ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права

УДК 517.977

Хартовский Вадим Евгеньевич

Управляемость линейных динамических систем с последействием: качественный анализ и построение регуляторов

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2023

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный консультант **Калинин Анатолий Иосифович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: **Долгий Юрий Филиппович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и механики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Леваков Анатолий Афанасьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета;

Борухов Валентин Терентьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела математической теории систем Института математики НАН Беларуси

Оппонирующая организация Учреждение высшего образования **«Белорусский государственный экономический университет»**

Защита состоится «06» апреля 2023 г. в 14:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11.

Тел. ученого секретаря совета: (+375-17) 378-17-62, e-mail: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «20» февраля 2023 г.

Учёный секретарь совета по
защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

Для обыкновенных линейных автономных систем управления и их дискретного аналога Р. Калманом выделены четыре типа основных задач: задача управляемости, задача достижимости, задача идентифицируемости, задача наблюдаемости. Условия управляемости и наблюдаемости таких систем по своей форме являются алгебраическими. Поэтому Р. Калман, П. Фалб и М. Арбиб предложили[1] алгебраическую теорию линейных систем, которая позволила с единой позиции дать интерпретацию известных ранее фактов на языке теории модулей над кольцом полиномов.

В случае систем с последействием ситуация принципиально иная, поскольку возможно изучать задач управления как в конечномерном, так и в различных бесконечномерных пространствах. Это обстоятельство существенно осложняет исследование проблем, ставших на сегодняшний день классическими для обыкновенных систем управления.

Например, исследование возможности управления системой в конечномерном пространстве приводит к задаче относительной управляемости[2]. Однако естественным обобщением свойства управляемости обыкновенных систем на системы с запаздыванием является свойство полной 0-управляемости[3] (полной управляемости или полного успокоения, в другой терминологии), которое было введено Н. Н. Красовским[4] как возможность выбором управления привести траекторию системы в ноль так, чтобы при последующем «выключении» управления траектория осталась в нуле.

Изучением различных аспектов проблемы управляемости бесконечномерных систем занимались А. И. Астровский, В. Т. Борухов, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский, В. М. Марченко, А. В. Метельский, С. А. Минюк, Р. Рабах, Г. М. Скляр, H. T. Banks, G. Basile, M. Q. Jacobs, C. E. Langenhop, A. Manitius, G. Marrow, D. A. O'Connor, A. W. Olbrot, B. Shklyar, T. J. Tarn, R. Triggiani, L. Weiss и другие ученые. Однако для многих классов систем классические задачи управления объектами с запаздыванием до сих пор остаются нерешенными. В частности, актуален вопрос успокоения решения системы в случае отсутствия у нее свойства полной 0-управляемости, причем хорошо зарекомен-

[1]Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 400 с.

[2]Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1971. — 507 с.

[3]Термин «0-управляемость» читается как «нуль-управляемость»

[4]Красовский, Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием / Н. Н. Красовский // Оптимальные системы. Статистические методы: труды II междунар. конгресса ИФАК. — М. : Наука, 1965. — Т. 2. — С. 201–210.

довавшие себя методы исследования задачи полной 0-управляемости[5,6,7] в данном случае не эффективны.

Интенсивное развитие теории автоматического управления приводит к необходимости решения задач проектирования регуляторов и наблюдателей для различных типов объектов. Для систем с запаздыванием исследования в этом направлении проводили И. К. Асмыкович, Ю. Ф. Долгий, С. В. Емельянов, В. А. Зайцев, А. В. Ильин, В. В. Карпук, С. К. Коровин, Н. Н. Красовский, В. М. Марченко, А. В. Метельский, С. И. Миняев, Ю. С. Осипов, А. Б. Филимонов, В. В. Фомичев, А. С. Фурсов, В. Л. Харитонов, K. P. Bhat, E. Fridman, J.-F. Lafay, H. N. Koivo, E. B. Lee, A. S. Morse, D. A. O'Connor, A. W. Olbrot, L. Pandolfi, D. Salamon, O. Sename, K. K. Tan, T. J. Tarn, Q. G. Wang, K. Watanabe, S. H. Zak и другие ученые. Однако процесс становления соответствующей теории, в отличие от случая обыкновенных систем, еще далек до своего завершения. Существенные проблемы возникают и при переносе разработанных для систем запаздывающего типа методов на более сложные объекты, например системы нейтрального типа. Кроме того, не выяснены возможности управления при помощи обратной связи и проектирования наблюдателей для систем, не удовлетворяющих классическим свойствам управляемости и наблюдаемости.

Диссертация ориентированна на линейные автономные системы нейтрального типа и вполне регулярные дифференциально-алгебраические системы с последействием, однако ее результаты допускают применение и к другим объектам[8,9]. В работе предложен принципиально новый подход к решению проблемы построения регуляторов для систем с последействием, позволяющий решать не только традиционные задачи управления системами с помощью обратной связи, но и управлять объектами, которые не имеют классических структурных свойств, определяющих возможность их управления в том или ином смысле (не являются полностью 0-управляемыми, модально управляемыми и т.п.). Достигается это за счет введения и изучения новых структурных свойств, определяемых как 0-

[5]Марченко, В. М. О полной управляемости систем с запаздыванием / В. М. Марченко // Problems of Control and Information Theory. — 1979. — Vol. 8, №5–6. — P. 421–435.

[6]Метельский, А. В. Выделение идентифицируемой и управляемой компонент состояния динамической системы с запаздыванием / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, №6. — С. 972–984.

[7]Shklyar, B. Exact null controllability of abstract differential equations by finite dimensional control and strongly minimal families of exponentials / B. Shklyar // Differential Equations and Applications. — 2011. — Vol. 3, №2. — P. 171–188

[8]Марченко, В. М. Гибридные интегро-дифференциально-разностные динамические системы в симметрической форме с потерей памяти / В. М. Марченко // Труды Института математики. — 2021. — Том 29, № 1–2. — С. 113–125.

[9]Хартовский, В. Е. Управление линейными автономными алгебро-дифференциальными системами посредством динамических регуляторов / В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2014. — №1. — С. 36–42.

управляемость, слабая модальная управляемость и слабая спектральная приводимость.

Формирование управлений в виде обратных связей предполагает знание решения замкнутой системы. Поэтому проблема построения регуляторов порождает задачу получения оценки решения. В диссертации разработанные процедуры формирования регуляторов адаптируются на решение задач проектирования как классических, так и новых типов наблюдателей. При этом наблюдаемые объекты в ряде случаев могут не иметь свойства финальной наблюдаемости.

В работе сделан упор на создание алгебраических схем решения задач, позволяющих при их реализации использовать стандартные функции современных систем компьютерной математики.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертационной работы соответствует направлению «Математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных)», включенному в перечень Приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы, утвержденный Указом Президента Республики Беларусь от 07.05.2020 № 156. Диссертация выполнялась в Белорусском государственном университете на основе научно-исследовательских работ «Конструктивные методы управления не полностью управляемыми динамическими системами» (№ ГР 20092189, сроки выполнения 01.04.2009–31.03.2011), «Методы управления дифференциальными системами с запаздыванием неполного ранга» (№ ГР 20120646, 01.04.2011–31.03.2013), «Разработка динамических регуляторов по принципу обратной связи для линейных дифференциальных систем неполного ранга» (№ ГР 20120646, 01.04.2012–31.03.2014), «Конструктивное исследование качественных характеристик управляемых систем с особенностями» ГПНИ «Конвергенция» (№ ГР 20121141, 2011–2015), «Методы оптимального управления в реальном времени сложными динамическими системами при неполной информации. Развитие конструктивных методов исследования и решения новых классов задач теории управления для динамических систем с особенностями» ГПНИ «Конвергенция — 2020» (№ ГР 20162319, 2016–2020), «Методы оптимального управления в реальном времени сложными динамическими системами при неполной информации. Разработка алгебраического подхода к синтезу регуляторов для линейных автономных систем с последействием» ГПНИ «Конвергенция — 2020» (№ ГР 20161988, 2016–2020), «Алгебраические методы проектирования наблюдателей и регуляторов для различных классов линейных систем с запаздыванием» по заданию «Разработка методов решения задач управления, наблюдения и оптимизации для динамических систем, обладающих прикладными особенностями» ГПНИ «Конвергенция — 2025» (№ ГР 20211715, 2021–2025), «Развитие новых качественных и конструктивных методов управления динамическими системами сложной структуры» по заданию «Разработка методов решения задач управления, наблюдения и оптимизации для динамических систем, обладающих прикладными особенностями» ГПНИ «Конвергенция — 2025» (№ ГР 20211899, 2021–2025).

Цель и задачи исследования

Цель исследования — разработать алгебраический подход к проектированию регуляторов для линейных автономных систем с последействием, применимый в случае отсутствия свойств полной 0-управляемости, модальной управляемости, спектральной приводимости и финальной наблюдаемости.

Цель диссертации реализуется за счет решения **задач**: получения критериев разрешимости задачи 0-управляемости и способов построения соответствующих программных управлений; построения решения задачи 0-управляемости в виде регулятора с обратной связью; получения критериев существования и построение регуляторов, приводящих систему к конечному спектру; получение условий существования и построения интегральных и дифференциально-разностных регуляторов, обеспечивающих замкнутой системе наперед заданный спектр; получение условий существования и построения асимптотических и финитных наблюдателей.

Объект исследования — линейная автономная система с последействием. Предмет исследования — структурные свойства.

Научная новизна

В диссертации предложено концептуальное развитие теории управления линейными объектами с последействием, в основе которого лежит идея использования гибридных типов регуляторов, представляющих собой три последовательно соединенных контура. Первый контур компенсирует отклонение решения заданной системы от решения новой системы, отличающейся от исходной наличием дополнительных органов управления; второй контур управления редуцирует новую систему к системе запаздывающего типа; третий контур реализует для полученной системы цель управления. На базе этой идеи для различных классов систем получены следующие *новые результаты*:

1. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных

дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями доказаны критерии разрешимости задачи 0-управляемости и предложены подходы к построению программных управлений, реализующих успокоение решения.

2. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем соизмеримыми запаздываниями получены критерии существования и способы построения регуляторов успокоения решения (регуляторы, обеспечивающие решение задачи 0-управляемости).

3. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем соизмеримыми запаздываниями доказаны критерии разрешимости задач спектральной приводимости и слабой спектральной приводимости, а также предложены схемы формирования регуляторов, обеспечивающих конечный спектр.

4. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем соизмеримыми запаздываниями найдены условия разрешимости задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости в классах интегральных и дифференциально-разностных регуляторов, а также сформированы процедуры построения модальных регуляторов указанных типов.

5. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа получены условия существования и предложены схемы формирования различных типов асимптотических наблюдателей, а также построена процедура получения асимптотической оценки асимптотически наблюдаемых систем.

6. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа доказаны критерии существования и предложены процедуры построения финитных наблюдателей в виде выхода систем запаздывающего типа с конечным наперед заданным спектром, и в виде выхода систем запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и некоторым конечным (не заданным наперед) спектром.

Кроме этого получено решение задач, которые в контексте диссертации носят вспомогательный характер, однако представляют собой самостоятельный интерес: 1) задача полной 0-управляемости в классах программных управлений и управлений типа обратной связи и задача финальной наблюдаемости для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем соизмеримыми запаздываниями;

2) задача построения всех решений одной линейной дескрипторной системы с дискретным временем.

Положения, выносимые на защиту

1. Критерии разрешимости задачи 0-управляемости и способы построения программных управлений, реализующих успокоение решения, в случае линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями.

2. Критерии существования и способы построения регуляторов успокоения решения для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями.

3. Критерии разрешимости задач спектральной приводимости и слабой спектральной приводимости, а также способы построения регуляторов, приводящих линейные автономные дифференциально-разностные системы нейтрального типа и линейные автономные вполне регулярные дифференциально-алгебраические системы с соизмеримыми запаздываниями к конечному спектру.

4. Условия разрешимости задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости в классах интегральных и дифференциально-разностных регуляторов, а также способы построения регуляторов указанных классов, обеспечивающих заданный спектр, для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями.

5. Условия существования и способы построения различных типов асимптотических наблюдателей, а также процедура получения асимптотической оценки для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа.

6. Критерии существования и способы построения для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа двух типов финитных наблюдателей, которые описываются системами запаздывающего типа с выходом, причем система, определяющая наблюдатель, имеет: 1) конечный наперед заданный спектр; 2) только сосредоточенные запаздывания и некоторый конечный спектр.

Личный вклад соискателя ученой степени в результаты диссертации с отграничением их от соавторов совместных исследований и публикаций

Основные результаты диссертации и все положения, выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно. В совместных публикациях [7–13; 15; 21; 25] результаты исследования распределяются следующим образом.

Основные результаты работы [8] принадлежат диссертанту, соавтор А. Т. Павловская выполнила работу, связанную с преобразованиями выражений, используемых для доказательства справедливости необходимых формул.

В совместных работах [7; 9] диссертантом разработаны метод исследования и новые типы регуляторов, позволяющие управлять спектром системы, соавтором А. Т. Павловской проведена апробация полученных результатов на примерах с числовыми параметрами.

В совместной работе [13] идея исследования систем запаздывающего типа со скалярным входом принадлежит д. ф.-м. н., проф. А. В. Метельскому, результаты исследования систем нейтрального типа и новые типы регуляторов – диссертанту.

В совместных работах [10–12] результаты исследования принадлежат авторам в равной мере. При этом постановка задач и научная идея исследования, основанная на специальной структуре регуляторов, предложены В. Е. Хартовским. Консультантом при выборе коэффициентов регулятора вырождения в ходе построения иллюстративных примеров выступил д. ф.-м. н., проф. А. В. Метельский. Техническая работа, связанная с замыканием системы нейтрального типа регулятором специальной структуры, выполнена О. И. Урбан.

В совместной статье [15] диссертантом разработаны типы регуляторов и условия их существования для центральных объектов исследования, соавтору д. ф.-м. н., проф. А. В. Метельскому принадлежит идея исследования систем запаздывающего типа со скалярным входом, имеющих свойство полной 0-управляемости.

В совместных работах [21; 25] идея построения наблюдателей для систем запаздывающего типа принадлежит д. ф.-м. н., проф. А. В. Метельскому, а для систем нейтрального типа — диссертанту.

В совместных публикациях, которые отражают участие в конференциях и семинарах, доклады готовились авторами в равной мере.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации были представлены и докладывались на следующих международных конференциях: «Еругинские чтения – XI» (Гомель, 24–26 мая 2006 г.), X Белорусской математической конференции (Минск, 3–7 ноября 2008 г.), «Актуальные проблемы анализа» (Гродно, 7–10 апреля 2009 г.), «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Минск, 24–28 августа 2009 г., Брест, 17–22 сентября 2012 г., Гродно, 17–20 декабря 2019 г.), «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7–10 декабря 2010 г.), «Еругинские чтения – 2011» (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.), «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (Минск, 12–17 сентября 2011 г., 10–14 сентября 2012 г., 14–19 сентября 2015 г.), XI Белорусской математической конференции (Минск, 5–9 ноября 2012 г.), «Еругинские чтения — 2013» (Гродно, 13–16 мая 2013 г.), «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization» (Минск, 1–5 октября 2013 г., 24–29 сентября 2018 г., 5–10 октября 2021 г.), «Еругинские чтения — 2014» (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.), «Понтрягинские чтения — XXV» (Воронеж, 2014 г.), «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнения» (Минск, 7–10 декабря 2015 г.), XII Белорусской математической конференции (Минск, 5–10 сентября 2016 г.), «Еругинские чтения — 2017» (Минск, 16–20 мая 2017 г.), «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 18–20 сентября 2017 г.), «Еругинские чтения — 2018» (Гродно, 15–18 мая 2018 г.), «Еругинские чтения — 2019» (Могилев, 14–17 мая 2019 г.), «Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика» (Воронеж, 21–23 мая 2019 г.), Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика (Воронеж, 21–23 декабря 2020 г.), «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 1–4 июня 2021 г.), XIII Белорусской математической конференции (Минск, 22–25 ноября 2021 г.); на Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти Н. В. Азбелева и Е. Л. Тонкова (Ижевск, 9–11 июня 2015 г., 15–19 июня 2020 г.), на семинарах по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (Москва, 24.10.2016, 09.04.2018, 08.10.2018); .

Результаты диссертации внедрены в учебные процессы учреждений образования «Полоцкий государственный университет» и «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 86 научных работах, из которых 1 монография (22,7 авт. л.); 25 статей в научных журналах в соответствии с пунктом 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь и зарубежных научных журналах (общим объемом 31,67 авт. л.); 7 статей в других научных изданиях; 28 статей в сборниках материалов научных конференций; 25 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 2 томов. Первый том включает в себя перечень условных обозначений, введение, общую характеристику работы, 5 глав, заключение, библиографический список. Полный объем первого тома составляет 229 страницы. Библиографический список насчитывает 372 наименований на 34 страницах, из них 86 публикаций соискателя. Второй том состоит из приложений. Полный объем второго тома составляет 218 страницы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе приводятся обзор литературы по теме диссертации, обоснование выбранного направления исследований и концепция работы.

Во второй главе решается задача 0-управляемости для линейных автономных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i\dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih), \quad t > 0, \tag{1}$$

и начальным условием $x(t) = \eta(t)$, $u(t) \equiv 0$, $t \in \mathbf{H}$. Здесь D_i, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $u(t)$ — кусочно-непрерывное управление, $\mathbf{H} = [-mh, 0]$, $0 < h$ – постоянное запаздывание, $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}$, $\widetilde{\mathbf{C}}$ — множество непрерывных на $\mathbf{H}$ функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

Определение 1. *Начальную функцию $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}$ системы* (1) *назовем 0-управляемой, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t > 0$, такие, что для соответствующего решения имеет место тождество*

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1, \tag{2}$$

Если 0-управляемы все начальные функции $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}$, то систему (1) *назовем 0-управляемой.*

Замечание 1. 1) Если в определении 1 для $u(t)$, реализующего (2), выполняется $u(t) \equiv 0$, $t > t_1$, то начальную функцию η (систему (1)) называют полностью 0-управляемой. 2) Если система (1) полностью 0-управляема, то она и 0-управляема, обратное утверждение неверно.

Целый круг задач, исследуемых в диссертации, замкнулся на свойствах решения начальной задачи для *дескрипторного разностного уравнения с дискретным временем*:

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{3}$$

$$g(i) = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r. \tag{4}$$

Поскольку B_i — произвольные прямоугольные матрицы, то решение $g(i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ задачи (3), (4) может не существовать или быть не единственным, не очевиден и вопрос его построения. Поэтому уравнение (3) изучено в диссертации отдельным вопросом.

Решение задачи (3), (4) существует тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r \times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) — матрицы, построенные специальным образом, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор. Пусть $S \in \mathbb{R}^{r_0 \times r_0}$ — любое фиксированное решение системы $B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^{m} B_i T_i = 0$, $T_k S = T_{k-1}$, $k = \overline{2, m}$. Ниже неоднократно используются обозначения: $T = T_m$, $G_0 = B_0 T$, $G_i = G_{i-1} S + B_i T$, $i = \overline{1, m-1}$, $G(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i$.

Замечание 2. Матрицу S можно выбирать в зависимости от ее спектра, что важно при дальнейшем построении регуляторов и наблюдателей.

В разделе 2.1 доказан критерий 0-управляемости для системы (1) запаздывающего типа ($D_i = 0$, $i = \overline{1, m}$) . Общий случай изучен в разделе 2.2.

Обозначим: $D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$, $W(p, \lambda) = p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda)$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1) *была 0-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1)\, \mathrm{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph}),\, G(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \tag{5}$$

$$2)\, \mathrm{rank}\big[I_n - D(\lambda),\, B(\lambda),\, G(\lambda)\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

В разделе 2.3 исследуется система нейтрального типа с не дифференцируемым в общем случае решением

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i x(t - ih)\right) = \sum_{i=0}^{m} \Big(A_i x(t - ih) + B_i u(t - ih)\Big),\ t > 0, \tag{7}$$

$x(t) = \eta(t)$, $u(t) \equiv 0$, $t \in \mathbf{H}$, где $\eta \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ — пространство непрерывных функций (если $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}$, то систему (7) можно переписать в виде (1)).

Теорема 2. *Для того чтобы система* (7) *была 0-управляема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождество* $\big|I_n - D(\lambda)\big| \equiv 1$ *и условие* $\mathrm{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph}),\, G(e^{-ph})\big] = n\, \forall p \in \mathbb{C}$.

В ходе доказательства теорем 1, 2 для систем (1) и (7) были решены задачи полной 0-управляемости и финальной наблюдаемости. Эти задачи представляют собой самостоятельный интерес, однако в рамках диссертационного исследования являются вспомогательными. Приведем критерии полной 0-управляемости системы (1).

Теорема 3. *Для того чтобы система* (1) *была полностью 0-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1)\, \mathrm{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \tag{8}$$

$$2)\, \mathrm{rank}\big[I_n - D(\lambda),\, B(\lambda)\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Третья глава посвящена проблеме проектирования регуляторов. Перепишем уравнение (1) в виде (λ_h — оператор сдвига, $\lambda_h f(t) = f(t-h)$)

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0. \tag{10}$$

В разделе 3.1 решаются некоторые вспомогательные задачи.

Характеристический квазиполином системы (10) имеет вид $\left|W(p, e^{-ph})\right| = p^n w_n(e^{-ph}) + \sum_{i=0}^{n-1} p^i w_i(e^{-ph})$, где $w_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, — некоторые полиномы, причем $w_n(0) = 1$. Если $w_n(\lambda) \equiv 1$, то говорят, что квазиполином $\left|W(p, e^{-ph})\right|$ имеет запаздывающий тип. Подраздел 3.1.1 посвящен вопросу синтеза регулятора

$$\begin{aligned} u(t) &= N_{11}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= N_{21}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{22}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_2(t), \end{aligned} \tag{11}$$

такого, что система (10), (11) ($v = 0$) является системой нейтрального типа и имеет характеристический квазиполином запаздывающего типа. Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{r_2}$ — вспомогательная переменная; $N_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$[10], $N_{12}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{r\times r_2}[\lambda]$, $N_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_2\times n}[\lambda]$, $N_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_2\times r_2}[\lambda]$, $r_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (если $r_2 = 0$, то в (11) нету переменной x_1 и второго уравнения), $v = \mathrm{col}[v_1, v_2]$ — новое управление. Показано, что условие (9) необходимо и достаточно для существования регулятора (11), предложены методы его построения.

Ниже будет показано, что условие (9) необходимо для существования ряда важных структурных свойств системы (10). При его выполнении можно построить управление (11), ввести переменную $x_{\text{п}}$, положив $\mathrm{col}[x, x_1] = \Pi_{\overline{D}}(\lambda_h)x_{\text{п}}$, и перейти к анализу системы запаздывающего типа

$$\dot{x}_{\text{п}}(t) = A_\Pi(\lambda_h)x_{\text{п}}(t) + \overline{B}(\lambda_h)v(t), \tag{12}$$

где $A_\Pi(\lambda) = \overline{A}(\lambda)\Pi_{\overline{D}}(\lambda)$, $\Pi_{\overline{D}}(\lambda)$ – матрица, присоединенная к $\left(I_{n+r_2} - \overline{D}(\lambda)\right)$, причем $\left|\Pi_{\overline{D}}(\lambda)\right| \equiv 1$, $\overline{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) + B(\lambda)N_{11}(\lambda) & B(\lambda)N_{12}(\lambda) \\ N_{21}(\lambda) & N_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$, $\overline{A}(\lambda) = = \begin{bmatrix} A(\lambda) & 0_{n\times r_2} \\ 0_{r_2\times n} & 0_{r_2\times r_2} \end{bmatrix}$, $\overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) & 0_{n\times r_2} \\ 0_{r_2\times r} & I_{r_2} \end{bmatrix}$[11].

В подразделе 3.1.2, для компактного описания слагаемых с распределенными запаздываниями специального вида, вводится множество $\mathbf{J}^{r\times n}$, состоящее из операторов $\mathfrak{J} : \mathbf{PC}^{(1)}(\Delta_{\mathfrak{J}}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^r$ $(n, r \in \mathbb{N})$, действующих по правилу

$$\mathfrak{J}[\varphi] = J^{(0)}(\lambda_h)\varphi(0) + J^{(1)}(\lambda_h)\dot{\varphi}(0) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)\varphi(-kh - s)ds. \tag{13}$$

[10] $\mathbb{R}^{m\times n}[\lambda]$, $\mathbb{R}^{m\times n}[p,\lambda]$ — множества полиномиальных матриц размера $m\times n$ одной и двух переменных соотвественно.

[11] Запись $0_{m\times k}$ означает нулевую матрицу размера $m \times k$ (используется при необходимости указания размеров нулевых блоков).

Здесь $\mathbf{PC}^{(1)}(\Delta,\mathbb{R}^k)$ — множество дифференцируемых функций φ таких, что $\dot\varphi \in \mathbf{PC}(\Delta,\mathbb{R}^k)$, где $\mathbf{PC}(\Delta,\mathbb{R}^k)$, $\Delta \in \mathbb{R}$, — множество кусочно-непрерывных функций; $J^{(0)}(\lambda)$, $J^{(1)}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$; $J_0^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde m_k} e^{\alpha_{k\rho}s}\Big(J_1^{(k\rho)}(s)\cos\beta_{k\rho}s + J_2^{(k\rho)}(s)\sin\beta_{k\rho}s\Big)$ ($\breve m, \tilde m_k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\alpha_{k\rho},\beta_{k\rho}, \in \mathbb{R}$, $J_j^{(k\rho)}(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s]$, $j = 1,2$); $\Delta_{\mathfrak{J}} = [-h_{\mathfrak{J}},0]$ — отрезок, зависящий от $\mathfrak{J}$, $h_{\mathfrak{J}} = h\max\big\{\deg J^{(0)}(\lambda), \deg J^{(1)}(\lambda), \breve m+1\big\}$.

Для заданного оператора $\mathfrak{J}$, любой $x(t)$, $t \ge -h_{\mathfrak{J}}$, и фиксированного $t \ge 0$ обозначим $x_t = x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in \Delta_{\mathfrak{J}}$, и для $x_t \in \mathbf{PC}^{(1)}(\Delta_{\mathfrak{J}},\mathbb{R}^n)$

$$\mathfrak{J}[x_t] = J^{(0)}(\lambda_h)x(t) + J^{(1)}(\lambda_h)\dot x(t) + \sum_{k=0}^{\breve m}\int\limits_0^h J_0^{(k)}(s)x(t-kh-s)ds.$$

Оператору (13) поставим в соответствие матрицу

$$J(p,e^{-ph}) = J^{(0)}(e^{-ph}) + pJ^{(1)}(e^{-ph}) + \sum_{k=0}^{\breve m}\int\limits_0^h J_0^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)}ds. \tag{14}$$

Применив в (14) формулы Эйлера для комплексных чисел, вычислим полученные интегралы. Затем, положив $\lambda = e^{-ph}$, перепишем (14) в виде

$$J(p,\lambda) = J^{(0)}(\lambda) + pJ^{(1)}(\lambda) + J^{(2)}(p,\lambda). \tag{15}$$

Элементами матрицы $J^{(2)}(p,\lambda)$ являются правильные относительно переменной p дробно-рациональные функции вида $\frac{b(p,\lambda)}{c(p)}$, где $b(p,\lambda)$ и $c(p)$ — полиномы с комплексными коэффициентами, причем $c(p) \not\equiv \mathrm{const}$.

Пусть отображение æ каждому оператору $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r\times n}$ ставит в соответствие матрицу $J(p,\lambda)$ вида (15), каковы бы ни были $r,n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{J} \overset{\text{æ}}{\mapsto} J(p,\lambda)$.

Обозначим: $\mathcal{C}^{r\times n}(p,\lambda)$ — множество матриц $J(p,\lambda)$ вида (15) таких, что матрица $J(p,e^{-ph})$ представима в виде (14); $\mathbf{J}_0^{r\times n} \subset \mathbf{J}^{r\times n}$ и $\mathcal{C}_0^{r\times n}(p,\lambda) \subset \mathcal{C}^{r\times n}(p,\lambda)$ — множества операторов (13) и матриц (15) при $J^{(1)}(\lambda) = 0$.

Далее будут необходимы следующие понятия.

Определение 2. *Будем говорить, что матрица $\Omega(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{k\times k}[p,\lambda]$ имеет N-структуру (Neutral — нейтральную), если найдутся матрицы $\Omega_0(\lambda),\Omega_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{k\times k}[\lambda]$, $\big|\Omega_0(0)\big| \ne 0$, такие, что $\Omega(p,\lambda) = p\,\Omega_0(\lambda) + \Omega_1(\lambda)$.*

Определение 3. *Будем говорить, что матрица $\Omega(p,\lambda)$, элементы которой есть дробно-рациональные функции с комплексными коэффициентами, имеет N_1-структуру, если найдутся такие $\Omega_0(\lambda)$, $\Omega_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{k\times k}[\lambda]$, $\big|\Omega_0(0)\big| \ne 0$, и $\Omega_2(p,\lambda) \in \mathcal{C}^{k\times k}(p,\lambda)$, элементы которой есть правильные по переменной p дробно-рациональные функции, что $\Omega(p,\lambda) = p\Omega_0(\lambda) + \Omega_1(\lambda) + \Omega_2(p,\lambda)$.*

В подразделе 3.1.3 вводится класс гибридных регуляторов

$$u(t) = T_\psi(\lambda_h)\psi(t) + \mathfrak{U}_1[x_t], \quad \psi(t) = \lambda_h S_\psi(\lambda_h)\psi(t) + \mathfrak{U}_2[x_t], \quad t > 0,$$

где $\psi \in \mathbb{R}^{r_1}$ — новая переменная, $\mathfrak{U}_1 \in \mathbf{J}^{r\times n}$, $\mathfrak{U}_2 \in \mathbf{J}^{r_1\times n}$, $S_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times r_1}[\lambda]$, $T_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r_1}[\lambda]$, и изучаются его свойства. Дальнейшее исследование задач управления осуществляется при помощи данного класса регуляторов.

В разделе 3.2 исследуется следующая

Задача 1. *Требуется замкнуть систему* (10) *линейной обратной связью* $u = u(x, \dot{x})$ *так, чтобы переменная* x *стала векторной компонентой решения некоторой линейной автономной системы нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями и конечным спектром.*

Введем два класса регуляторов:

1) класс DD-регуляторов (differential-difference — дифференциально-разностные)

$$u(t) = R_1^{(0)}(\lambda_h)X(t) + R_1^{(1)}(\lambda_h)\dot{X}(t), \tag{16}$$

$$\dot{x}_1(t) = R_2^{(0)}(\lambda_h)X(t) + R_2^{(1)}(\lambda_h)\dot{X}(t), \tag{17}$$

2) класс HDD-регуляторов (hybrid differential-difference — гибридные дифференциально-разностные)

$$u(t) = L_1^{(0)}(\lambda_h)X(t) + L_1^{(1)}(\lambda_h)\dot{X}(t) + T_\psi(\lambda_h)\psi(t), \tag{18}$$

$$\dot{x}_1(t) = L_2^{(0)}(\lambda_h)X(t) + L_2^{(1)}(\lambda_h)\dot{X}(t), \tag{19}$$

$$\psi(t) = \lambda_h S_\psi(\lambda_h)\psi(t) + L_3^{(0)}(\lambda_h)X(t) + L_3^{(1)}(\lambda_h)\dot{X}(t). \tag{20}$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi \in \mathbb{R}^{r_1}$ — вспомогательные переменные, $X = \mathrm{col}[x, x_1]$; $R_1^{(k)}(\lambda), L_1^{(k)}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(n+n_1)}[\lambda]$, $R_2^{(k)}(\lambda), L_2^{(k)}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times(n+n_1)}[\lambda]$, $L_3^{(k)}(\lambda) \in$ $\in \mathbb{R}^{r_1\times(n+n_1)}[\lambda]$, $k = 0, 1$, $T_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r_1}[\lambda]$, $S_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times r_1}[\lambda]$.

Пусть $R_i^{(k)}(\lambda) = \left[R_{i1}^{(k)}(\lambda),\, R_{i2}^{(k)}(\lambda)\right]$, $L_i^{(k)}(\lambda) = \left[L_{i1}^{(k)}(\lambda),\, L_{i2}^{(k)}(\lambda)\right]$ (первый и второй блоки состоят из n и n_1 столбцов), $\overline{W}_1(p, e^{-ph})$, $\overline{W}_2(p, e^{-ph})$ — характеристические матрицы замкнутых систем (10), (16), (17) и (10), (18)–(20) соответственно,

$$\overline{W}_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)\big(pR_{11}^{(1)}(\lambda) + R_{11}^{(0)}(\lambda)\big) & -B(\lambda)\big(pR_{12}^{(1)}(\lambda) + R_{12}^{(0)}(\lambda)\big) \\ -pR_{21}^{(1)}(\lambda) - R_{21}^{(0)}(\lambda) & p\big(I_{n_1} - R_{22}^{(1)}(\lambda)\big) - R_{22}^{(0)}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\overline{W}_2(p,\lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)\big(pL_{11}^{(1)}(\lambda) + L_{11}^{(0)}(\lambda)\big) & -B(\lambda)\big(pL_{12}^{(1)}(\lambda) + L_{12}^{(0)}(\lambda)\big) & -B(\lambda)T_\psi(\lambda) \\ -pL_{21}^{(1)}(\lambda) - L_{21}^{(0)}(\lambda) & p\big(I_{n_1} - L_{22}^{(1)}(\lambda)\big) - L_{22}^{(0)}(\lambda) & 0_{n_1\times r_1} \\ -pL_{31}^{(1)}(\lambda) - L_{31}^{(0)}(\lambda) & -pL_{32}^{(1)}(\lambda) - L_{32}^{(0)}(\lambda) & I_{r_1} - \lambda S_\psi(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Определение 4. *Систему* (10) *назовем спектрально приводимой в классе DD-регуляторов, если существует регулятор вида* (16), (17) *такой, что: 1) матрица* $\overline{W}_1(p,\lambda)$ *имеет* N*-структуру; 2) определитель* $\left|\overline{W}_1(p,e^{-ph})\right|$ *является полиномом.*

Определение 5. *Систему* (10) *назовем слабо спектрально приводимой в классе HDD-регуляторов, если существует регулятор вида* (18)–(20) *такой, что: 1) найдется матрица* $\overline{P}_{13}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda]$ *такая, что*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_1} & \overline{P}_{13}(\lambda) \\ 0_{n_1\times n} & I_{n_1} & 0_{n_1\times r_1} \\ 0_{r_1\times n} & 0_{r_1\times n_1} & I_{r_1} \end{bmatrix} \overline{W}_2(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \overline{\Theta}_1(p,\lambda) & 0_{(n+n_1)\times r_1} \\ \overline{\Theta}_2(p,\lambda) & I_{r_1} - \lambda S_\psi(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\overline{\Theta}_1(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+n_1)\times(n+n_1)}[p,\lambda]$, $\overline{\Theta}_2(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times(n+n_1)}[p,\lambda]$; *2) матрица* $\overline{\Theta}_1(p,\lambda)$ *имеет* N*-структуру; 3) определитель* $\left|\overline{\Theta}_1(p,e^{-ph})\right|$ *является полиномом.*

Замечание 3. Определение 5 означает, что векторная компонента X вектора-решения $\operatorname{col}\big[X,\psi\big]$ системы (10), (18)–(20) есть решение некоторой подсистемы системы (10), (18)–(20), которая имет нейтральный типа, характеристическую матрицу $\overline{\Theta}_1(p,e^{-ph})$ и конечный спектр. Получить эту подсистему можно при помощи элементарных преобразований уравнений системы (10), (18)–(20)[12].

Введем множества: $\mathbf{P}_B = \Big\{p\in\mathbb{C} \;:\; \operatorname{rank}\big[W(p,e^{-ph}),\, B(e^{-ph})\big] < n\Big\}$, $\mathbf{P}_{B,G} = \Big\{p\in\mathbb{C} \;:\; \operatorname{rank}\Big[W(p,e^{-ph}),\, B(e^{-ph}),\, G(e^{-ph})\Big] < n\Big\}$. Рассмотрим условие

$$\textit{множество } \mathbf{P}_B \textit{ состоит из конечного числа элементов.} \tag{21}$$

Теорема 4. *Для того чтобы система* (10) *была спектрально приводима в классе DD-регуляторов, необходимо и достаточно выполнения условий* (9), (21).

Теорема 5. *Для того чтобы система* (10) *была слабо спектрально приводимой в классе HDD-регуляторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* 1) *множество* $\mathbf{P}_{B,G}$ *состоит из конечного числа элементов;* 2) $\operatorname{rank}\big[I_n - D(\lambda),\, B(\lambda),\, G(\lambda)\big] = n\,\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

В разделе 3.3 изучается

Задача 2. *Требуется замкнуть систему* (10) *линейной обратной связью* $u = u(x,\dot{x})$ *так, чтобы переменная* x *стала векторной компонентой решения некоторой линейной автономной системы нейтрального типа с заданным характеристическим квазиполиномом.*

[12] Под элементарными преобразованиями уравнений системы понимаем: 1) перестановку уравнений системы местами; 2) умножения обеих частей какого-либо уравнения системы на оператор сдвига $a\lambda_h^k$, где $a\in\mathbb{R}$, $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$; 3) прибавление к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого уравнения этой системы, предварительно умноженных на оператор сдвига $a\lambda_h^k$.

Используются следующие классы регуляторов:

1) класс IDD-регуляторов (integro-differential-difference — интегро-дифференциально-разностные)

$$u(t) = \mathfrak{U}_1[X_t], \quad \dot{x}_1(t) = \mathfrak{U}_2[X_t], \tag{22}$$

2) класс HIDD-регуляторов (hybrid integro-differential-difference — гибридные интегро-дифференциально-разностные)

$$\begin{gathered} u(t) = \mathfrak{V}_1[X_t] + T_\psi(\lambda_h)\psi(t), \quad \dot{x}_1(t) = \mathfrak{V}_2[X_t], \\ \psi(t) = \lambda_h S_\psi(\lambda_h)\psi(t) + \mathfrak{V}_3[X_t]. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi \in \mathbb{R}^{r_1}$ – вспомогательные переменные, $X = \mathrm{col}[x, x_1]$; $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1 \in \mathbf{J}^{r\times(n+n_1)}$, $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{V}_2 \in \mathbf{J}^{n_1\times(n+n_1)}$, $\mathfrak{V}_3 \in \mathbf{J}^{r_1\times(n+n_1)}$, $T_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r_1}[\lambda]$, $S_\psi(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times r_1}[\lambda]$.

Пусть $\mathfrak{U}_i \overset{\text{æ}}{\mapsto} U_i(p,\lambda)$, $\mathfrak{V}_i \overset{\text{æ}}{\mapsto} V_i(p,\lambda)$, $U_i(p,\lambda) = \big[U_{i1}(p,\lambda), U_{i2}(p,\lambda)\big]$, $V_i(p,\lambda) = \big[V_{i1}(p,\lambda), V_{i2}(p,\lambda)\big]$ (первый и второй блоки состоят из n и n_1 столбцов), $\overline{W}_3(p,e^{-ph})$ и $\overline{W}_4(p,e^{-ph})$ — характеристические матрицы систем (10), (22) и (10), (23) соответственно,

$$\overline{W}_3(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)U_{11}(p,\lambda) & -B(\lambda)U_{12}(p,\lambda) \\ -U_{21}(p,\lambda) & pI_{n_1} - U_{22}(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\overline{W}_4(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)V_{11}(p,\lambda) & -B(\lambda)V_{12}(p,\lambda) & -B(\lambda)T_\psi(\lambda) \\ -V_{21}(p,\lambda) & pI_{n_1} - V_{22}(p,\lambda) & 0_{n_1\times r_1} \\ -V_{31}(p,\lambda) & -V_{32}(p,\lambda) & I_{r_1} - \lambda S_\psi(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Введем полином (ниже $d_i(\lambda)$ — некоторые полиномы, $d_{\bar{n}}(0) = 1$)

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} p^i d_i(\lambda). \tag{24}$$

Определение 6. *Систему* (10) *назовем модально управляемой в классе IDD-регуляторов* (22), *если существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого полинома* (24), $\deg_p d(p,\lambda) = \bar{n} \geq n_0$, *найдется регулятор вида* (22), *обеспечивающий выполнение условий: 1) матрица $\overline{W}_3(p,\lambda)$ имеет N_1-структуру; 2) $\left|\overline{W}_3(p,e^{-ph})\right| = d(p,e^{-ph})$.*

Определение 7. *Систему* (10) *назовем слабо модально управляемой в классе HIDD-регуляторов* (23), *если существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого полинома* (24), $\deg_p d(p,\lambda) = \bar{n} \geq n_0$, *найдется регулятор вида* (23), *обеспечивающий выполнение условий: 1) найдется матрица $\overline{P}_{13}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r_1}[\lambda]$, такая, что*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_1} & \overline{P}_{13}(\lambda) \\ 0_{n_1\times n} & I_{n_1} & 0_{n_1\times r_1} \\ 0_{r_1\times n} & 0_{r_1\times n_1} & I_{r_1} \end{bmatrix} \overline{W}_4(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \overline{\Theta}_1(p,\lambda) & 0_{(n+n_1)\times r_1} \\ \overline{\Theta}_2(p,\lambda) & I_{r_1} - \lambda S_\psi(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\overline{\Theta}_1(p,\lambda) \in \mathcal{C}^{(n+n_1)\times(n+n_1)}(p,\lambda)$, $\overline{\Theta}_2(p,\lambda) \in \mathcal{C}^{r_1\times(n+n_1)}(p,\lambda)$; *2) матрица* $\overline{\Theta}_1(p,\lambda)$ *имеет* N_1*-структуру; 3)* $\left|\overline{\Theta}_1(p,e^{-ph})\right| = d(p,e^{-ph})$.

Замечание 4. Определение 7 означает, что векторная компонента X вектора-решения $\mathrm{col}\big[X,\psi\big]$ системы (10), (23) есть решение некоторой подсистемы системы (10), (23), имеющей нейтральный тип, характеристическую матрицу $\overline{\Theta}_1(p,e^{-ph})$ и $\left|\overline{\Theta}_1(p,e^{-ph})\right| = d(p,e^{-ph})$. Получить эту подсистему можно при помощи элементарных преобразований уравнений системы (10), (23).

Теорема 6. *Для того чтобы система* (10) *была модально управляемой в классе IDD-регуляторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (8), (9).

Теорема 7. *Для того чтобы система* (10) *была слабо модально управляемой в классе HIDD-регуляторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (5), (6).

Более простыми с точки зрения реализации являются дифференциально-разностные регуляторы. Поэтому отдельным вопросом изучена задача управления спектром в классах DD-регуляторов (16), (17) и HDD-регуляторов (18)–(20).

Условия теоремы 6 необходимы для модальной управляемости в классе DD-регуляторов. Построим в силу (9) систему (12). Пусть $\Pi_{\overline{D}}(\lambda) = \big[\Pi_{ij}(\lambda)\big]_{i,j=1}^{2}$, $b_i(\lambda)$ и $c_i(\lambda)$ — i-е столбцы матриц $B(\lambda)$ и $A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)$ соответственно, $Q(\lambda) = A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$.

Теорема 8. *Пусть система* (10) *модально управляема в классе DD-регуляторов. Тогда, каковы бы ни были полиномиальные матрицы* $N_{ij}(\lambda)$, $i,j=1,2$, *регулятора* (11), *обеспечивающего запаздывающий тип характеристического квазиполинома системы* (10), (11), *выполняется условие* $\mathrm{rank}\Big[B(\lambda),\, A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda),\, Q(\lambda)B(\lambda),\, Q(\lambda)A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda),\ldots,Q^{n-1}(\lambda)B(\lambda),$ $Q^{n-1}(\lambda)A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)\Big] = n.$

Теорема 9. *Для модальной управляемости системы* (10) *в классе DD-регуляторов достаточно, чтобы нашлись такие вектор-столбцы* $b_{i_j}(\lambda)$, $j=\overline{1,s_1}$, $c_{k_j}(\lambda)$, $j=\overline{1,s_2}$, *и числа* θ_i, $i=\overline{1,s_1+s_2}$, $\theta_1+\ldots+\theta_{s_1+s_2}=n$, *для которых выполняется условие* $\Big|b_{i_1}(\lambda),\ldots,Q^{\theta_1-1}(\lambda)b_{i_1}(\lambda),\ldots,b_{i_{s_1}}(\lambda),\ldots,Q^{\theta_{s_1}-1}(\lambda)b_{i_{s_1}}(\lambda),c_{k_1}(\lambda),\ldots,$ $Q^{\theta_{s_1+1}-1}(\lambda)c_{k_1}(\lambda),\ldots,Q^{\theta_{s_1+s_2}-1}(\lambda)c_{k_{s_2}}(\lambda)\Big| \equiv \mathrm{const} \neq 0.$

Условия теоремы 7 необходимы для слабой модальной управляемости в классе HDD-регуляторов. В силу (6) существуют полиномиальные матрицы $\widetilde{N}_{ij}(\lambda)$ такие, что $|I_{n+\hat{r}} - \widetilde{D}(\lambda)| \equiv 1$ ($\hat{r} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$),

$$\widetilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda)+B(\lambda)\widetilde{N}_{11}(\lambda)+G(\lambda)\widetilde{N}_{12}(\lambda) & B(\lambda)\widetilde{N}_{13}(\lambda)+G(\lambda)\widetilde{N}_{14}(\lambda) \\ \widetilde{N}_{21}(\lambda) & \widetilde{N}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть $\widetilde{\Pi}(\lambda) = \left[\widetilde{\Pi}_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$ — матрица, присоединенная к $\left(I_{n+\hat{r}} - \widetilde{D}(\lambda)\right)$, $\widetilde{Q}(\lambda) = A(\lambda)\widetilde{\Pi}_{11}(\lambda)$, $g_i(\lambda)$ и $\widetilde{c}_i(\lambda)$ — i-е столбцы матриц $G(\lambda)$ и $A(\lambda)\widetilde{\Pi}_{12}(\lambda)$.

Теорема 10. *Пусть система* (10) *слабо модально управляема в классе HDD-регуляторов. Тогда, каковы бы ни были полиномиальные матрицы* $\widetilde{N}_{ij}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$, *обеспечивающие тождество* $|I_{n+\hat{r}} - \widetilde{D}(\lambda)| \equiv 1$, *выполняется условие* $\operatorname{rank}\Big[B(\lambda), G(\lambda), A(\lambda)\widetilde{\Pi}_{12}(\lambda), \widetilde{Q}(\lambda)B(\lambda), \widetilde{Q}(\lambda)G(\lambda), \widetilde{Q}(\lambda)A(\lambda)\widetilde{\Pi}_{12}(\lambda), \ldots, \widetilde{Q}^{n-1}(\lambda)B(\lambda), \widetilde{Q}^{n-1}(\lambda)G(\lambda), \widetilde{Q}^{n-1}(\lambda)A(\lambda)\widetilde{\Pi}_{12}(\lambda)\Big] = n.$

Теорема 11. *Для слабой модальной управляемости системы* (10) *в классе HDD-регуляторов достаточно, чтобы нашлись такие вектор-столбцы* $b_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1, s_1}$, $g_{q_j}(\lambda)$, $j = \overline{1, s_2}$, $\widetilde{c}_{k_j}(\lambda)$, $j = \overline{1, s_3}$, *и числа* θ_i, $i = \overline{1, s_1 + s_2 + s_3}$, $\theta_1 + \ldots + \theta_{s_1+s_2+s_3} = n$, *что выполняется условие* $\Big|b_{i_1}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_1 - 1}(\lambda)b_{i_1}(\lambda), \ldots, b_{i_{s_1}}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_{s_1}-1}(\lambda)b_{i_{s_1}}(\lambda), g_{q_1}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_{s_1+1}-1}(\lambda)g_{q_1}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_{s_1+s_2}-1}(\lambda)g_{q_{s_2}}(\lambda), \widetilde{c}_{k_1}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_{s_1+s_2+1}-1}(\lambda)\widetilde{c}_{k_1}(\lambda), \ldots, Q^{\theta_{s_1+s_2+s_3}-1}(\lambda)\widetilde{c}_{k_{s_3}}(\lambda)\Big| \equiv \mathrm{const} \neq 0.$

Раздел 3.3 посвящен синтезу регуляторов успокоения решения.

Задача 3. *Требуется замкнуть систему* (10) *линейной обратной связью* $u = u(x, \dot{x})$ *так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) существует момент времени* $t_1 > 0$, *такой, что какова бы ни была начальная функция* $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}$, *векторная компонента* x *решения замкнутой системы удовлетворяет тождеству* $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$; *2) переменная* x *является векторной компонентой решения некоторой экспоненциально устойчивой линейной автономной системы нейтрального типа, являющейся подсистемой замкнутой системы.*

Задача 4. *Требуется замкнуть систему* (10) *линейной обратной связью* $u = u(x, \dot{x})$ *так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) выполняется условие 1) задачи 3; 2) переменная* x *является векторной компонентой решения некоторой линейной автономной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями, являющейся подсистемой замкнутой системы.*

Теорема 12. *Для разрешимости задач 3 и 4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (5), (6).

В общем случае задачи 3, 4 решены в классах HIDD-регуляторов (23) и HDD-регуляторов (18)–(20) соответственно. Если система (10) полностью 0-управляема, то решения задач 3, 4 можно получить в классах IDD-регуляторов (22) и DD-регуляторов (16), (17) соответственно.

В четвертой главе диссертации решаются задачи проектирования наблюдателей для линейной автономной системы нейтрального типа

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{25}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0, \tag{26}$$

где $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $y(t)$ — наблюдаемый выход, остальные обозначения и начальное условие те же, что и ранее.

Любую дифференциальную систему, зависящую от выхода (26), решение которой $z(t)$ есть оценка решения $x(t)$ уравнения (25), будем называть *наблюдателем* для системы (25), (26).

Вопросы существования наблюдателей исследуются с позиции выполнений условий финальной наблюдаемости[13], полученных в разделе 2.2. Для системы (25), (26) они имеют вид

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n\,\forall p\in\mathbb{C};\;\; 2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n\,\forall\lambda\in\mathbb{C}. \quad (27)$$

В разделе 4.1 наблюдатели строятся на базе решения задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости.

Определение 8. *Наблюдатель для системы* (25), (26) *будем называть асимптотическим наблюдателем, если не зависимо от начальных условий исходной системы и наблюдателя выполняется соотношение* $\|z(t)-x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ *при* $t\to+\infty$.

Определение 9. *Наблюдатель для системы* (25), (26) *будем называть асимптотическим наблюдателем с ограниченной ошибкой, если существуют зависящие от начального условия наблюдателя числа* $\Delta, t_* > 0$ *и функция* $\omega(t), \omega(t) \to 0$ *при* $t\to+\infty$, *такие, что* $\|z(t)-x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \Delta + \omega(t)$, $t > t_*$.

Определим для системы (25), (26) следующий наблюдатель:

$$\begin{aligned} &(I_n - D(\lambda_h))\dot z(t) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{C}_{11}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{C}_{12}[z_{1,t}] - \mathfrak{C}_{11}[y_t], \\ &\dot z_1(t) = \mathfrak{C}_{21}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{C}_{22}[z_{1,t}] - \mathfrak{C}_{21}[y_t], \quad t > t_0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\mathfrak{C}_{11}\in\mathbf{J}^{n\times r}$, $\mathfrak{C}_{12}\in\mathbf{J}^{n\times n_1}$, $\mathfrak{C}_{21}\in\mathbf{J}^{n_1\times r}$, $\mathfrak{C}_{22}\in\mathbf{J}^{n_1\times n_1}$; $n_1\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ($n_1 = 0$ означает, что у наблюдателя (28) отсутствует второе уравнение и переменная z_1), $t_0 \ge 0$. Начальные условия для системы (28) возьмем в виде $z(t) = z^*(t)$, $z_1(t) = z_1^*(t)$, $t\in[0,t_0]$, z^*, z_1^* — непрерывные функции, имеющие кусочно-непрерывную производную. Ошибка $\zeta(t) = z(t) - x(t)$, $t\ge 0$, наблюдателя (28) есть векторная компонента решения однородной ($y\equiv 0$) системы (28).

Введем квазиполином (ниже $d_i(\lambda)$ — полиномы, $d_i(0) = 1$)

$$d(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{\phi} p^i d_i(e^{-ph}), \quad (29)$$

число $\phi\in\mathbb{N}$ назовем *степенью квазиполинома* (29).

---

[13]В случае систем запаздывающего типа ($D(\lambda) = 0$) эти условия равносильны условиям спектральной наблюдаемости.

Теорема 13. *Для того чтобы для любого наперед заданного квазиполинома $d(p, e^{-ph})$ вида (29) степени $\phi \geq n + r + 1$ существовал наблюдатель (28), у которого ошибка оценивания ζ является векторной компонентой решения некоторой линейной автономной однородной системы нейтрального типа с характеристическим квазиполиномом, равным $d(p, e^{-ph})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (27).*

Выбирая подходящий квазиполином (29), согласно теореме 13 строим асимптотический наблюдатель вида (28).

Предположим, что условия (27) нарушаются. Положив $B_i = C_i^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{0, m}$, построим уравнение (3) и определим матрицы S, T и $G(\lambda)$. Пусть $G_c(\lambda) = \big(G(\lambda)\big)^{\mathrm{T}}$, $T_c = T^{\mathrm{T}}$, $S_c = S^{\mathrm{T}}$. Определим наблюдатель, описываемый дифференциально-алгебраической системой вида

$$\begin{aligned} (I_n - D(\lambda_h))\dot{z}(t) &= A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{R}_{11}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{R}_{12}[z_{1,t}] + \mathfrak{R}_{13}[\psi_t] - \mathfrak{R}_{11}[y_t], \\ \dot{z}_1(t) &= \mathfrak{R}_{21}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{R}_{22}[z_{1,t}] + \mathfrak{R}_{23}[\psi_t] - \mathfrak{R}_{21}[y_t], \\ \psi(t) &= S_c\lambda_h\psi(t) + T_cC(\lambda_h)z(t) - T_cy(t), \quad t > t_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $\mathfrak{R}_{11} \in \mathbf{J}^{n\times r}$, $\mathfrak{R}_{12} \in \mathbf{J}^{n\times n_1}, \mathfrak{R}_{13} \in \mathbf{J}^{n\times r_0}$, $\mathfrak{R}_{21} \in \mathbf{J}^{n_1\times r}$, $\mathfrak{R}_{22} \in \mathbf{J}^{n_1\times n_1}$, $\mathfrak{R}_{23} \in \mathbf{J}^{n_1\times r_0}$; $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t_1 \geq 0$. Для системы (30) возьмем начальные условия в виде $z(t) = z^*(t)$, $z_1(t) = z_1^*(t)$, $\psi(t) = \psi^*(t)$, $t \in [-mh, t_1]$, z^*, z_1^*, ψ^* — непрерывные функции, имеющие кусочно-непрерывную производную. Однородную ($y \equiv 0$) систему (30) назовем системой ошибки, поскольку ошибка $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$, $t \geq -mh$, есть векторная компонента ее решения.

Теорема 14. *Для того чтобы для любого наперед заданного квазиполинома $d(p, e^{-ph})$ вида (29) степени $\phi \geq n + r + r_0 + 1$ существовал наблюдатель (30), характеристическая матрица $\widetilde{W}(p, e^{-ph})$ системы ошибки которого удовлетворяет следующим условиям: 1) существует унимодулярная*[14] *матрица $\widetilde{G}(\lambda)$ такая, что $\widetilde{W}(p,\lambda)\widetilde{G}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11}(p,\lambda) & \widetilde{W}_{12}(p,\lambda) \\ 0_{r_0\times(n+n_1)} & I_{r_0} - \lambda S_c \end{bmatrix}$, где $\widetilde{W}_{1j}(p,\lambda)$, $j = 1, 2,$ — некоторые матрицы с элементами из множества $\mathcal{C}(p,\lambda)$; 2) матрица $\widetilde{W}_{11}(p,\lambda)$ имеет N_1-структуру; 3) выполняется равенство $\left|\widetilde{W}_{11}(p, e^{-ph})\right| = d(p, e^{-ph})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G_c(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n\,\forall p \in \mathbb{C};\ 2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \\ G_c(\lambda) \end{bmatrix} = n\,\forall\lambda \in \mathbb{C}. \tag{31}$$

[14] Унимодулярная матрица — невырожденная полиномиальная матрица с постоянным определителем.

Зададим квазиполином $d(p, e^{-ph})$ вида (29). Теорема 14 гарантирует существование наблюдателя (30), который при введении новой переменной $\widehat{\psi}$ по формуле $\psi(t) = G_c(\lambda_h)z(t) + \widehat{\psi}(t)$, $t > 0$, примет вид

$$
\begin{gathered}
(I_n - D(\lambda_h))\dot{z}(t) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{R}_{11}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{R}_{13}[G_c(\lambda_h)z_t] + \\
+ \mathfrak{R}_{12}[z_{1,t}] + \mathfrak{R}_{13}[\widehat{\psi}_t] - \mathfrak{R}_{11}[y_t], \\
\dot{z}_1(t) = \mathfrak{R}_{21}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{R}_{23}[G_c(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{R}_{22}[z_{1,t}] + \\
+ \mathfrak{R}_{23}[\widehat{\psi}_t] - \mathfrak{R}_{21}[y_t],
\end{gathered} \tag{32}
$$

$$
\widehat{\psi}(t) = S_c\lambda_h\widehat{\psi}(t) - T_c y(t), \quad t > t_2 = t_1 + (m-1)h. \tag{33}
$$

Определим для системы (32), (33) начальные условия в виде непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную:

$$
z(t) = z^*(t),\, t \in [-mh, t_2], \quad z_1(t) = z_1^*(t),\, \widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_0(t),\, t \in [-h, t_2]. \tag{34}
$$

Из уравнения (33) независимо от системы (32) находим $\widehat{\psi}(t)$, $t > t_2$. Подставив $\widehat{\psi}$ в (32), в силу теоремы 14 получим линейную автономную систему нейтрального типа с характеристической матрицей $\widetilde{W}_{11}(p, e^{-ph})$ и $\left|\widetilde{W}_{11}(p, e^{-ph})\right| = d(p, e^{-ph})$.

Обозначим λ_i, $i = \overline{1, r_0}$, — собственные значения матрицы S_c. Пусть $\widetilde{\psi}_* = \max\left\{\sup\limits_{t\in(-h,t_2]} \left\|\dfrac{d^k}{dt^k}\widehat{\psi}_0(t) + G_c(\lambda_h)\dfrac{d^k}{dt^k}x(t)\right\|_{\mathbb{R}^{r_0}},\, k = 0, 1\right\}$. Следующие утверждения являются условиями существования асимптотического наблюдателя и асимптотического наблюдателя с ограниченной ошибкой.

Теорема 15. *Пусть для системы* (25), (26) *выполняются условия* (31), *и все собственные значения матрицы* S_c *удовлетворяют условию* $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, r_0}$. *Тогда за счет выбора коэффициентов характеристического квазиполинома* $d(p, e^{-ph})$ *однородной* ($\widehat{\psi} \equiv 0$, $y \equiv 0$) *системы* (32) *можно обеспечить соотношение* $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *каковы бы ни были начальные условия* (34).

Теорема 16. *Пусть для системы* (25), (26) *выполняются условия* (31), *и все собственные значения* λ_i, $i = \overline{1, r_0}$, *матрицы* S_c *удовлетворяют условию* $|\lambda_i| \le 1$, $i = \overline{1, r_0}$, *причем собственным значениям* λ_i, *для которых* $|\lambda_i| = 1$, *отвечают жордановы клетки размерности равной единице. Тогда существует* $\beta \in \mathbb{R}$ *такое, что при подходящем выборе коэффициентов характеристического квазиполинома* $d(p, e^{-ph})$ *однородной* ($\widehat{\psi} \equiv 0$, $y \equiv 0$) *системы* (32) *для любого начального условия* (34) *найдутся* $k_1^* \in \mathbb{N}$ *и функция* $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *обеспечивающие неравенство* $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \beta\widetilde{\psi}_* + \omega(t)$, $t > t_2 + k_1^* h$.

В разделе 4.2 решается задача точного восстановления решения исходной системы по результатам наблюдаемого выхода.

Задача 5. *Требуется построить асимптотически устойчивую линейную автономную систему запаздывающего типа с сосредоточенными и распределенными запаздываниями и с конечным спектром такую, что начиная с некоторого момента времени, выход этой системы будет тождественно равен решению уравнения* (25) *независимо от начальных состояний исходной и построенной систем.*

Определим следующую систему запаздывающего типа с выходом

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \mathfrak{A}(z_t) + \widetilde{F}_1\big(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_1 h)\big), \quad t > \tilde{t}, \\
v(t) &= \widetilde{C}(\lambda_h) z(t) + \widetilde{F}_2\big(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_2 h)\big), \quad t \geq \tilde{t},
\end{aligned} \tag{35}
$$

где $\mathfrak{A} \in \mathbf{J}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$, $\widetilde{C}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times\tilde{n}}[\lambda]$; $\widetilde{F}_i = \widetilde{F}_i(t, \xi_0, \ldots, \xi_{\tilde{n}_i})$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in \mathbb{R}^r$, — некоторые кусочно-непрерывные векторные функции, линейные по переменным ξ_i; $\tilde{n}$, $\tilde{n}_i \in \mathbb{N}\,(i = 1, 2)$, $\tilde{t} > 0$. Решение уравнения (35) однозначно задается непрерывной начальной функцией $z(t) = \tilde{z}(t)$, $t \in [\tilde{t} - m_1 h, \tilde{t}]$, где $m_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — некоторое число. Функцию $\varepsilon(t) = v(t) - x(t)$ назовем ошибкой наблюдения.

Определение 10. *Систему* (35) *назовем финитным наблюдателем для системы* (25), (26), *если: 1) найдется число* $t_1 > \tilde{t}$ *такое, что каковы бы ни были решения* x, z *систем* (25), (35), *ошибка* $\varepsilon(t)$, $t > \tilde{t}$, *удовлетворяет тождеству* $\varepsilon(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1$; *2) система* (35) *имеет запаздывающий тип, конечный спектр и является асимптотически устойчивой.*

Доказан критерий существования финитного наблюдателя.

Теорема 17. *Для того чтобы для системы* (25), (26) *существовал финитный наблюдатель* (35), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (27).

В разделе 4.3 изучается следующая

Задача 6. *Требуется на основании данных о наблюдаемом выходе* $y(t)$, *определяемом формулой* (26), *построить оценку* $z(t)$ *неизвестного вектора решения* $x(t)$ *уравнения* (25) *так, чтобы* $\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *и, кроме того, при вычислении оценки* $z(t)$ *не должны использоваться производные выхода* $y^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$

Одному и тому же выходу $y(t)$, $t \geq 0$, может соответствовать множество решений $x(t)$, $t \geq -mh$, уравнения (25). Каждое такое решение $x(t)$ назовем совместимым с выходом $y(t)$, $t \geq 0$.

Определение 11. *Систему* (25), (26)*назовем асимптотически наблюдаемой, если для любых двух решений* $\hat{x}$ *и* $\check{x}$ *уравнения* (25), *совместимых с выходами* $\hat{y}$ *и* $\check{y}$ *соответственно, выполняется условие: если* $\hat{y}(t) \equiv \check{y}(t)$, $t > t^*$ $\exists t^*$, *то* $\|\hat{x}(t) - \check{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Введем множество $\mathbf{\Lambda}_C = \left\{ p \in \mathbb{C} : \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n \right\}$. Предположим, что в соотношениях (27) выполняется только второе условие,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{36}$$

а первое нарушается в конечном множестве точек, то есть

$$\textit{множество } \mathbf{\Lambda}_C \textit{ состоит из конечного числа элементов.} \tag{37}$$

Теорема 18. *Пусть для системы* (25), (26) *выполняются условия* (36), (37). *Для того чтобы система* (25), (26) *была асимптотически наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re} p < 0 \quad \forall p \in \mathbf{\Lambda}_C. \tag{38}$$

Разработана процедура асимптотической оценки решения асимптотически наблюдаемых систем. Приведем условия ее реализуемости.

В силу (36) найдутся $N(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}[\lambda]$, $N_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$ такие, что $N(\lambda)\operatorname{col}\big[I_n - D(\lambda),\, C(\lambda)\big]N_1(\lambda) = \operatorname{col}\big[I_n,\, 0_{n\times r}\big]$. Пусть $N(\lambda) = \big[N_{ij}(\lambda)\big]_{i,j=1}^{2}$ $\big(N_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]\big)$, $Q(\lambda) = N_{11}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda)$, $K(\lambda) = \operatorname{col}\Big[-N_{21}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda),\, C(\lambda)N_1(\lambda)\Big]$, $\delta = \operatorname{rank}\Big[K(\lambda), \ldots, K(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{n-1}\Big]$. Выберем θ строк $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, матрицы $K(\lambda)$, для которых найдутся δ_j, $j = \overline{1,\theta}$, $\delta_1 + \ldots + \delta_\theta = \delta$, такие, что

$$\operatorname{rank} Q^k_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Q^k_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) \\ k_{i_j}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_j} \end{bmatrix} = \delta_1 + \ldots + \delta_j, \quad j = \overline{1,\theta}, \tag{39}$$

где $Q^k_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) = \operatorname{col}\Big[k_{i_1}(\lambda),\, k_{i_1}(\lambda)Q(\lambda), \ldots, k_{i_1}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_1-1},\, k_{i_2}(\lambda), \ldots, k_{i_2}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_2-1}, \ldots k_{i_j}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_j-1}\Big]$. Построим $N_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$ такую, что

$$Q^k_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)N_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_{1\,n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_{\delta-1\,n-\delta+2}(\lambda) & \ldots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_{\delta\,n-\delta+1}(\lambda) & \times & \ldots & \times \end{bmatrix},$$

где $\omega_{\delta-j\;n-\delta+1+j}(\lambda)$, $j = \overline{0, \delta-1}$, — некоторые ненулевые полиномы, символом «$\times$» обозначены произвольные полиномы. Положим $Q^N(\lambda) = \big(N_2(\lambda)\big)^{-1}Q(\lambda)N_2(\lambda)$, $K^N(\lambda) = K(\lambda)N_2(\lambda)$, тогда

$$Q^N(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta+1\theta+1}(\lambda) & \Phi_{\theta+1\theta}(\lambda) & \ldots & \Phi_{\theta+11}(\lambda) \\ 0 & \Phi_{\theta\theta}(\lambda) & \ldots & \Phi_{\theta1}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Phi_{11}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad K^N(\lambda) = \begin{bmatrix} k^N_1(\lambda) \\ \ldots \\ k^N_{2r}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\Phi_{jj}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\delta_j \times \delta_j}[\lambda]$, $j = \overline{1,\theta}$, $\Phi_{\theta+1\theta+1}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-\delta)\times(n-\delta)}[\lambda]$, размеры остальных блоков $\Phi_{ij}(\lambda)$ понятны; $k_i^N(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times n}[\lambda]$ — строки матрицы $K^N(\lambda)$. Блоки $\Phi_{jj}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, имеют вид

$$\Phi_{jj}(\lambda) = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ \beta_{21}^j(\lambda) & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \beta_{32}^j(\lambda) & \dots & \times & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{\delta_j\delta_j-1}^j(\lambda) & \times \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1,\theta},$$

где $\beta_{ii-1}^j(\lambda)$, $i = \overline{2,\delta_j}$, — некоторые ненулевые полиномы.

Опишем строки $k_i^N(\lambda)$ матрицы $K^N(\lambda)$:

$$k_{i_j}^N(\lambda) = \left[0_{n-\delta}, 0_{\delta_\theta}, \dots, 0_{\delta_{j+1}}, \bar{k}_{jj}(\lambda), \bar{k}_{jj-1}(\lambda), \dots, \bar{k}_{j1}(\lambda)\right], \quad j = \overline{1,\theta},$$

где $0_i \in \mathbb{R}^{1\times i}$ — нулевая строка, $\bar{k}_{j\,j-i}(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times\delta_{j-i}}[\lambda]$, $i = \overline{0, j-1}$, причем $\bar{k}_{jj}(\lambda) = \left[0, \dots, 0, \gamma_{jj}(\lambda)\right]$, $\gamma_{jj}(\lambda)$ — ненулевой полином; $k_j^N(\lambda) = [0, \dots, 0, \times, \dots, \times]$, $j \in \{1, \dots, 2r\} \setminus \{i_1, \dots, i_\theta\}$, (на первых $n-\delta$ местах стоят нули).

Теорема 19. *Пусть для системы* (25), (26) *выполняются условия* (36)–(38). *Если найдется θ $(1 \le \theta \le 2r)$ строк $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, матрицы $K(\lambda)$ таких, что для соответствующей матрицы $Q_{(i_1,\dots,i_\theta)}^k(\lambda)$* ($\operatorname{rank} Q_{(i_1,\dots,i_\theta)}^k(\lambda) = \delta$ *и имеет место* (39)) *выполняется условие $\lambda^* = 0$ или $|\lambda^*| > 1\, \forall \lambda^* \in \Lambda_{(i_1,\dots,i_\theta)}$, где $\Lambda_{(i_1,\dots,i_\theta)} = \left\{\lambda^* \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{rank} Q_{(i_1,\dots,i_\theta)}^k(\lambda^*) < \delta\right\}$, то задача 6 разрешима.*

Введем множество $\widehat{\Lambda}_{(i_1,\dots,i_\theta)} = \left\{\lambda \in \Lambda_{(i_1,\dots,i_\theta)} \,:\, (\lambda \ne 0) \wedge (|\lambda| \le 1)\right\}$. Каждому $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\dots,i_\theta)}$ поставим в соответствие множество индексов $\mathcal{J}(\lambda_0) = \left\{j \in \{1, \dots, \theta\} \,:\, \nu_j(\lambda_0) = 0\right\}$, где $\nu_j(\lambda) = \gamma_{jj}(\lambda) \prod_{k=1}^{\delta_j-1} \beta_{k+1\,k}^j(\lambda)$.

Теорема 20. *Пусть для системы* (25), (26) *выполняются условия* (36)–(38). *Предположим, что выбраны θ $(1 \le \theta \le 2r)$ строк $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, матрицы $K(\lambda)$, построена матрица $Q_{(i_1,\dots,i_\theta)}^k(\lambda)$ и найдены матрицы $Q^N(\lambda)$ и $K^N(\lambda)$. Если для любого числа $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\dots,i_\theta)}$ и всех $j \in \mathcal{J}(\lambda_0)$ выполняются равенства*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_{\delta_j} - \Phi_{jj}(e^{-ph}) \\ \bar{k}_{jj}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = \delta_j \quad \forall p \in \mathbb{C},$$

то задача 6 разрешима.

В разделе 4.4 решается следующая

Задача 7. *Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями, конечным спектром и с выходом $\bar{x}$, такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (26), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, есть точная оценка неизвестного решения x уравнения (25): $\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1$.*

В отличии от раздела 4.2 наблюдатель не должен содержать распределенное запаздывание, но не требуется асимптотической устойчивости.

Определим систему с выходом

$$
\begin{gathered}
\dot{z}(t) = \overline{A}_L(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}\tilde{y}^0(t), \\
\bar{x}(t) = N_1(\lambda_h)\left(\left[I_n, 0_{n\times 3}\right]z(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)d\tau\right),
\end{gathered} \tag{40}
$$

где $\tilde{y}^0(t) = \tilde{y}_{i_0}(t) - \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\int_{\tilde{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)d\tau$, $Y(t) = Q_1(\lambda_h)y(t) + Q_2(\lambda_h)\dot{y}(t)$, $\tilde{y}_{i_0}(t)$ — компонента функции $\tilde{y}(t) = \mathrm{col}\left[N_{22}(\lambda_h)\dot{y}(t),\, y(t)\right]$ с номером i_0, $\widehat{F}(t)$ — фундаментальная матрица построенной специальным образом линейной автономной дифференциально-разностной системы, $\overline{A}_L(p,\lambda)$, $N_1(\lambda), Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda), N_{22}(\lambda)$, $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ — полиномиальные матрицы; $p_{_D}$ — оператор дифференцирования.

Теорема 21. *Выполнение для системы* (25), (26) *условий* (27) *необходимо и достаточно для существования финитного наблюдателя* (40), *реализующего оценку $\bar{x}$ решения уравнения* (25), *удовлетворяющую тождеству $\bar{x}(t) \equiv x(t)$, $t \geq t_1$.*

Наблюдатель (40) зависит от производной $\dot{y}$, однако при формировании оценки $\bar{x}$ можно избежать операции дифференцирования выхода y. Кроме этого показано, что при выполнении условий (27) существует модифицированный финитный наблюдатель, не содержащий производной выхода (26), однако его реализация представляется более трудоемкой в сравнении с реализацией наблюдателя (40).

В пятой главе диссертации разработанные в главах 2, 3 методы качественного анализа и синтеза регуляторов обобщаются на линейные автономные вполне регулярные дифференциально-алгебраические системы с последействием

$$
\frac{d}{dt}\left(D\widetilde{x}(t)\right) = A(\lambda_h)\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \tag{41}
$$

$$
\widetilde{x}(t) = \widetilde{\eta}(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0], \tag{42}
$$

где $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m}\lambda^i A_i$, $\widetilde{B}(\lambda) = \sum_{i=0}^{m}\lambda^i \widetilde{B}_i$, $D, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{B}_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $\widetilde{x}(t)$ — решение уравнения (41), $u(t)$ — кусочно-непрерывное управление;

$h = \mathrm{const} > 0$. Считаем, что $\widetilde{\eta} \in \mathbf{PC}_D$, $\mathbf{PC}_D$ — множество кусочно-непрерывных функций η таких, что функция $D\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему (41) назовем вполне регулярной, если $\deg|pD - A_0| = n_1$. Для вполне регулярной системы (41) существует невырожденное преобразование, приводящее ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}(\lambda_h)x_1(t) + A_{12}(\lambda_h)x_2(t) + B_1(\lambda_h)u(t), \\ x_2(t) &= A_{21}(\lambda_h)x_1(t) + A_{22}(\lambda_h)x_2(t-h) + B_2(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{43}$$

где $A_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^i A_{ij}^k$, $i, j = 1, 2$, $\big((i,j) \neq (2,2)\big)$, $A_{22}(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1} A_{22}^k$, $A_{ij}^k \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $B_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k B_i^k$, $B_i^k \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$. В диссертации исследование задач управления для системы (41) основано на переходе к системе (43) и ее последующем анализе.

Используя матрицы $\widetilde{B}_i$, построим уравнение вида (3) и определим матрицу $\widetilde{G}(\lambda)$ так же, как для уравнения (3) определена матрица $G(\lambda)$.

Раздел 5.1 посвящен решению задачи 0-управляемости.

Определение 12. *Начальную функцию $\widetilde{\eta} \in \mathbf{PC}_D$ системы* (41) *назовем 0-управляемой, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t > 0$, такие, что для соответствующего решения $\widetilde{x}(t)$ имеет место тождество*

$$\widetilde{x}(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{44}$$

Если 0-управляемы все начальные функции $\widetilde{\eta} \in \mathbf{PC}_D$, то систему (41) *назовем 0-управляемой.*

Замечание 5. Если (44) возможно при $u(t) \equiv 0$, $t > t_1$, то начальную функцию $\widetilde{\eta}$ (систему (41)) назовем полностью 0-управляемой.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно, $\widetilde{W}(p, \lambda) = pD - A(\lambda)$.

Теорема 22. *Для того чтобы система* (41) *была 0-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1) \operatorname{rank}\big[\widetilde{W}(p, e^{-ph}),\, \widetilde{B}(e^{-ph}),\, \widetilde{G}(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \tag{45}$$

$$2) \operatorname{rank}\big[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1\widetilde{B}(\lambda),\, \Gamma_1\widetilde{G}(\lambda)\big] = n - \operatorname{rank} D \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{46}$$

В ходе доказательства теоремы 22 были решены задачи полной 0-управляемости и финальной наблюдаемости. Приведем критерий полной 0-управляемости.

Теорема 23. *Для того чтобы система Σ была полностью 0-управляемой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$1) \operatorname{rank}\big[\widetilde{W}(p, e^{-ph}),\, \widetilde{B}(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \tag{47}$$

$$2) \operatorname{rank}\big[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1\widetilde{B}(\lambda)\big] = n - \operatorname{rank} D \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{48}$$

В разделе 5.2 при помощи регулятора

$$u(t) = \widetilde{\mathfrak{R}}_0\big[\widetilde{X}_t\big], \quad \frac{d}{dt}\big(\widetilde{R}_{11}\widetilde{x}_1(t)\big) = \widetilde{\mathfrak{R}}_{12}\big[\widetilde{X}_t\big], \quad t > 0, \tag{49}$$

где $\widetilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ — вспомогательная переменная, $\widetilde{X} = \mathrm{col}\big[\widetilde{x}, \widetilde{x}_1\big]$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_0 \in \mathbf{J}_0^{r\times(n+\bar{n})}$, $\widetilde{R}_{11} \in \mathbb{R}^{\bar{n}\times\bar{n}}$, $(\widetilde{R}_{11} \neq 0_{\bar{n}\times\bar{n}})$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_{12} \in \mathbf{J}_0^{\bar{n}\times(n+\bar{n})}$, решается следующая

Задача 8. *Требуется замкнуть систему* (41) *таким регулятором* (49), *для которого существует момент времени* $t_1 > 0$, *что при любом начальном условии* (42) *векторная компонента* $\widetilde{x}$ *решения* $\widetilde{X}$ *замкнутой системы* (41), (49) *удовлетворяет тождеству* $\widetilde{x}(t) \equiv 0$, $t > t_1$, *а сама система остается в классе вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем.*

Регулятор (49), обеспечивающий решение задачи 8, назовем регулятором успокоения решения.

Далее понадобятся следующие понятия.

Определение 13. *Будем говорить, что матрица* $\Omega(p,\lambda) \in \mathcal{C}_0^{\phi\times\phi}(p,\lambda)$ $(\phi \in \mathbb{N})$ *имеет* CR_1*-структуру (*CR*- completely regular), если существуют матрицы* $\Omega_0 \in \mathbb{R}^{\phi\times\phi}$, $\widehat{\Omega}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\phi\times\phi}[\lambda]$, $\widetilde{\Omega}_1(p,\lambda) \in \mathcal{C}_0^{\phi\times\phi}(p,\lambda)$, *такие, что*

$$\Omega(p,\lambda) = p\Omega_0 + \widehat{\Omega}(\lambda) + \widetilde{\Omega}_1(p,\lambda), \tag{50}$$

и $\deg|p\Omega_0 + \widehat{\Omega}(0)| = \mathrm{rank}\,\Omega_0$. *Если в* (50) $\widetilde{\Omega}_1(p,\lambda) = 0_{\phi\times\phi}$, *то будем говорить, что матрица* $\Omega(p,\lambda)$ *имеет* CR*-структуру.*

Разработанная в главе 3 техника перехода от исследования системы нейтрального типа (10) к анализу системы запаздывающего типа (12) здесь обобщается на системы вида (41). Для этого переходим к системе (43), которую замыкаем регулятором

$$\begin{aligned} u(t) &= M_{11}(\lambda_h)x_2(t) + M_{12}(\lambda_h)x_4(t) + v_1(t), \\ x_4(t) &= M_{21}(\lambda_h)x_2(t) + M_{22}(\lambda_h)x_4(t) + v_2(t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{51}$$

где $M_{1j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n_{2j}}[\lambda], M_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_4\times n_{2j}}[\lambda]$, $j = 1,2$; $x_4 \in \mathbb{R}^{n_4}$ — вспомогательная переменная, $v = \mathrm{col}[v_1, v_2]$ — новое управление. Обозначим $\overline{W}_0(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (43), (51), где

$$\overline{W}_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_{n_1} - A_{11}(\lambda) & -A_{12}(\lambda) - B_1(\lambda)M_{11}(\lambda) & -B_1(\lambda)M_{12}(\lambda) \\ -A_{21}(\lambda) & I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda) - B_2(\lambda)M_{11}(\lambda) & -B_2(\lambda)M_{12}(\lambda) \\ 0_{n_4\times n_1} & -M_{21}(\lambda) & I_{n_4} - M_{22}(\lambda) \end{bmatrix};$$

$$\overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) & 0_{n\times n_4} \\ 0_{n_4\times r} & I_{n_4} \end{bmatrix}.$$

Определение 14. *Если для системы* (43) *существует регулятор вида* (51)*, для которого найдутся матрицы* $K_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}[\lambda]$, $\Theta_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+n_4)\times(n+n_4)}[\lambda]$, $\bigl|\Theta_i(\lambda)\bigr| \equiv 1$, $i = 1, 2$, *такие, что* $\Theta_1(\lambda)\overline{W}_0(p,\lambda)\Theta_2(\lambda) = \mathrm{diag}\bigl[pI_{n_1} - K_0(\lambda),\, I_{n_2+n_4}\bigr]$ *и матрица* $\overline{W}_0(p,\lambda)$ *имеет* CR*-структуру, то будем говорить, что система* (43) *редуцируется к системе запаздывающего типа, а систему*

$$\mathrm{diag}\bigl[p_{_D}I_{n_1} - K_0(\lambda_h),\, I_{n_2+n_4}\bigr]\overline{x}(t) = \Theta_1(\lambda_h)\overline{B}(\lambda_h)v(t) \tag{52}$$

будем называть редуцированной системой. Регулятор (51) *в этом случае будем называть редуцирующим регулятором.*

Лемма 1. *Для того чтобы для системы* (43) *существовал редуцирующий регулятор* (51)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\mathrm{rank}\bigl[I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda),\, B_2(\lambda)\bigr] = n_2\, \forall\lambda \in \mathbb{C}$.

Замечание 6. Условие леммы 1 выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (48). Ниже показано, что для существования ряда важных структурных свойств условие (48) является необходимым.

Доказан критерий существования регулятора успокоения решения.

Теорема 24. *Для того чтобы для системы* (41) *существовал регулятор успокоения* (49) *необходимо и достаточно условий* (45), (46)*, то есть чтобы система* (41) *была 0-управляемой.*

В разделе 5.3 исследуется вопрос приведения системы (41) к конечному спектру. Определим регулятор

$$u(t) = \widetilde{R}_0(\lambda_h)\widetilde{X}(t),\;\; \dot{x}_3(t) = \widetilde{R}_1(\lambda_h)\widetilde{X}(t),\;\; x_4(t) = \widetilde{R}_2(\lambda_h)\widetilde{X}(t),\;\; t > 0, \tag{53}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 3, 4,$ — вспомогательные переменные, $n_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\widetilde{X} = \mathrm{col}\bigl[\widetilde{x}, x_3, x_4\bigr]$, $\widetilde{R}_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(n+\bar{n})}[\lambda]$, $\widetilde{R}_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_{i+2}\times(n+\bar{n})}[\lambda]$, $i = 1, 2$, $\bar{n} = n_3 + n_4$ (равенство $n_i = 0$ означает, что в регуляторе (53) отсутствует переменная x_i и соответствующее уравнение).

Задача 9. *Требуется замкнуть систему* (41) *регулятором* (53) *так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) характеристическая матрица замкнутой системы* (41), (53) *имеет* CR*-структуру; 2) переменная* $\widetilde{x}$ *является векторной компонентой решения линейной автономной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы с конечным спектром.*

Пусть $\widetilde{R}_i(\lambda) = \bigl[\widetilde{R}_i^0(\lambda), \widetilde{R}_i^1(\lambda), \widetilde{R}_i^2(\lambda)\bigr]$, $i = \overline{0,2}$, где блоки $\widetilde{R}_i^k(\lambda)$, $k = \overline{0,2}$, состоят из n, n_3, n_4 столбцов матрицы $\widetilde{R}_i(\lambda)$. Обозначим

$$\widetilde{W}_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}(p,\lambda) - \widetilde{B}(\lambda)\widetilde{R}_0^0(\lambda) & -\widetilde{B}(\lambda)\widetilde{R}_0^1(\lambda) & -\widetilde{B}(\lambda)\widetilde{R}_0^2(\lambda) \\ -\widetilde{R}_1^0(\lambda) & pI_{n_3} - \widetilde{R}_1^1(\lambda) & -\widetilde{R}_1^2(\lambda) \\ -\widetilde{R}_2^0(\lambda) & -\widetilde{R}_2^1(\lambda) & I_{n_4} - \widetilde{R}_2^2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Определение 15. *Систему* (41) *назовем спектрально приводимой, если найдется регулятор вида* (53) *такой, что: 1) матрица* $\widetilde{W}_0(p,\lambda)$ *имеет* CR*-структуру; 2) определитель* $|\widetilde{W}_0(p,e^{-ph})|$ *является полиномом.*

Определение 16. *Систему* (41) *назовем слабо спектрально приводимой, если найдется регулятор вида* (53) *такой, что: 1) матрица* $\widetilde{W}_0(p,\lambda)$ *имеет* CR*-структуру; 2) существуют* $n_*\in\mathbb{N}$, $n_*\le n_4$, $\widetilde{P}_{13}(\lambda)\in$ $\in\mathbb{R}^{n\times n_*}[\lambda]$, $\widetilde{P}_{23}(\lambda)\in\mathbb{R}^{(\bar{n}-n_*)\times n_*}[\lambda]$ *такие, что выполняется равенство*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(\bar{n}-n_*)} & \widetilde{P}_{13}(\lambda) \\ 0_{(\bar{n}-n_*)\times n} & I_{\bar{n}-n_*} & \widetilde{P}_{23}(\lambda) \\ 0_{n_*\times n} & 0_{n_*\times(\bar{n}-n_*)} & I_{n_*} \end{bmatrix}\widetilde{W}_0(p,\lambda)=\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11}(p,\lambda) & 0_{(n+\bar{n}-n_*)\times n_*} \\ \widetilde{W}_{21}(\lambda) & I_{n_*}-\widetilde{R}_*(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где блок $\widetilde{W}_{11}(p,\lambda)\in\mathbb{R}^{(n+\bar{n}-n_*)\times(n+\bar{n}-n_*)}[p,\lambda]$ *имеет* CR*-структуру,* $\widetilde{W}_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n_*\times(n+\bar{n}-n_*)}[\lambda]$, $\widetilde{R}_*(\lambda)\in\mathbb{R}^{n_*\times n_*}[\lambda]$ *— правый нижний блок* $\widetilde{R}_2^2(\lambda)$*; 3) определитель* $|\widetilde{W}_{11}(p,e^{-ph})|$ *является полиномом.*

Замечание 7. Выполнение равенства (55) означает, что найдется число $\bar{t}>0$, такое, что при $t>\bar{t}$ существует вполне регулярная дифференциально-алгебраическая подсистема системы (41), (53) с характеристической матрицей $\widetilde{W}_{11}(p,e^{-ph})$, которая однозначно определяет функцию $\widetilde{x}$ как векторную компоненту решения этой подсистемы. Указанную подсистему можно получить из системы (41), (53) при помощи элементарных преобразований, отвечающих матрицам $\widetilde{P}_{13}(\lambda)$, $\widetilde{P}_{23}(\lambda)$.

Обозначим: $\Lambda_{\widetilde{B}}=\Big\{p\in\mathbb{C}:\ \mathrm{rank}\big[\widetilde{W}(p,e^{-ph}),\,\widetilde{B}(e^{-ph})\big]<n\Big\}$, $\Lambda_{\widetilde{B},\widetilde{G}}=\Big\{p\in\mathbb{C}:\ \mathrm{rank}\big[\widetilde{W}(p,e^{-ph}),\,\widetilde{B}(e^{-ph}),\,\widetilde{G}(e^{-ph})\big]<n\Big\}$.

Теорема 25. *Система* (41) *спектрально приводима в том и только в том случае, если выполнены условия:* 1) *множество* $\Lambda_{\widetilde{B}}$ *состоит из конечного числа элементов;* 2) $\mathrm{rank}\Big[\Gamma_1\widetilde{A}(\lambda)\Gamma_2,\,\Gamma_1\widetilde{B}(\lambda)\Big]=n-\mathrm{rank}\,D$ $\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

Теорема 26. *Система* (41) *слабо спектрально приводима в том и только в том случае, если выполнены условия:* 1) *множество* $\Lambda_{\widetilde{B},\widetilde{G}}$ *состоит из конечного числа элементов;* 2) $\mathrm{rank}\Big[\Gamma_1\widetilde{A}(\lambda)\Gamma_2,\,\Gamma_1\widetilde{B}(\lambda),\,\Gamma_2\widetilde{G}(\lambda)\Big]=$ $=n-\mathrm{rank}\,D\,\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

В разделе 5.4 изучается задача управления спектром при помощи как интегральных регуляторов

$$u(t)=\widetilde{\mathfrak{R}}_0\big[\widetilde{X}_t\big],\quad \dot{x}_3(t)=\widetilde{\mathfrak{R}}_1\big[\widetilde{X}_t\big],\quad x_4(t)=\widetilde{\mathfrak{R}}_2\big[\widetilde{X}_t\big],\quad t>0, \qquad (56)$$

где $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=3,4$, — вспомогательные переменные, $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\widetilde{X}=$ $=\mathrm{col}\big[\widetilde{x},x_3,x_4\big]$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_0\in\mathbf{J}_0^{r\times(n+\bar{n})}$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_i\in\mathbf{J}_0^{n_{i+2}\times(n+\bar{n})}$, $i=1,2$, $\bar{n}=n_3+n_4$ (если

$n_i = 0$, то в (56) отсутствуют переменная x_i и соответствующее уравнение), так и разностных регуляторов (53). Операторы $\widetilde{\mathfrak{R}}$ в (56) таковы, что $\widetilde{\mathfrak{R}}_i \overset{\text{æ}}{\mapsto} \left[\widetilde{R}_i^0(p,\lambda), \widetilde{R}_i^1(p,\lambda), \widetilde{R}_i^2(\lambda)\right]$ (блоки $\widetilde{R}_i^k(p,\lambda)$, $k = 0, 1$, $\widetilde{R}_i^2(\lambda)$ состоят соответственно из n, n_3, n_4 столбцов), причем $\widetilde{R}_i^0(p,\lambda) = \Xi_{i1}(\lambda) + \Xi_{i2}(p,\lambda)D$, где $\Xi_{i1}(\lambda)$ — полиномиальные матрицы, элементы матриц $\Xi_{i2}(p,\lambda)$ принадлежат множеству $\mathcal{C}_0(p,\lambda)$.

Рассмотрим матрицу $\widetilde{W}_0(p,\lambda)$, определенную в (54), и матрицу

$$\widetilde{\Delta}_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}(p,\lambda) - \widetilde{B}(\lambda)\widetilde{R}_0^0(p,\lambda) & -\widetilde{B}(\lambda)\widetilde{R}_0^1(p,\lambda) & -B(\lambda)\widetilde{R}_0^2(\lambda) \\ -\widetilde{R}_1^0(p,\lambda) & pI_{n_3} - \widetilde{R}_1^1(p,\lambda) & -\widetilde{R}_1^2(\lambda) \\ -\widetilde{R}_2^0(p,\lambda) & -\widetilde{R}_2^1(p,\lambda) & I_{n_4} - \widetilde{R}_2^2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Введем полином (ниже $d_i(\lambda)$ — некоторые полиномы, $d_{n_d}(0) \neq 0$, $n_d \geq n_1$)

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{n_d} p^i d_i(\lambda). \tag{57}$$

Задача 10. *Пусть задан полином* (57). *Требуется замкнуть систему* (41) *регулятором* (56) *(регулятором* (53)*) так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) характеристическая матрица замкнутой системы* (41), (56) *(*(41), (53)*) имеет CR_1-структуру (CR-структуру); 2) переменная $\widetilde{x}$ является векторной компонентой решения линейной автономной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы, собственные значения которой с учетом кратности определяются корнями квазиполинома $d(p, e^{-ph})$.*

Определение 17. *Систему* (41) *назовем модально управляемой в классе регуляторов* (56) $\big($*регуляторов* (53)$\big)$, *если существует число $n_0 \geq n_1$ такое, что для любого полинома* (57) *при $n_d \geq n_0$ найдутся $\nu \in \mathbb{R}$ и регулятор вида* (56) $\big($(53)$\big)$, *обеспечивающий условия: 1) матрица $\widetilde{\Delta}_0(p,\lambda)$ ($\widetilde{W}_0(p,\lambda)$) имеет CR_1-структуру (CR-структуру); 2) $\big|\widetilde{\Delta}_0(p,\lambda)\big| = \nu d(p,\lambda)$ ($\big|\widetilde{W}_0(p,\lambda)\big| = \nu d(p,\lambda)$).*

Определение 18. *Систему* (41) *назовем слабо модально управляемой в классе регуляторов* (56) $\big($*регуляторов* (53)$\big)$, *если существует число $n_0 \geq n_1$ такое, что для любого полинома* (57) *при $n_d \geq n_0$ найдутся $\nu \in \mathbb{R}$ и регулятор вида* (56) $\big($(53)$\big)$, *обеспечивающий условия: 1) матрица $\widetilde{\Delta}_0(p,\lambda)$ ($\widetilde{W}_0(p,\lambda)$) имеет CR_1-структуру (CR-структуру); 2) существуют $n_* \in \mathbb{N}, n_* \leq n_4$, и $\widetilde{P}_{13}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n_*}[\lambda]$, $\widetilde{P}_{23}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(\bar{n}-n_*)\times n_*}[\lambda]$ такие, что выполняется равенство*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(\bar{n}-n_*)} & \widetilde{P}_{13}(\lambda) \\ 0_{(\bar{n}-n_*)\times n} & I_{\bar{n}-n_*} & \widetilde{P}_{23}(\lambda) \\ 0_{n_*\times n} & 0_{n_*\times(\bar{n}-n_*)} & I_{n_*} \end{bmatrix} \widetilde{\Delta}_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta}_{11}(p,\lambda) & 0_{(n+\bar{n}-n_*)\times n_*} \\ \widetilde{\Delta}_{21}(p,\lambda) & I_{n_*} - \widetilde{R}_*(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блок $\widetilde{\Delta}_{11}(p,\lambda) \in \mathcal{C}_0^{(n+\bar{n}-n_*)\times(n+\bar{n}-n_*)}(p,\lambda)$ *имеет* CR_1*-структуру,* $\widetilde{\Delta}_{21}(p,\lambda) \in \mathcal{C}_0^{n_*\times(n+\bar{n}-n_*)}(p,\lambda)$, $\widetilde{R}_*(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_*\times n_*}[\lambda]$ *— правый нижний блок матрицы* $\widetilde{R}_2^2(\lambda)$ *(выполняется равенство* (55)*); 3)* $\left|\widetilde{\Delta}_{11}(p,\lambda)\right| = \nu d(p,\lambda)$ *(*$\left|\widetilde{W}_{11}(p,\lambda)\right| = \nu d(p,\lambda)$*).*

Получены следующие утверждения.

Теорема 27. *Система* (41) *модально управляема в классе регуляторов* (56) *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (47), (48).

Теорема 28. *Для того чтобы система* (41) *была слабо модально управляемой в классе регуляторов* (56), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (45), (46).

Рассмотрим систему (43). Для системы (43) регуляторы (56) и (53) можно переписать в виде

$$u(t) = \mathfrak{R}_{01}[X_{1,t}] + R_{02}(\lambda_h)X_2(t),\ \ \dot{x}_3(t) = \mathfrak{R}_{11}[X_{1,t}] + R_{12}(\lambda_h)X_2(t),\\ x_4(t) = \mathfrak{R}_{21}[X_{1,t}] + R_{22}(\lambda_h)X_2(t) \tag{58}$$

и в виде

$$u(t) = R_{01}(\lambda_h)X_1(t) + R_{02}(\lambda_h)X_2(t),\ \dot{x}_3(t) = R_{11}(\lambda_h)X_1(t) + R_{12}(\lambda_h)X_2(t),\\ x_4(t) = R_{21}(\lambda_h)X_1(t) + R_{22}(\lambda_h)X_2(t). \tag{59}$$

Здесь $X_1 = \mathrm{col}[x_1, x_3]$, $X_2 = \mathrm{col}[x_2, x_4]$, а матрицы $R_{ij}(\lambda)$ и операторы $\mathfrak{R}_{i1}$ определяются очевидным образом. Введем систему

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(\lambda_h)x_1(t) + A_{12}(\lambda_h)x_2(t) + \big[B_1(\lambda_h),\, G_1(\lambda_h)\big]w(t),\\ x_2(t) = A_{21}(\lambda_h)x_1(t) + A_{22}(\lambda_h)x_2(t-h) + \big[B_2(\lambda_h),\, G_2(\lambda_h)\big]w(t), \tag{60}$$

где w — управление, $\mathrm{col}\big[G_1(\lambda), G_2(\lambda)\big] = H_1\widetilde{G}(\lambda)$, H_1 — некоторая невырожденная матрица.

Следствие 1. *Для того, чтобы система* (43) *была слабо модально управляемой в классе регуляторов* (58) *(в классе регуляторов* (59)*) необходимо и достаточно, чтобы система* (60) *была модально управляемой в этом же классе регуляторов.*

Рассмотрим редуцированную систему (52). Пусть $\Theta_1(\lambda)\overline{B}(\lambda) = \mathrm{col}\Big[\overline{B}_1(\lambda),\, \overline{B}_2(\lambda)\Big]$, где блок $\overline{B}_1(\lambda)$ состоит из первых n_1 строк; $\bar{b}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r+n_4}$, — i-й столбец матрицы $\overline{B}_1(\lambda)$.

Теорема 29. *Пусть существуют* $\theta\,(1 \le \theta \le r + n_4)$ *столбцов* $\bar{b}_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, *матрицы* $\overline{B}_1(\lambda)$ *и* θ *чисел* δ_j, $j = \overline{1,\theta}$, $\delta_1 + \ldots + \delta_\theta = n_1$, *таких, что* $\Big|\bar{b}_{i_1}(\lambda), K_0(\lambda)\bar{b}_{i_1}(\lambda), \ldots, \big(K_0(\lambda)\big)^{\delta_1-1}\bar{b}_{i_1}(\lambda), \bar{b}_{i_2}(\lambda), \ldots, \big(K_0(\lambda)\big)^{\delta_2-1}\bar{b}_{i_2}(\lambda), \ldots, \bar{b}_{i_\theta}(\lambda), \ldots, \big(K_0(\lambda)\big)^{\delta_\theta-1}\bar{b}_{i_\theta}(\lambda)\Big| \equiv \mathrm{const} \neq 0$. *Тогда система* (43) *модально управляема в классе регуляторов* (59).

Следствие 2. *Пусть для системы* (60) *выполняются условия теоремы 29. Тогда система* (43) *слабо модально управляема в классе регуляторов* (59).

Теорема 30. *Система* (41) *модально управляема (слабо модально управляема) в классе регуляторов* (53) *тогда и только тогда, когда система* (43) *модально управляема (слабо модально управляема) в классе регуляторов* (59).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Предложен новый подход к управлению объектами с последействием, который базируется на использовании гибридных типов регуляторов, представляющих собой три последовательно соединенных контура. Первый контур компенсирует отклонение решения заданной системы от решения новой системы, отличающейся от исходной наличием дополнительных органов управления; второй контур управления редуцирует новую систему к системе запаздывающего типа; третий контур реализует для полученной системы цель управления. Разработанные схемы применения гибридного регулятора адаптированы для решения задач проектирования различных типов наблюдателей. Теория использования гибридного регулятора представлена в виде следующих новых научных результатов.

1. Получены критерии разрешимости задачи 0-управляемости и способы построения программных управлений, обеспечивающих успокоение решения, для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями. Эти результаты опубликованы в работах [1–6; 8; 15; 23; 24; 26–30; 34; 55; 56; 61–68; 70–74; 76].

2. Доказаны критерии существования и разработаны схемы построения регуляторов успокоения решения линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями. Эти результаты представлены в работах [1; 10–12; 15; 31; 36; 40; 42; 79; 80; 82; 84].

3. Изучена задача приведения системы к конечному спектру. Установлены критерии спектральной приводимости и слабой спектральной приводимости для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями. Предложены способы построения регуляторов, обеспечивающих конечный спектр. Указанные результаты опубликованы в работах [1; 14; 18; 38; 41; 81; 83].

4. Исследована задача управления спектром для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями. Получены критерии модальной управляемости и слабой модальной управляемости в классах интегральных регуляторов и способы построения таких регуляторов. Найдены необходимые и достаточные условия модальной управляемости и слабой модальной управляемости в классах дифференциально-разностных регуляторов, а также предложены способы построения таких регуляторов. Описанные результаты опубликованы в работах [1; 7; 9; 13; 16; 17; 22; 35; 37; 39; 43; 45; 53; 69; 75; 77; 78; 85; 86].

5. Найдены условия существования и предложены способы построения различных типов асимптотических наблюдателей для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа. Построена процедура получения асимптотической оценки асимптотически наблюдаемых систем, доказаны условия ее реализуемости. Эти результаты опубликованы в работах [1; 19; 20; 32; 44; 47; 49; 51; 52].

6. Доказаны критерии существования и разработаны процедуры построения финитных наблюдателей в виде систем запаздывающего типа с распределенными и сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и конечным наперед заданным спектром, и в виде систем запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и некоторым конечным (не заданным наперед) спектром для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа. Указанные результаты представленны в работах [1; 21; 25; 33; 46; 48; 50; 54; 57–60].

Кроме этого получены решения задач, которые в контексте диссертации носят вспомогательный характер, однако представляют собой самостоятельный интерес: задача полной 0-управляемости в классах программных управлений и управлений типа обратной связи и задача финальной наблюдаемости для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями [1; 5; 8; 15; 26]; задача построения всех решений одной линейной дескрипторной системы с дискретным временем [23; 24].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация носит теоретический характер. В результате проведенных исследований был разработан и обоснован новый подход к решению проблемы проектирования регуляторов и наблюдателей для линейных автономных дифференциальных систем с последействием, что является концептуальным развитием теории управления системами с последействием.

Результаты и методы диссертации могут быть использованы при проведении исследований по теории управления, анализе динамических характеристик линейных автономных систем с последействием и конструировании регуляторов в объектах, моделируемых такими системами; при решении практических задач управления экономическими и технологическими процессами. Проверка полученных в работе условий разрешимости исследованных задач основана на нахождении рангов функциональных матриц, а разработанные способы построения регуляторов и наблюдателей основаны на алгебраических операциях, являющихся стандартными для современных систем компьютерной математики. Исследование таких структурных свойств, как 0-управляемость, слабая спектральная приводимость и слабая модальная управляемость, а также использование новых типов наблюдателей и процедур оценки асимптотически наблюдаемых систем, позволяет сократить требования к органам управления и наблюдения в сравнении с традиционными требованиями, которые соответствуют условиям полной управляемости и полной наблюдаемости.

Результаты диссертации возможно использовать при чтении для студентов и магистрантов спецкурсов в области теории управления и ее приложений. Результаты диссертации внедрены в учебные процессы учреждений образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» и «Полоцкий государственный университет», что подтверждено актами внедрения (акты № 03-8/019 от 15.06.2022, № 03-9/015 от 15.06.2022).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Монографии

1. Хартовский, В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей : моногр. / В. Е. Хартовский. — Гродно: ГрГУ, 2022. — 500 с.

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

2. Хартовский, В. Е. Об управлении не полностью управляемыми дифференциально-разностными системами с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2008. — Вып. 7. — С. 47–58.

3. Хартовский, В. Е. Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями / В. Е. Хартовский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 6. — С. 3–11.

4. Хартовский, В. Е. К вопросу управления линейными системами нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2010. — № 4. — С. 68–75.

5. Хартовский, В. Е. Задача полной управляемости и ее обобщение для линейных автономных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 6. — С. 15–28.

6. Хартовский, В. Е. Задача успокоения решения алгебро-дифференциальных вполне регулярных систем с последействием / В. Е. Хартовский // Доклады Нацыянальнай акадэмii навук Беларуси. — 2012. — Т. 56, № 6. — С. 5–11.

7. Хартовский, В. Е. К проблеме модального управления линейными системами нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — Вып. 4. — С. 146–155.

8. Хартовский, В. Е. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Автоматика и телемеханика. — 2013. — Вып. 5. — С. 59–80.

9. Павловская, А. Т. Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа регуляторами с обратной связью динамической структуры / А. Т. Павловская, В. Е. Хартовский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 3. — С. 3–18.

10. Метельский, А. В. Успокоение решения систем нейтрального типа с многими запаздываниями посредством обратной связи / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — Вып. 3. — С. 40–51.

11. Метельский, А. В. Успокоение решения линейных автономных дифференциально-разностных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи / А. В. Метельский, О. И. Урбан, В. Е. Хартовский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 2. — С. 40–49.

12. Метельский, А. В. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 391–403.

13. Метельский, А. В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1506–1521.

14. Хартовский, В. Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.

15. Метельский, А. В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.

16. Хартовский, В. Е. Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов / В. Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2017. — Вып. 11. — С. 3–19.

17. Хартовский, В. Е. Критерии модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 514–529.

18. Хартовский, В. Е. Приведение к конечному спектру вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 827–841.

19. Хартовский, В. Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального тип / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 3. — С. 409–422.

20. Хартовский, В. Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения.— 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1701–1716.

21. Метельский, А. В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 12. — С. 80–102.

22. Хартовский, В. Е. Управление спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 1. — С. 23–43.

23. Хартовский, В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости / В. Е. Хартовский // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2020. — Т. 30, вып. 2. — С. 290–311.

24. Хартовский, В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства / В. Е. Хартовсткий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 55. — С. 102–121.

25. Метельский, А. В. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа/ А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 265–285.

26. Хартовский, В. Е. О некоторых задачах управляемости и наблюдаемости для дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Труды Института математики. — 2021. — Т. 29, № 1–2. — С. 126–137.

Статьи в других научных изданиях

27. Хартовский, В. Е. К теории полной управляемости по состоянию дифференциальных систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2006. — № 3 (46). — С. 69–74.

28. Хартовский, В. Е. Новый критерий полной управляемости по состоянию линейных автономных дифференциально-разностных систем /В. Е. Хартовский // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2007. — № 4 (61). — С. 88–93.

29. Хартовский, В. Е. О возможности моделирования процессов, описываемых линейными системами нейтрального типа, не обладающими свойством полной управляемости / В. Е. Хартовский // Стохастическое и компьютерное моделирование систем и процессов : сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Л. В. Рудикова (гл. ред.) [и др.]. — Гродно, 2011. — С. 179–182.

30. Хартовский, В. Е. Некоторые вопросы управления линейными объектами нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Математическое и компьютерное моделирование систем и процессов : сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: М. А. Маталыцкий (гл. ред.) [и др.]. — Гродно, 2013. — С. 264–267.

31. Метельский, А. В. Синтез регуляторов для вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова (аннотация доклада, 24.10.2016)) / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. 2017. — Т. 53, № 2. — С. 283–285.

32. Метельский, А. В. К вопросу синтеза наблюдателей для линейных систем нейтрального типа (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова (аннотация доклада, 09.04.2018)) / А. В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1148–1149.

33. Хартовский, В. Е. Финитные наблюдатели для линейных систем нейтрального типа (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова (аннотация доклада, 08.10.2018)) / В. Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 279–281.

Материалы конференций

34. Хартовский, В. Е. К проблеме полной управляемости систем с запаздыванием в состоянии и управлении / В. Е. Хартовский // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования : сб. науч. тр. Междунар. матем. конф., Гродно, 2007 г. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Ю. М. Вувуникян (отв. ред.)[и др.]. — Гродно, 2007. — С. 73–75.

35. Хартовский, В. Е. К вопросу о модальной управляемости линейными объектами нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней матем. школы «Понтрягинские чтения — XXV», Воронеж, 2014 г. / Воронеж. гос. ун-т,РУДН / отв. ред. и сост. А. Д. Баев. — Воронеж, 2014. — С. 185–186.

36. Метельский, А. В. Успокоение решения линейных систем нейтрального типа регулятором по типу обратной связи по состоянию / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнения : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Ин-т матема-

тики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2015. — Ч. 2. — С. 30.

37. Метельский, А. В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнения : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2015. — Ч. 2. — С. 28–29.

38. Хартовский, В. Е. О приведении линейных систем нейтрального типа к конечному спектру / В. Е. Хартовский // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 120.

39. Метельский, А.В. О проблеме модального управления линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 113–114.

40. Метельский, А. В. Об успокоении решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сб. науч. тр. II междунар. откр. конф. «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях», Воронеж, 18–20 сент. 2017 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; редкол.: М. В. Драпалюк(гл. ред.)[и др.]. — Воронеж, 2017. — № 8, ч. 1 (34–1). — С. 268–271.

41. Хартовский, В. Е. К вопросу спектрального приведения линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сб. науч. тр. II междунар. откр. конф. «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях», Воронеж, 18–20 сент. 2017 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; редкол.: М. В. Драпалюк(гл. ред.)[и др.]. — Воронеж, 2017. — № 8, ч. 2 (34–2). — С. 238–241.

42. Метельский, А. В. К вопросу 0-управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2018 : материалы XVIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 15–18 мая 2018 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2018. — Ч. 1. — С. 126–127.

43. Хартовский, В. Е. О задачах управления спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2018 : материалы XVIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 15–18 мая 2018 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2018. — Ч. 1. — С. 128–129.

44. Хартовский, В. Е. О некоторых методах синтеза наблюдателей для линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Е.А. Барбашина, Минск, 24–29 сент. 2018 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси, БРФФИ ; редкол.: Ф. М. Кириллова(гл. ред.)[и др.]. — Минск, 2018. — С. 217–218.

45. Хартовский, В. Е. О некоторых методах управления спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Е.А. Барбашина, Минск, 24–29 сент. 2018 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси, БРФФИ ; редкол.: Ф. М. Кириллова(гл. ред.)[и др.]. — Минск, 2018. — С. 219–220.

46. Метельский, А. В. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2019 : материалы XIX междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2019. — Ч. 1. — С. 126–127.

47. Хартовский, В. Е. Об асимптотической оценке решения асимптотически наблюдаемых линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2019 : материалы XIX междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2019. — Ч. 1. — С. 131–132.

48. Метельский, А. В. Проектирование финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика : материалы Междунар. откр. конф., Воронеж, 21–23 мая 2019 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; отв. ред. В. В. Зенина. — Воронеж, 2019. — С. 322–324.

49. Хартовский, В. Е. Об асимптотической оценке решения систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика : материалы Междунар. откр. конф., Воронеж, 21–23 мая 2019 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; отв. ред. В. В. Зенина. — Воронеж, 2019. — С. 520–522.

50. Метельский, А. В. О проектировании финитных наблюдателей для линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 дек. 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. — Гродно, 2019. — С. 16–17.

51. Хартовский, В. Е. Об асимптотической оценке решения линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 дек. 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. — Гродно, 2019. — С. 31–33.

52. Хартовский, В. Е. О проблеме асимптотической оценки решения линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, 15–19 июня 2020 г. / ФГБОУ ВО «Удмуртский гос. ун-т» ; редкол.: А. С. Банников [и др.]. — Ижевск, 2020. — С. 226–228.

53. Метельский, А. В. О проблеме управления спектром линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, 15–19 июня 2020 г. / ФГБОУ ВО «Удмуртский гос. ун-т» ; редкол.: А. С. Банников [и др.]. — Ижевск, 2020. — С. 199–201.

54. Метельский, А. В. Наблюдатели с финитной ошибкой для линейных систем с последействием / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф. памяти проф. Р. Ф. Габасова, Минск, 5–10 окт. 2021 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: Ф. М. Кириллова (гл. ред.)[и др.]. — Минск, 2021. — С. 148–149.

55. Хартовский, В. Е. К вопросу идентифицируемости линейных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация =

Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф. памяти проф. Р. Ф. Габасова, Минск, 5–10 окт. 2021 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: Ф. М. Кириллова (гл. ред.)[и др.]. — Минск, 2021. — С. 189–190.

56. Хартовский, В. Е. К теории дескрипторных уравнений с дискретным временем / В. Е. Хартовский // Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика : материалы Междунар. откр. конф., Воронеж, 21–23 дек. 2020 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; отв. ред. В. В. Зенина. — Воронеж, 2021. — С. 341–346.

57. Метельский, А. В. К вопросу наблюдения линейных систем нейтрального типа с помощью финитного наблюдателя / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика : материалы Междунар. откр. конф., Воронеж, 21–23 дек. 2020 г. / ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» ; отв. ред. В. В. Зенина. — Воронеж, 2021. — С. 218–224.

58. Метельский, А. В. К теории наблюдаемости линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю. С. Богданова, Минск, 1–4 июня 2021 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2021. — С. 151–152.

59. Метельский, А. В. О задаче восстановления решения линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / НАН Беларуси, Ин-т математики, БГУ ; сост. В. В. Лепин. — Минск, 2021. — Ч. 1. — С. 78.

60. Метельский, А. В. О наблюдателях с финитной погрешностью для линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2022 : материалы XX междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 31 мая–03 июня 2022 г. : в 2 ч. / Полоцкий гос. ун-т. ; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. — Новополоцк, 2022. — Ч. 1. — С. 104–106.

61. Хартовский, В. Е. О некоторых задачах управления и наблюдения линейных дифференциально-алгебраических систем / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2022 : материалы XX междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 31 мая–3 июня 2022 г. : в 2 ч. / Полоцкий гос. ун-т. ; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. — Новополоцк, 2022. — Ч. 1. — С. 110–112.

Тезисы докладов научных конференций

62. Хартовский, В. Е. К задаче полной управляемости по состоянию систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения – XI : тез. докл. Междунар. матем. конф., Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, ГГУ им. Ф.Скорины, БГУ ; сост. В. И. Мироненко, И. В. Сафонов. —- Минск, 2006. — С. 93–94.

63. Хартовский, В. Е. О неуправляемых дифференциальных системах с запаздыванием / В. Е. Хартовский // X Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. : в 3 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред.: С. Г. Красовский, А. А. Лепин. — Минск, 2008. — Ч. 3. — С. 120.

64. Хартовский, В. Е. Обобщение задачи полной управляемости для линейных автономных дифференциально-разностных систем / В. Е. Хартовский // Актуальные проблемы анализа : тез. докл. Междунар. матем. конф., Гродно, 7–10 апр. 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, ГрГУ им. Я. Купалы, БРФФИ ; редкол.: Я. В. Радыно, В. Г. Кротов, Ю. М. Вувуникян (отв. ред.). — Гродно, 2009. — С. 182–184.

65. Хартовский, В. Е. О некоторых задачах управления линейными автономными системами с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Второй международ. науч. конф., Минск, 24–28 авг. 2009 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред.: В. И. Корзюк, И. С. Козловская, Е. С. Чеб. — Минск, 2009. — Ч. 2. — С. 197–198.

66. Хартовский, В. Е. Об одной задаче управления для линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2010 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. Г. Красовский, А. А. Леваков, С. А. Мазаник. — Минск, 2010. — С. 96–97.

67. Хартовский, В. Е. О полной управляемости линейных систем нейтрального типа со многими запаздываниями / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Еругинские чтения – 2011 : тез. докл. XIV международ. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, Полоцкий гос. ун-т. ; редкол.: И. В. Гайшун (предс.) [и др.]. — Новополоцк, 2011. — С. 85–86.

68. Хартовский, В. Е. О задаче полной управляемости и ее обобщении для систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. Междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. В. Рогозин. — Минск, 2011. — С. 148.

69. Хартовский, В. Е. Об одном подходе к задаче модального управления многовходными дифференциально-разностными системами / В. Е. Хартовский // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. Междунар. науч. семинара, Минск, 10–14 сент. 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. В. Рогозин. — Минск, 2012. — С. 68.

70. Хартовский, В. Е. О методах управления линейными системами с запаздыванием неполного ранга / В. Е. Хартовский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Третьей междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина, Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. — Брест, 2012. — С. 78–79.

71. Хартовский, В. Е. Задачи успокоения решения и состояния линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Третьей междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина, Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. — Брест, 2012. — С. 79–80.

72. Хартовский, В. Е. Управляемость линейных стационарных вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 нояб. 2012 г. : в 3 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред.: С. Г. Красовский, В. В. Лепин. — Минск, 2012. — Ч. 2. — С. 120–121.

73. Хартовский, В. Е. Задачи успокоения состояния и решения для линейных объектов нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 нояб. 2012 г. : в 3 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред.: С. Г. Красовский, В. В. Лепин. — Минск, 2012. — Ч. 2. — С. 121–122.

74. Хартовский, В. Е. Об успокоении решения линейной алгебро-дифференциальной системы со многими запаздываниями / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2013 : тез. докл. XV междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2013. — Ч. 1. — С. 84–85.

75. Хартовский, В. Е. О модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Еругинские чтения — 2013 : тез. докл. XV междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Бе-

ларуси, БГУ, ГрГУ ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2013. — Ч. 1. — С. 85–86.

76. Хартовский, В. Е. Об одном подходе к управлению неуправляемыми линейными системами с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization : тез. докл. Междунар. конф. к 95-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина (1918–1969), Минск, 1–5 окт. 2013 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: В. В. Альсевич, И. В. Гайшун [и др.]. — Минск, 2013. — С. 233–235.

77. Хартовский, В. Е. О задаче модального управления линейными системами нейтрального типа со многими запаздываниями / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization : тез. докл. Междунар. конф. к 95-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина (1918–1969), Минск, 1–5 окт. 2013 г. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: В. В. Альсевич, И. В. Гайшун [и др.]. — Минск, 2013. — С. 235–237.

78. Хартовский, В. Е. Модальное управление линейными системами нейтрального типа со многими запаздываниями / В. Е. Хартовский, А. Т. Павловская // Еругинские чтения — 2014 : тез. докл. XVI междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, Полоцкий гос. ун-т ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2014. — Ч. 1. — С. 104.

79. Хартовский, В. Е. Построение динамического регулятора по типу обратной связи, обеспечивающего успокоение дифференциально-разностных систем / В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Еругинские чтения — 2014 : тез. докл. XVI междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.: в 2 ч. / Ин-т матем. НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. — Минск, 2014. — Ч. 1. — С. 105–106.

80. Метельский, А. В. Успокоение решения систем нейтрального типа посредством регуляторов переменной структуры / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Теория управления и математическое моделирование : тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти Н. В. Азбелева и Е. Л. Тонкова, Ижевск, 9–11 июня 2015 г. / ФГБОУ ВПО «Удмуртский гос. ун-т» ; редкол.: А. С. Банников [и др.]. — Ижевск, 2015. — С. 186–187.

81. Хартовский, В. Е. О задаче приведения линейных систем нейтрального типа с многими запаздываниями к конечному спектру / В. Е. Хартовский // Теория управления и математическое моделирование

: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти Н. В. Азбелева и Е. Л. Тонкова, Ижевск, 9–11 июня 2015 г. / ФГБОУ ВПО «Удмуртский гос. ун-т» ; редкол.: А. С. Банников [и др.]. — Ижевск, 2015. — С. 222–223.

82. Метельский, А. В. Успокоение решения линейных систем нейтрального типа обратной связью по состоянию / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ–2015) : тез. докл. 8-го междунар. науч. семинара, Минск, 14–19 сент. 2015 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. В. Рогозин. — Минск, 2015. — С. 60–61.

83. Хартовский, В. Е. Приведение к конечному спектру линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ – 2015) : тез. докл. 8-го междунар. науч. семинара, Минск, 14–19 сент. 2015 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ ; ред. С. В. Рогозин. — Минск, 2015. — С. 83.

84. Метельский, А. В. Задача синтеза регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2017 : тез. докл. XVII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16–20 мая 2017 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В. В. Амелькин, В. И. Громак [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 1. — С. 82–83.

85. Хартовский, В. Е. К вопросу управления спектром линейных систем нейтрального типа в классе дифференциально-разностных регуляторов / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2017 : тез. докл. XVII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16–20 мая 2017 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В. В. Амелькин, В. И. Громак [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 1. — С. 85.

86. Хартовский, В. Е. Задача модальной управляемости линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Еругинские чтения — 2017 : тез. докл. XVII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16–20 мая 2017 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В. В. Амелькин, В. И. Громак [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 1. — С. 86.

РЕЗЮМЕ

Хартовский Вадим Евгеньевич
Управляемость линейных динамических систем с последействием: качественный анализ и построение регуляторов

Ключевые слова: линейная система нейтрального типа, дифференциально-алгебраическая система с последействием, 0-управляемость, регулятор, спектральная приводимость, модальная управляемость, наблюдатель.

Цель исследования: разработать алгебраический подход к синтезу управлений для линейных автономных систем с последействием.

Методы исследования: методы теории функционально-дифференциальных уравнений, алгебры, функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Для линейных автономных систем нейтрального типа и линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием получены критерии разрешимости задачи 0-управляемости и методы синтеза соответствующих программных управлений; разработаны методы синтеза регуляторов типа обратной связи, обеспечивающие успокоение решения; получены критерии существования и методы синтеза регуляторов типа обратной связи, обеспечивающие конечный спектр; получены критерии существования и методы синтеза модальных регуляторов типа обратной связи, обеспечивающие заданный спектр. Для линейных автономных систем нейтрального типа получены условия существования и способы построения асимптотических и финитных наблюдателей. Все результаты диссертации являются новыми.

Рекомендации по использованию и область применения. Результаты диссертации применимы при анализе структурных свойств динамических систем с последействием и конструировании регуляторов в объектах, моделируемых такими системами, при решении практических задач управления экономическими и технологическими процессами. Проверки полученных условий разрешимости изученных задач основаны на вычислении рангов некоторых матриц, а предложенные схемы синтеза регуляторов и наблюдателей состоят из алгебраических операций, имеющихся в арсенале современных пакетов компьютерной алгебры.

РЭЗЮМЭ

Хартоўскі Вадзім Яўгенавіч
Кіравальнасць лінейных дынамічных сістэм з паслядзеяннем: якасны аналіз і пастраенне рэгулятараў

Ключавыя словы: лінейная сістэма нейтральнага тыпу, дыферэнцыяльна-алгебраічная сістэма з паслядзеяннем, 0-кіравальнасць, рэгулятар, спектральная прыводнасць, мадальная кіравальнасць, назіральнік.

Мэта работы: распрацаваць алгебраічны падыход да сінтэзу рэгулятараў для лінейных аўтаномных сістэм з паслядзеяннем.

Метады даследавання: метады тэорыі функцыянальна-дыферэнцыяльных ураўненняў, алгебры, функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Для лінейных аўтаномных сістэм нейтральнага тыпу і лінейных аўтаномных цалкам рэгулярных дыферэнцыяльна-алгебраічных сістэм з паслядзеяннем атрыманы крытэры адрознасці задачы 0-кіравальнасці і метады сінтэзу адпаведных праграмных упраўленняў; распрацаваны метады сінтэзу рэгулятараў тыпу зваротнай сувязі, якія забяспечваюць заспакаенне рашэння; атрыманы крытэрыі існавання і метады сінтэзу рэгулятараў тыпу зваротнай сувязі, якія забяспечваюць канчатковы спектр; атрыманы крытэрыі існавання і метады сінтэзу мадальных рэгулятараў тыпу зваротнай сувязі, якія забяспечваюць зададзены спектр. Для лінейных аўтаномных сістэм нейтральнага тыпу атрыманы ўмовы існавання і спосабы пабудовы асімптатычных і фінітных назіральнікаў. Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна прымянення. Вынікі дысертацыі дастасавальныя пры аналізе структурных уласцівасцяў дынамічных сістэм з паслядзеяннем і канструяванні рэгулятараў у аб'ектах, якія мадэлююцца такімі сістэмамі, пры рашэнні практычных задач кіравання эканамічнымі і тэхналагічнымі працэсамі. Праверкі атрыманых умоў адрознасці вывучаных задач заснаваны на вылічэнні рангаў некаторых матрыц, а прапанаваныя схемы сінтэзу рэгулятараў і назіральнікаў складаюцца з алгебраічных аперацый, наяўных у арсенале сучасных пакетаў кампутарнай алгебры.

SUMMARY

Khartovskii Vadim
Controllability of linear dynamical systems with aftereffect: qualitative analysis and design of controllers

Key words: linear system of neutral type, differential-algebraic system with aftereffect, 0-controllability, regulator, spectral reducibility, modal controllability, observer

The purpose of the research: develop an algebraic approach to the synthesis of regulators for linear autonomous systems with aftereffect.

Methods of the research: methods of the theory of functional-differential equations, algebra, functional analysis.

The obtained results and their novelty. For linear autonomous systems of neutral type and linear autonomous completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, criteria for the solvability of the 0-controllability problem and methods for designing the corresponding program controls are obtained; methods for synthesizing feedback-type regulators have been developed, which ensure the calming of the solution; existence criteria and methods for the synthesis of feedback-type regulators providing a finite spectrum are obtained; the existence criteria and methods for the synthesis of modal feedback-type regulators that provide a given spectrum are obtained. For linear autonomous systems of neutral type, existence conditions and methods for constructing asymptotic and finite observers are obtained. All dissertation results are new.

Recommendations for use and field of applications. The results of the thesis are applicable in the analysis of the structural properties of dynamic systems with aftereffect and in the design of regulators in objects modeled by such systems, in solving practical problems of managing economic and technological processes. The checks of the obtained conditions for the solvability of the studied problems are based on the calculation of the ranks of some matrices, and the proposed schemes for the synthesis of regulators and observers consist of algebraic operations available in the arsenal of modern computer algebra packages.

Подписано в печать ?? августа 20??
Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 4,88   Уч.-изд. л. 4,27
Тираж 60 экз. Заказ № 9

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072. Минск, Сурганова, 11.