.

С помощью этой теоремы Лиувилль впервые построил примеры трансцендентных чисел в виде сумм рядов с убывающими членами:

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}, \quad 0 \leq a_k < 10.$$

Числа вида ξ_1 являются числами Лиувилля. Иррациональное действительное число ξ называется числом Лиувилля, если при любом $v \geq 2$ неравенство $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-v}$ имеет бесконечное число решений.

При $n = 2$ теорема Лиувилля дает неулучшаемый результат, а для больших n показатель степени в правой части неравенства (3) несколько раз улучшался. На сегодняшний день известно, что для любого алгебраического числа этот показатель может быть взят равным 2.

---

[1] Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // Werke I. — 1842. — P. 633–638.

[2] Liouville J. Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1844. — No. 18. — P. 883–885.

В 1909 году А. Туэ[3] установил, что для алгебраических чисел β степени n и $v > \frac{n}{2} + 1$ справедливо неравенство

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\beta)}{q^v}. \tag{4}$$

К. Зигель[4] улучшил результат А. Туэ, показав, что неравенство (4) выполняется при

$$v > \min_{1 \le s \le n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s \right), \tag{5}$$

в частности, можно взять $v > 2\sqrt{n}$. Позже Ф. Дайсон[5] доказал справедливость неравенства (4) при $v > \sqrt{2n}$. Наконец, К. Рот[6] установил, что неравенство (4) справедливо при любом $v > 2$. Результат К. Рота является наилучшим в своем роде, так как любое иррациональное число ξ, алгебраическое или нет, имеет бесконечно много рациональных приближений $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{6}$$

Неравенство (6) легко доказывается из теоремы Дирихле (1), (2).

Все указанные выше усиления теоремы Лиувилля имеют один существенный недостаток — они неэффективны, а именно: методы их доказательства не позволяют установить, каким образом постоянная $c(\beta)$ в неравенстве (4) зависит от величин β и v.

Эффективное улучшение неравенства Лиувилля получил А. Бейкер[7]. Это привело к целому новому направлению в теории диофантовых приближений и теории диофантовых уравнений.

В диссертации рассматривается направление исследований, связанное с применением к неравенствам (1)–(3) теории меры Лебега и размерности Хаусдорфа[8].

---

[3] Thue A. Über Annaherungswerte algebraischer Zahlen // J. reine angew. Math. — 1909. — Vol. 135. — P. 284–305.

[4] Siegel C. Approximation algebraischer Zahlen // Mathematische Zeitschrift. — 1921. — Vol. 10, No. 3-4. — P. 173–213.

[5] Dyson F.J. The approximation to algebraic numbers by rationals // Acta Arith. — 1947. — No. 79. — P. 225–240.

[6] Roth K. F. Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. — 1955. — Vol. 2, No. 1. — P. 1–20.

[7] Baker A. Contributions to the theory of Diophantine equations I. On the representation of integers by binary forms // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1968. — Vol. 263, No. 1139. — P. 173–191.

[8] Hausdorff F. Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen // Mathematische Annalen. — 1916. — Vol. 77, No. 3. — P. 430–437. Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. — 1932. — Vol. 106. — P. 131–139.

Первыми работами в области метрической теории диофантовых приближений являются работы Э. Бореля и А.Я. Хинчина. Задачи в данной области стали популярными после публикации в 1924 году классической теоремы А.Я. Хинчина[9] о приближении действительных чисел рациональными числами.

Теорема 3 (Хинчина)**.** *Пусть* $\Psi(q)$ *— монотонно убывающая функция и* $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$. *Для интервала* $I \subset \mathbb{R}$ *обозначим* $\mathcal{L}_1(\Psi)$ *множество действительных чисел* $x \in I$, *для которых неравенство*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{\Psi(q)}{q} \quad \text{или} \quad |qx - p| < \Psi(q),$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах $\frac{p}{q}$. *Тогда*

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q) = \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема Хинчина для $\Psi(q) = q^{-2}$ была доказана ранее Э. Борелем[10]. Вскоре теорема Хинчина была обобщена А. В. Грошевым[11] на случай совместных приближений, а К. Малер обобщил неравенства (1)–(3) на случай алгебраических чисел β и начал исследовать неравенство (2) для целочисленных многочленов произвольной степени.

Обозначим

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = \max\limits_{0\le j\le n}|a_j|$. $\Psi(q)$ — монотонно убывающая функция. Для интервала I и $x \in I \subset \mathbb{R}$, обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H)$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P(x)$.

Малер установил, что при $\Psi(H) = H^{-w+n-1}$

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = 0, \; w > 4n, \tag{8}$$

[9] Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Mathematische Annalen. — 1924. — Vol. 92. — P. 115–125.

[10] Borel M.É. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1909. — Vol. 27. — P. 247–271.

[11] Грошев А.В. Теорема о системе линейных форм // Доклады АН СССР. — 1938. — № 19. — С. 151—152.

и предположил, что неравенство (8) верно уже при $w > n$.

Его гипотеза с 1932 года стала называться гипотезой Малера. Продвижения в гипотезе Малера проходили следующим образом.

Вначале Й.П. Кубиллюс[12] доказал гипотезу для $n = 2$. Позже Ю. Коксма[13] улучшил оценку К. Малера до $w \leq 3n$ при $n \geq 2$, затем У. Левек[14], используя лемму Н.И. Фельдмана[15], получил $w \leq 2n$ при $n \geq 2$. Ф. Каш и Б. Фолькман[16] получили $w \leq 2n - 2$, а В. Шмидт[17] улучшил их результат, получив $w \leq 2n - \frac{7}{3}$ при $n \geq 3$. Б. Фолькман[18], в свою очередь, улучшил результат В. Шмидта, получив $w \leq \frac{4n}{3}$ при $n \geq 2$. В.Г. Спринджук получил $w \leq \frac{10n-3}{8}$ для $2 \leq n \leq 7$ и $w \leq \frac{4n-3}{3}$ для $n \geq 8$.

Окончательное решение гипотезы Малера было получено В.Г. Спринджуком[19] и усилено А. Бейкером[20]. Оценки (7) были перенесены на многочены произвольной степени В.И. Берником[21] и В.В. Бересневичем[22]. Позже в работе В.В. Бересневича[23] и совместных работах В.И. Берника, Д.Я. Клейнбока и Г.А. Маргулиса[24] были доказаны оценки (7) для произвольных невырожденных кривых и поверхностей. К указанным работам следует отнести и работы по оценке размерности Хаусдорфа[25] множества $\mathcal{L}_n\left(H^{-w}\right)$.

[12]Кубилюс Й.П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Доклады АН СССР. — 1949. — Т. 67. — С. 783—786. Kubilius J.P. On a metrical problem in Diophantine approximation theory // Dokl. Akad. Nauk Lit. SSR. — 1959. — T. 2. — P. 3—7.

[13]Koksma J. Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplex Zahlen durch algebraische Zahlen // Monatshefte für Mathematik und Physik. — 1939. — Vol. 48. — P. 176–189.

[14]LeVeque W.J. Note on S—numbers // Proc. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 4. — P. 189–190.

[15]Фельдман Н.И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1951. — Т. 15, № 1. — С. 53—74.

[16]Kasch F., Volkmann B. Zur Mahlerschen Vermutung über S—Zahlen // Math. Ann. — 1958. — Vol. 136. — P. 442–453.

[17]Schmidt W. Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Grössen // Monatsch. Math. — 1964. — Vol. 63. — P. 154–166.

[18]Volkmann B. Zur Mahlerschen Theorie der S–Zahlen, II // J. reine und angew. Math. — 1963. — Vol. 213, No. 1–2. — P. 58–65.

[19]Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. — 181 с.

[20]Baker A. On a theorem of Sprindzuk // Proc. Roy. Soc., London Ser. A. — 1996. — Vol. 292. — P. 92–104.

[21]Bernik V.I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. — 1989. — Vol. 53, No. 1. — P. 17–28.

[22]Beresnevich V.V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. — 1999. — Vol. 50, No. 2. — P. 97–112.

[23]Beresnevich V.V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 2002. — Vol. 94, No. 1–2. — P. 99–130.

[24]Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. — 2002. — Vol. 2. — P. 203–225.

[25]Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. — Минск: Наука и техника, 1988. — 144 с.

В конце двадцатых годов В. Ярник[26] и А.С. Безикович[27] доказали, что при $w > 1$ верно неравенство $\dim \mathcal{L}_1(w) = \frac{2}{w+1}$. Р. Гютинг[28] усилил этот результат.

При $n > 1$ известно следующее. Из теоремы Минковского о линейных формах следует, что при $w = n$ имеем $\mu\mathcal{L}_n(w) = \mathbb{R}$. В.Г. Спринджук, решив тем самым проблему Малера, показал, что при $w > n$ множество $\mathcal{L}_n(w)$ имеет нулевую меру Лебега. В 1970 году А. Бейкер и В. Шмидт[29] доказали неравенство

$$\frac{n+1}{w+1} \leq \dim \mathcal{L}_n(w) < 2\frac{n+1}{w+1}. \tag{9}$$

Основная часть их работы посвещена получению оценки снизу для $\mathcal{L}_n(w)$. Оценка сверху (9) получена с помощью применения неравенств Вирзинга[30].

Ряд соображений привел к гипотезе[31], что при $w > n$

$$\dim \mathcal{L}_n(w) = \frac{n+1}{w+1}. \tag{10}$$

При $n = 1$ эта гипотеза справедлива в силу указанных выше результатов. При $n = 2$ Ф. Каш и Б. Фолькман доказали, что $\dim \mathcal{L}_2(w) \leq \frac{3}{w+1}$. Вместе с неравенством (9) это дает для $\mathcal{L}_2(w)$ равенство (10). Затем Р. Бейкер[32] доказал, что

$$\dim \mathcal{L}_3(w) \leq \frac{4}{w+1} \text{ при } w > 3$$

и

$$\dim \mathcal{L}_n(w) \leq \frac{n+1}{w+1} \text{ при } n \geq 4 \text{ и } w > \frac{n^2+n-3}{3},$$

что вместе с (9) дает (10) при $n = 3$ и $w > \frac{n^2+n-3}{3}$ для $n \geq 4$. При $\frac{4n-3}{3} \leq w \leq \frac{n^2+n-3}{3}$ Р. Бейкер получил оценку

[26] Jarník V. Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass // Recueil Mathematics. — 1929. — Vol. 36. — P. 371–382.

[27] Besicovitch A.S. On linear sets of points of fractional dimension // Mathematische Annalen. — 1929. — Vol. 101. — P. 161–193.

[28] Güting R. On Mahler's function θ_1 // Michigan Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 10, No. 2. — P. 161–179.

[29] Baker A., Schmidt W.M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1970. — No. 21. — P. 1–11.

[30] Wirsing E., Schwarz W. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1961. — Vol. 106. — P. 67–77.

[31] Baker A., Schmidt W.M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1970. — No. 21. — P. 1–11.

[32] Baker R. Sprindžuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematika. — 1976. — Vol. 23, No. 2. — P. 184–197.

$$\dim \mathcal{L}_n(w) \le \frac{n}{w+1-n/3},$$

однако при $n < w < \frac{4n-3}{3}$ его метод не позволяет получить оценки лучше тривиальной ($\dim \mathcal{L}_n(w) \le 1$). Оценка (10) была получена В.И. Берником[33], применившим метод существенных и несущественных областей Спринджука и обобщившим лемму А.О. Гельфонда[34]. Размерность Хаусдорфа оценивалась также в работах В.И. Берника и Н.А. Переверзевой[35], В.В. Берескевича[36].

Обобщение леммы Гельфонда на случай комплексного круга и p-адического цилиндра были получены В.И. Берником в совместных работах с Ф.Ф. Желудевичем[37] и Ю.В. Мельничуком[38], в случае трех метрик в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ одновременно получено В.И. Берником и Н.И. Калошей[39].

Первыми работами по метрической теории совместных диофантовых приближений являются работы В.Г. Спринджука[40], в которых поставлены проблемы обобщения гипотезы Малера для совместных приближений. Спринджук предположил, что для фиксированного вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$ и $w > 0$, система неравенств

$$\max_{1 \le i \le k} |P(x_i)| < H^{-w}$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = H$. Эта гипотеза была доказана В.И. Берником[41].

---

[33] Берник В.И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arith. — 1983. — Т. 42, № 3. — С. 219—253.

[34] Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа. — Гостехиздат, 1952. — 224 с.

[35] Bernik V.I., Pereverseva N.A. The Method of Trigonometric Sums and Lower Estimates of Hausdorff Dimension // New trends in probability and statistics. — 1992. — Vol. 2. — P. 75—81.

[36] Бересневич В.В. О построении регулярных систем точек с вещественными, комплексными и p–адическими алгебраическими координатами // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. — 2003. — № 1. — С. 22—27.

[37] Берник В.И., Желудевич Ф.Ф. О целочисленных многочленах, принимающих малые значения на некотором интервале // Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук. — 1981. — № 3. — С. 27—33.

[38] Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. — Минск: Наука и техника, 1988. — 144 с.

[39] Берник В.И., Калоша Н.И. Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2004. — №. 1. — С. 121–123.

[40] Спринджук В.Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S–чисел // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1965. — Т. 29, № 2. — С. 379—436. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. — 181 с.

[41] Берник В.И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. — 1980. — Т. 44, № 1. — С. 24—45.

Также в работе[42] В.Г. Спринджук поставил задачу о приближении точек пространства $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ алгебраическими числами. В этой работе утверждается, что для почти всех $\overline{u} = (x, z, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ система неравенств

$$|P(x)| < H^{-w_1}, \quad |P(z)| < H^{-w_2}, \quad |P(\omega)|_p < H^{-w_3},$$

где $w_1 \geq -1$, $w_2 \geq -1$, $w_3 \geq 0$, имеет лишь конечное число решений в многочленах $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Решение было получено Ф.Ф. Желудевичем[43].

В работе В.И. Берника и И.Р. Домбровского[44] получена оценка меры множества действительных чисел $x \in I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-\lambda}, \quad n < \lambda \leq n + \frac{1}{3}$$

имеет хотя бы одно решение в целочисленных полиномах $P(x)$ ограниченной степени.

В работах Э.И. Ковалевской и В.И. Берника[45] доказан аналог теоремы Хинчина в поле p-адических чисел и обобщение ее в архимедовой и неархимедовой метриках.

Н.В. Бударина в своих работах[46] занималась обобщением данной теоремы в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$[47]. Для пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$, в случае сходимости ряда, доказательство получено в работе[48]. Случай расходимости ряда рассмотрен в работе А.С. Кудина и А.В. Луневича[49].

[42] Спринджук В.Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 2. — С. 3—68.

[43] Zeludevich F. Simultane diophantische Approximationen abhängiger Grössen in mehreren Metriken // Acta Arith. — 1986. — Vol. 46. — P. 285–296.

[44] Берник В.И., Домбровский И.Р. Эффективные оценки меры множеств, определяемых диофантовыми условиями // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 1994. — Т. 207. — С. 35—41.

[45] Beresnevich V.V., Bernik V.I., Kovalevskaya E.I. On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers // Journal of Number Theory. — 2005. — Vol. 111. — P. 33–56. Kovalevskaya E., Bernik V. Simultaneous inhomogeneous Diophantine approximation of the values of integral polynomials with respect to Archimedean and non-Archimedean valuations // Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis. — 2006. — T. 14, № 1. — P. 37—42.

[46] Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2010. — Vol. 149, No. 2. — P. 193–216. Бударина Н.В. Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ // Чебышевский сборник. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 17—50.

[47] Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2010. — Vol. 149, No. 2. — P. 193–216.

[48] Бударина Н.В. Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ // Чебышевский сборник. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 17—50.

[49] Кудин А.С., Луневич А.В. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в полях действительных, комплексных и p-адических чисел // Труды Института математики. — 2015. — Т. 23, № 1. — С. 76—83.

Многие из указанных задач были обобщены на случай совместных приближений в пространствах действительных, комплексных и радических чисел[50], а также на задачи о расстоянии между сопряженными алгебраическими числамии векторов[51] и на задачи о распределении дискриминантов и результантов целочисленных полиномов[52].

Отметим приложения метрической теории диофантовых приближений в небесной механике[53], при оценке малых знаменателей[54] и при проектировании антенных устройств[55].

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами) и темами

Результаты диссертации были получены в рамках Государственной программы научных исследований "Конвергенция–2025", задание "Распределение действительных, комплексных и р-адических алгебраических чисел на множествах, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты":

НИР1 "Распределение алгебраических чисел в действительных интервалах и p-адических цилиндрах, содержащих алгебраическое число заданной степени и высоты" (номер госрегистрации 20210657);

НИР2 "Распределение корней целочисленных многочленов в кругах комплексной плоскости, содержащих алгебраические числа заданной степени и высоты, и их приложения в задачах математической физики" (номер гос-

[50]Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. — Cambridge University Press, 2004. — Vol. 160 — 292 p. Бударина Н.В. Совместные диофантовы приближения с немонотонными правыми частями // Доклады Академии Наук. — 2011. — Т. 437, № 4. — С. 441—443. Коледа Д.В. О вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 135—147.

[51]Beresnevich V.V., Bernik V.I., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math. — 2010. — Vol. 146. — P. 1165–1179. Bernik V.I., Budarina N., O'Donnell H. On regular systems of real algebraic numbers of third degree in short intervals // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2013. — Vol. 282, No. S1. — P. 54—66.

[52]Bernik V., Götze F., Gusakova A. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2016. — Vol. 6. — P. 56–101.

[53]Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. — 1963. — Т. 18, № 6(114). — С. 91—192.

[54]Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наукова думка, 1984. — 264 с.

[55]Cadambe V.R., Jafar S.A. Cadambe Viveck R. Interference alignment and degrees of freedom of the K-user interference channel // IEEE transactions on information theory. — 2008. — Vol. 54, No. 8. — P. 3425—3441.

регистрации 20211995).

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является получение эффективных результатов в метрической теории диофантовых приближений, связанных с действительными, комплексными и p-адическими значениями целочисленных многочленов.

Основными задачами диссертации являются

- доказательство новых теорем, которые позволяют рассматривать диофантовы неравенства с произвольными правыми частями и системы диофантовых неравенств;
- обобщение леммы Гельфонда на случай совместных приближений в p-адическом случае;
- исследование влияния производных любого порядка на оценки снизу в диофантовых неравенствах, связанных с многочленами.

Объект исследования

Объектом исследования являются метрические задачи теории диофантовых приближений с целочисленными многочленами, совместные диофантовы приближения.

Предмет исследования

Связь меры Лебега действительных интервалов и меры Хаара p-адических цилиндров со степенью и высотой целочисленных многочленов.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и могут быть применены в дальнейших исследованиях по метрической теории диофантовых приближений, а также их приложений.

Положения, выносимые на защиту

- Получены оценки снизу для расстояний от действительного или комплексного числа до ближайшего корня полинома с целочисленными коэффициентами [1, 9, 11].

- Доказано существование двумерных векторов с p-адическими алгебраическими координатами и получена оценка снизу для их количества в декартовом произведении p-адических цилиндров [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12].
- Обобщена и усилена лемма Гельфонда для случая, когда многочлены без общих корней принимают малые значения на интервалах заданной меры и имеют произвольное количество близких корней в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ [6, 13].

Личный вклад соискателя ученой степени

Статья [2] написана аспирантом без соавторов. В статьях [1, 3, 4, 5, 6] В.И. Бернику принадлежит постановка задачи. Вклад соавторов равнозначен.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации были представлены аспирантом на

IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Гродно, Республика Беларусь, 2019) [7];

XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2020) [8];

XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2021) [9];

Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, Республика Беларусь, 2021) [11];

XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2021) [10];

XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2022) [12];

XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, Российская Федерация, 2023) [13];

семинарах по теории чисел в Институте математики НАН Беларуси (руководитель — профессор В.И. Берник).

Опубликование результатов диссертации

Все основные результаты, выносимые на защиту, опубликованы в журнальных статьях, включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований: [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Опубликовано 7 докладов на конференциях: [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

Общее число публикаций — 13. Из них 6 журнальных статей и 7 тезисов докладов конференций. Общее количество страниц опубликованных материалов — 54 страницы.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из титульного листа, содержания, перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, включающего 96 наименований. Полный объём диссертации составляет 72 страницы, из них 9 страниц занимает библиографический список.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В работе получены усиления нескольких результатов в метрической теории диофантовых приближений, на основании которых установлены новые теоремы в диофантовых приближениях зависимых величин. Заметим, что основным объектом исследования в диссертации являются множества полиномов фиксированной степени n. Полученные оценки по второй важной характеристике — высоте — являются асимптотическими по натуральному числу $Q > 1$ при условии $H \leq Q$.

Приведем результаты диссертации выносимые на защиту.

В **первой главе** приведен обзор литературы по теме исследования.

Во **второй главе** приводятся и доказываются леммы, которые являются основой доказательства последующих теорем диссертации. Большинство из них известны и их доказательства приведены в монографиях В.Г. Спринджука[56], В. Шмидта[57], Я. Бюжо[58], В.И. Берника и Ю.В. Мельничука[59], В.И. Берника и М. Додсона[60]. Некоторые леммы приведены в окончательном виде. В перечисленных выше монографиях были приведены оценки сверху или снизу, а также необходимые или достаточные условия справедливости утверждений лемм.

Для целочисленного полинома

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где n — степень $P\left(x\right)$ и $H = \max\limits_{0\leq j\leq n} |a_j|$ – высота $P\left(x\right)$, с корнями $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Определим $\mathcal{L}_n\left(w, H\right)$ как множество таких x, действительных или комплексных, для которых неравенство

$$|P\left(t\right)| < Q^{-w}, \quad w > 0, \tag{11}$$

разрешимо в полиномах из класса

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}\left[t\right]: \quad \deg P \leq n, \quad H(P) \leq Q\},$$

где $Q > 1$ – натуральное число.

Обозначим через $S\left(\alpha_j\right)$ множество действительных или комплексных чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$\min_{1\leq k\leq n} |x - \alpha_k| = |x - \alpha_j|\,.$$

Пусть α_1 — ближайший к x корень полинома $P(x)$, для которого выполняется неравенство (11).

Для множества $|x-\alpha_1|$ имеем $n+1$ оценку сверху. Наилучшая из них является точной. При $j = 1$ и $j = 2$ это доказал Спринджук. Найдена оценка снизу для $|x-\alpha_1|$ и получено, что она с точностью до величины $c\left(n\right)$ совпадает с одной из оценок сверху. Тем самым доказано, что оценка для меры $|x-\alpha_1|$ является точной.

Теорема 2.1 *Пусть $P\left(x\right) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $x \in S\left(\alpha_1\right)$, x – вещественное или комплексное число, $|P\left(x\right)| < H^{-w}$, где*

[56]Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. — 181 с. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. — Наука. Ленингр. отд-ние, 1977. — 143 с.

[57]Шмидт В. Диофантовы приближения. — Мир, 1983. — 232 с.

[58]Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. — Cambridge University Press, 2004. — Vol. 160 — 292 p.

[59]Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. — Минск: Наука и техника, 1988. — 144 с.

[60]Bernik V.I., Dodson M.M. Metric Diophantine approximation on manifolds. — Cambridge: CUP, 1999. — Vol. 137. — 172 p.

$w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}$, если x – действительное число,

$w > \frac{3(n-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}$, если z – комплексное число.

Тогда имеем

$$|x-\alpha_1| > \begin{cases} c_8 \cdot \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, & \text{если} \quad |x-\alpha_1| \le 2\,|\alpha_1-\alpha_2|\,, \\ \\ c_9 \cdot \left(\frac{|P(x)(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_j)|}{|P'(\alpha_1)|}\right)^{1/j}, & \text{если} \quad |x-\alpha_1| > 2\,|\alpha_1-\alpha_j|\,, \end{cases} \tag{12}$$

для упорядоченных корней многочлена $|\alpha_1-\alpha_2| < |\alpha_1-\alpha_3| < \ldots < |\alpha_1-\alpha_n|$. Если $z \in \mathbb{C}$, то в (12) следует x заменить на z.

В главе 2 данная теорема доказана также в поле p-адических чисел.

Аналогично действительному и комплексному случаю, для p-адического корня κ_j многочлена $P(x)$ обозначим

$$S(\kappa_j) = \left\{\omega \in \mathbb{Q}_p \ : \ \min_{1\le k\le n} |\omega-\kappa_k|_p = |\omega-\kappa_j|_p\right\}.$$

Теорема 2.2 *Пусть $P(\omega) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\omega \in S(\kappa_1)$, ω — p-адическое число, $|P(\omega)|_p < H^{-w}$, где*

$w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)}$.

Тогда имеем

$$|\omega-\kappa_1|_p > \begin{cases} c_{22} \cdot \frac{|P(\omega)|_p}{|P'(\kappa_1)|_p}, & \text{если} \quad |\omega-\kappa_1|_p \le 2\,|\kappa_1-\kappa_2|_p\,, \\ \\ c_{23} \cdot \left(\frac{|P(\omega)(\kappa_1-\kappa_2)\cdots(\kappa_1-\kappa_j)|_p}{|P'(\kappa_1)|_p}\right)^{1/j}, & \text{если} \quad |\omega-\kappa_1|_p > 2\,|\kappa_1-\kappa_j|_p\,, \end{cases}$$

для упорядоченных корней многочлена $|\kappa_1-\kappa_2|_p < |\kappa_1-\kappa_3|_p < \ldots < |\kappa_1-\kappa_n|_p$.

В последние годы появилось немало работ по распределению алгебраических чисел[61], целых алгебраических чисел[62], сопряженных алгебраических чисел[63].

В **третьей главе** изучается распределение специальных алгебраических чисел, связанных с T-числами в классификации Малера. Эти алгебраические числа выделяются дополнительным условием $|P'(\alpha_1)| < H^{1-v}$ при некотором $0 \le v < \frac{1}{2}$.

[61] Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. — Cambridge University Press, 2004. — Vol. 160 — 292 p.

[62] Bernik, V., Shamukova, N. Approximation of real numbers by integer algebraic numbers, and the Khinchine theorem // Доклады НАН Беларуси. — 2006. — Т. 50, №. 3. — С. 30—32.

[63] Beresnevich V.V., Bernik V.I., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math. — 2010. — Vol. 146. — P. 1165–1179.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 3.1 *Существуют интервалы $I \subset R$, $\mu I < Q^{-\gamma_1}$, $\gamma_1 + v > 1$, на которых при достаточно большом Q нет алгебраических точек α, $\deg \alpha \leq n$, $\frac{Q}{2} < H(\alpha) \leq Q$, $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$.*

Теорема 3.2 *При достаточно малой величине $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_{46} > c_{45}(n)$ имеем*

$$\mu \mathcal{L}_n < 1/4 \, |I| \, .$$

Теорема 3.3 *В классе $\mathcal{P}_n(Q)$ существует не менее $c_{47} Q^{n+1-2v}$, $0 \leq v < \frac{1}{2}$, полиномов с действительными корнями α, удовлетворяющими неравенству*

$$|P'(\alpha)| < c_{48} Q^{1-v}.$$

Результаты теорем 3.2 и 3.3 уже были получены ранее В.И. Берником и О.С. Куксо[64]. Также оценки количества многочленов с малыми значениями производной в корне получены А.С. Кудиным[65] (оценки снизу для $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$) и Д.В. Коледой[66] (точная асимптотика для $0 < v < \frac{1}{2}$), однако в данной работе представлен новый метод доказательства, основанный на предложенном в работе[67] подходе Г.А. Маргулиса и В.И. Берника. Достоинством данного метода является возможность его распространения на другие метрики; в частности, в следующих параграфах этот метод будет применен в случае совместных приближений в поле действительных и p-адических чисел.

Также изучается распределение векторов с алгебраическими сопряженными координатами.

Рассмотрен целочисленный многочлен

$$P(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$$

высоты $H = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ из класса $\mathcal{P}_n(Q)$, $n \geq 2$, удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{cases} |P(x)| < c_{57} Q^{-v_1}, \\ |P(y)| < c_{57} Q^{-v_2}, \end{cases} \qquad c_{57} > c_{56}, \qquad v_1 + v_2 \leq n - 1,$$

где $Q \in \mathbb{N}$, $Q > 1$, точки $(x, y) \in I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$.

[64] Берник В.И., Куксо О.С. Многочлены с малыми дискриминантами и регулярные системы действительных алгебраических чисел // Зап. науч. семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 322. — С. 10–16.

[65] Кудин А.С. Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. — 2014. — № 4. — С. 112—115.

[66] Коледа Д.В. О вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 135—147.

[67] Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. — 2002. — Vol. 2. — P. 203–225.

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ — корни многочлена $P(t)$, которые разделены на две группы. Первая из них состоит из корней $\alpha_1, ..., \alpha_j$, где α_1 — ближайших к x корень, а $\beta_1, ..., \beta_{n-j}$ — ближайшие к y корни, β_1 — ближайший к y.

Будем считать, что корни упорядочены следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3| \le ... \le |\alpha_1 - \alpha_j|,$$

$$|\beta_1 - \beta_2| \le |\beta_1 - \beta_3| \le ... \le |\beta_1 - \beta_{n-j}|.$$

Пусть $I_1 \subset \mathbb{R}$ и $I_2 \subset \mathbb{R}$ непересекающиеся интервалы длины $\mu I_1 = Q^{-\gamma_1}$, $0 < \gamma_1 < \frac{1}{8}$, и $\mu I_2 = Q^{-\gamma_2}$, $0 < \gamma_2 < \frac{1}{8}$.

Обозначим $\mathcal{P}_n(Q, I_1, I_2)$ — множество векторов $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \beta_1)$ с алгебраическими действительными координатами $\alpha_1 \in I_1$, $\beta_1 \in I_2$.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.4 *Для количества векторов $\overline{\alpha}$ при некотором c_{60} справедливо неравенство*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, I_1, I_2) > c_{60} Q^{n+1} \mu I_1 \times \mu I_2.$$

Теорема 3.5 *Обозначим через B_1 множество решений системы неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| \ll Q^{-v_1}, \\ |P(y)| \ll Q^{-v_2}, \end{cases} \qquad v_1 + v_2 = n - 1.$$

Пусть дополнительно выполняется одно из неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |P'(x)| < \delta Q, \\ |P'(y)| < \delta Q, \end{array} \right. \qquad \delta > 0.$$

Тогда при подходящем $\delta < \delta_0$

$$\mu B_1 < \frac{1}{4} \mu \left(I_1 \times I_2 \right).$$

В работе В.И. Берника и А.В. Луневича[68] рассматривалась мера множества B_1 и более общий случай в работе А. Пеццони[69]. В совместных работах Ф. Гётце, Д.В. Коледы и Д.Н. Запорожца[70] получен более сильный результат для оценки количества векторов с алгебраическими действительными

[68] Берник В.И., Луневич А.В. Распределение точек с действительными и целыми алгебраическими координатами на плоскости // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. — 2014. — Т. 2, № 44. — С. 4–18.

[69] Pezzoni A. Metric Diophantine approximation on manifolds by algebraic points / PhD Thesis, 2020. — University of York, England.

[70] Götze F., Kaliada D., Zaporozhets D. Correlations between real conjugate algebraic numbers // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16, №. 4(56). – С. 90—99. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach // Advances in Mathematics. – 2020. – Vol. 359. – P. 1—18.

координатами. В диссертации, для доказательства теоремы 3.4 предложен новый метод, позволяющий обобщить теоремы на пространства $\mathbb{Q}_p^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$.

Данные теоремы были обобщены в поле p-адических чисел. Пусть K_i, $i = 1, 2$, — цилиндры $K_i \subset \mathbb{Q}_p$, мера Хаара которых равна μK_i. Обозначим через B_1 множество $(\omega, \xi) \in K_1 \times K_2 \subset \mathbb{Q}_p^2$, где $\mu K_1 > Q^{-\frac{1}{8}}$ и $\mu K_2 > Q^{-\frac{1}{8}}$, для которых при некотором $\delta_0 = \delta_0(n)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-w_1} < |P(\omega)|_p < Q^{-w_1}, & \delta_0 < |P'(\omega)|_p \le 1, \\ \delta_0 Q^{-w_2} < |P(\xi)|_p < Q^{-w_2}, & \delta_0 < |P'(\xi)|_p \le 1. \end{cases}$$

Теорема 3.7 *Существует $\delta_0 = \delta_0(n)$, при котором*

$$\mu B_1 \ge \frac{3}{4}\mu(K_1 \times K_2).$$

Теорема 3.8 *Для любых цилиндров K_1, K_2 обозначим количество векторов $\bar{u} = (\gamma, \kappa)$ с алгебраическими $\gamma \in K_1 \subset \mathbb{Q}_p$, $\kappa \in K_2 \subset \mathbb{Q}_p$, которые являются корнями полинома $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$, через $\mathcal{N}_{n,Q}(K_1, K_2)$. Существует такая положительная константа c_{71}, что справедлива оценка снизу*

$$\mathcal{N}_{n,Q}(K_1, K_2) \ge c_{71} Q^{n+1} \mu(K_1 \times K_2).$$

В **четвертой главе** доказано обобщение леммы[71] Гельфонда на случай совместных приближений в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$. Данное обобщение является усилением леммы[72] В. И. Берника о связи степени n и высоты H целочисленных полиномов без общих корней с их абсолютными значениями на отрезке I. Далее полагаем, что интервал $I \subset \mathbb{R}$ имеет меру Лебега $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$, $\eta_1 > 0$, а цилиндр $K \subset \mathbb{Q}_p$ — меру Хаара $\mu_2 K = Q^{-\eta_2}$, $\eta_2 > 0$. Эта связь получена одновременно в архимедовой и неархимедовой метриках.

Введен подкласс полиномов для $\overline{v} = (v_1, v_2)$, $v_i \ge 0$, $i = 1, 2$, и натурального числа Q

$$\mathcal{P}_n(Q, \overline{v}) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q),\ |D(P)| \le Q^{2n-2-2v_1},\ |D(P)|_p \le Q^{-2v_2}\}.$$

1. Класс $\mathcal{P}_n(Q, \overline{v})$ состоит из неприводимых полиномов $P(t)$, $\frac{Q}{2} \le H(P) \le Q$.

[71]Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа. — Гостехиздат, 1952. — 224 с.

[72]Берник В.И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arith. — 1983. — Т. 42, № 3. — С. 219—253.

2. Старшие коэффициенты a_n полиномов $P(t)$ удовлетворяют условию

$$|a_n| \gg H, \quad |a_n|_p \gg 1,$$

где $|a|_p$ — p-адическая норма a.

3. Корни α_i, γ_j упорядочены следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq ... \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$$

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq ... \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p .$$

Проведем классификацию многочленов и их корней. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon_1 > 0$ и $T = \left[\varepsilon_1^{-1}\right] + 1$. Положим

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}, \;\; j = 2, ..., n, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j}{T},$$

$$|\gamma_1 - \gamma_i|_p = H^{-\theta_i}, \;\; i = 2, ..., n, \quad \frac{s_i - 1}{T} \leq \theta_i < \frac{s_i}{T},$$

$$p_j = T^{-1} \sum_{i=j+1}^{n} l_j, \quad q_j = T^{-1} \sum_{i=j+1}^{n} s_i.$$

Теорема 4.1 *Пусть $P_1(t)$, $P_2(t)$ не имеют общих корней ни в $\mathbb{C}$, ни в $\mathbb{Q}_p$, и пусть в прямоугольнике $I \times K$, $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$, $\mu_2 K = Q^{-\eta_2}$, $\eta_i \geq 0$, выполняются неравенства*

$$\max_{x \in I} \left(|P_1(x)|, |P_2(x)|\right) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$\max_{\omega \in K} \left(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\right) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$\tau_1 + 1 - p_1 > l_2 T^{-1}, \quad \tau_2 - q_1 > s_2 T^{-1}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + 1 + \tau_2 + 2 \sum_{k_1=1}^{n} \max(\tau_1 + 1 - k_1 \eta_1, 0) + 2 \sum_{k_2=1}^{n} \max(\tau_2 - k_2 \eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Теорема 4.2 *При $0 \leq v_1 + v_2 \leq 2$ и любом $\varepsilon_2 > 0$ справедливо асимптотическое неравенство*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \overline{v}) \ll Q^{n+1-(v_1+v_2)+\varepsilon_2}, \quad 0 \leq v_1 + v_2 \leq 2.$$

В работе используются методы В.Г. Спринджука, В.И. Берника и В.В. Бересневича, а также классические методы теории диофантовых приближений и геометрии чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

- Усилен и обобщен результат В. Г. Спринджука о приближении действительных, комплексных и p-адических точек, в которых многочлен принимает малые значения, корнями этого многочлена [1, 9, 11].
- Доказано существование двумерных векторов с p-адическими алгебраическими координатами и получена оценка снизу для их количества в декартовом произведении p-адических цилиндров [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12].
- Обобщена и усилена лемма Гельфонда для случая, когда многочлены без общих корней принимают малые значения на интервалах заданной меры и имеют произвольное количество близких корней в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ [6, 13].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер.

Материалы диссертации также могут использоваться в задачах математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей, а также в учебном процессе и написании пособий по алгебре и теории чисел для студентов физико–математических специальностей учебных заведений.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных изданиях в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Кемеш О.Н., Пантелеева Ж.И., Титова А.В. Точные оценки меры малых значений целочисленных полиномов // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. — 2021. — Т. 1, № 57. — С. 81—86.
2. Пантелеева Ж.И. Количество алгебраических чисел с малой производной минимального многочлена // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. — 2022. — Т. 2, № 60. — С. 33—38.
3. Корлюкова И.А., Морозова И.М., Пантелеева Ж.И. Об алгебраических числах с малой производной в корне минимального многочена // Вестник ГрГУ имени Я. Купалы. — 2022. — Т. 12, № 3. — С. 26—30.
4. Засимович Е.В., Пантелеева Ж.И., Рыкова О.В. Оценки снизу для количества многочленов с целыми коэффициентами, p-адические корни которых принадлежат двум цилиндрам // Вестник ГрГУ имени Я. Купалы. — 2022. — Т. 12, № 3. — С. 6—16.
5. Васильев Д.В., Пантелеева Ж.И. Оценки снизу для количества многочленов с действительными сопряженными корнями // Вестник ГрГУ имени Я. Купалы. — 2023. — Т. 13, № 2. — С. 6—16.
6. Берник В.И., Васильев Д.В., Пантелеева Ж.И, Калоша Н.И. Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа // Доклады НАН Беларуси. — 2023. — Т. 67, № 4. — С. 271—278.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

7. Корлюкова И.А., Морозова И.М., Пантелеева Ж.И., Шамукова Н.В. Распределение алгебраических чисел с малыми значениями минимального многочлена и их применение в задачах математической физики // Материалы IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения». Гродно, 17–20 декабря 2019 г. / Изд-во ГрГУ им. Я. Купалы. — Гродно, 2019. — С. 55.

8. Кемеш О.Н., Морозова И.М., Пантелеева Ж.И. О распределении комплексных алгебраических чисел с близкими сопряженными // Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 23–26 сентября 2020 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2020. — С. 257–258.
9. Кемеш О.Н., Морозова И.М., Пантелеева Ж.И. Неулучшаемые оценки расстояний действительных чисел до ближайшего корня целочисленного полинома // Материалы XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 18–22 мая 2021 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2021. — С. 206–207.
10. Васильев Д.В., Корлюкова И.А., Пантелеева Ж.И. Векторы с алгебраическими сопряженными координатами // Материалы XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 21–24 сентября 2021 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2021. — С. 127–128.
11. Васильев Д.В., Пантелеева Ж.И. Связь оценок в p-адической метрике значений многочленов и меры цилиндров в окрестности их корней // Материалы международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция». Минск, 22–25 ноября 2021 г. / Изд-во БГУ. — Минск, 2021. — С. 93–94.
12. Кемеш О.Н., Морозова И.М., Пантелеева Ж.И. Совместные диофантовы приближения в $\mathbb{Q}_p^2$ // Материалы XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 17–21 мая 2022 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2022. — С. 233.
13. Берник В.И., Корлюкова И.А., Кудин А.С., Пантелеева Ж.И. Обобщение леммы А. Гельфонда на интервалы числовой прямой и ее применение в диофантовых приближениях // Материалы XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула, 26–29 сентября 2023 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула, 2023. — С. 146–147.

РЭЗЮМЭ

Панцялеева Жанна Іванаўна

Супольныя дыяфантавы набліжэнні і вектары з алгебраічнымі каардынатамі

Ключавыя словы: дыяфантавы набліжэнні, гіпотэза Спрынджука, гіпотэза Бэйкера, мера Лебега, размернасць Хаўсдорфа, геаметрыя лікаў.

Мэта працы: атрыманне новых ацэнак мер у метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжэнняў для мностваў сапраўдных, камплексных і p-адычных лікаў з малымі значэннямі модуляў цэлалікавых паліномаў; атрыманне ацэнак зверху і знізу для колькасці паліномаў з малымі значэннямі вытворных у каранях мінімальных паліномаў.

Метады даследавання: метады алгебры і тэорыі лікаў, метады метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжэнняў, метады геаметрыі лікаў і тэорыі імавернасцей.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У працы атрыманы наступныя новыя вынікі.

- Узмоцнены і абагульнены вынік У.Г. Спрынджука аб набліжэнні сапраўдных, камплексных і p-адычных лікаў, у якіх мнагачлен прымае малыя значэнні, каранямі гэтага мнагачлена [1, 9, 11].
- Даказана існаванне двумерных вектараў з p-адычнымі алгебраічнымі каардынатамі і атрымана ацэнка знізу для іх колькасці ў декартавым здабытку p-адычных цыліндраў [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12].
- Абагульнена і ўзмоцнена лема Гельфонда для выпадку, калі мнагачлены без агульных каранёў прымаюць малыя значэння на інтэрвалах зададзенай меры і маюць адвольную колькасць блізкіх каранёў у прасторы $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ [6, 13].

Рэкамендацыі па выкарыстанню.

Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар.

Матэрыялы дысертацыі таксама могуць выкарыстоўвацца ў задачах матэматычнай фізікі пры вырашэнні праблемы малых назоўнікаў, а таксама ў навучальным працэсе і напісанні дапаможнікаў па адпаведных раздзелах тэорыі лікаў для студэнтаў фізіка-матэматычных спецыяльнасцей навучальных устаноў.

Галіна прымянення: метрычная тэорыя дыяфантавых набліжэнняў, ураўненні матэматычнай фізікі, лекцыйныя курсы ў навучальных установах.

РЕЗЮМЕ

ПАНТЕЛЕЕВА *Жанна Ивановна*

Совместные диофантовы приближения и векторы с алгебраическими координатами

Ключевые слова: диофантовы приближения, гипотеза Спринджука, гипотеза Бейкера, мера Лебега, размерность Хаусдорфа, геометрия чисел.

Цель работы: получение новых оценок мер в метрической теории диофантовых приближений для множеств действительных, комплексных и p-адических чисел с малыми значениями модулей целочисленных многочленов; получение оценок сверху и снизу для количества полиномов с малыми значениями производных в корнях минимальных полиномов.

Методы исследования: методы алгебры и теории чисел, методы метрической теории диофантовых приближений, методы геометрии чисел и теории вероятностей.

Полученные результаты и их новизна. В работе получены следующие новые результаты.

- Усилен и обобщен результат В.Г. Спринджука о приближении действительных, комплексных и p-адических точек в которых многочлен принимает малые значения, корнями этого многочлена [1, 9, 11].
- Доказано существование двумерных векторов с p-адическими алгебраическими координатами и получена оценка снизу для их количества в декартовом произведении p-адических цилиндров [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12].
- Обобщена и усилена лемма Гельфонда для случая, когда многочлены без общих корней принимают малые значения на интервалах заданной меры и имеют произвольное количество близких корней в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ [6, 13].

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер.

Материалы диссертации также могут использоваться в задачах математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей, а также в учебном процессе и написании пособий по алгебре и теории чисел для студентов физико–математических специальностей учебных заведений.

Область использования: метрическая теория диофантовых приближений, уравнения математической физики, курсы лекций в образовательных учреждениях.

SUMMARY

Panteleeva Zhanna Ivanovna

Joint Diophantine approximation and vectors with algebraic coordinates

Keywords: Diophantine approximation, Sprindžuk's conjecture, Baker's conjecture, Lebesgue measure, Hausdorff dimension, geometry of numbers.

Aim of the research: obtaining effective estimates of measures in metric theory of Diophantine approximation for sets of real, complex and p-adic numbers with small absolute values of integer polynomials; obtaining upper and lower bounds for the number of polynomials with small values of the derivatives at the roots of minimal polynomials.

Methods of the research: methods of algebra and theory of numbers, metric theory of Diophantine approximation, geometry of numbers and probability theory.

Obtained results and their novelty. The following new results have been obtained.

- V.G. Sprindžuk's result on approximation of real, complex and p-adic points where a polynomial assumes small values by the roots of this polynomial is strengthened and generalized [1, 9, 11].
- The existence of two-dimensional vectors with p-adic algebraic coordinates in a Cartesian product of p-adic cylinders is proved, and a lower bound for their number is obtained [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12].
- Gelfond's lemma is generalized and strengthened for a setting where polynomials without common roots assume small values at intervals of a given measure in the space $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ without restrictions on the number of close roots [6, 13].

Recommendations for use. The nature of the results is theoretical.

The materials of the dissertation can be applied in mathematical physics, specifically in relation to the problem of small denominators. These materials can also be used in higher education when giving lectures and writing study materials on the relevant sections of number theory for students specializing in physics and mathematics.

Areas of application: metric theory of Diophantine approximation, equations of mathematical physics, lecture courses at educational institutions.

ПАНТЕЛЕЕВА
Жанна Ивановна

СОВМЕСТНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ВЕКТОРЫ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Отпечатано в РУП "Издательский дом "Белорусская наука"
Подписано в печать 26.02.2024.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,34. Уч.-изд. л. 1,01.
Тираж 50 экз. Заказ № 44.