

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права  
УДК 519.63

**ХОАНГ**  
**Тхи Киеу Ань**

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА  
ТОЧНОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.07 — вычислительная математика

Минск 2023

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель: **Матус Петр Павлович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, главный научный сотрудник отдела информационных технологии Института математики Национальной академии наук Беларуси

Официальные оппоненты: **Вабищевич Петр Николаевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
**Лемешевский Сергей Владимирович**,  
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела исследований и разработки ООО «НТЦ «Симмэйкерс»

Оппонирующая организация: **Учреждение образования «Брестский государственный технический университет»**

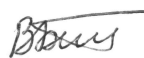
Защита состоится «01» июня 2023 г. в 12:30 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.

Тел. ученого секретаря совета (+375-17)-378-17-62, email: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «28» апреля 2023 г.

Учёный секретарь совета  
по защите диссертаций, кандидат  
физико-математических наук, доцент



В. И. Бенедиктович

# ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной вычислительной математики является разработка вычислительных алгоритмов, позволяющих реально уменьшить время расчетов прикладных задач на ЭВМ. Отметим некоторые подходы, направленные на решение этой проблемы: разработка экономичных разностных схем для многомерных задач математической физики на основе идей локально-одномерных схем и схем расщепления по физическим процессам; построение многосеточных итерационных методов типа “мультигрид”, скорость сходимости которых не зависит от числа используемых расчетных точек; организация параллельных вычислений на современных компьютерах; разработка вычислительных методов адаптивного типа на квазиравномерных, локально-сгущающихся и подвижных сетках.

В последние годы активно развиваются подходы, основанные на разработке и исследовании разностных схем повышенного порядка точности. Среди них отметим точные разностные схемы, основанные на применении специального усреднения Стеклова нелинейных коэффициентов и так называемых нестандартных схем Рональда Э. Микенса (Ronald E. Mickens); использование многоточечных шаблонов, экстраполяция метод Ричардсона, нерасчетные точки в теории использования неравномерных сеток и многие другие.

В настоящее время большое внимание уделяется построению так называемых компактных схем. Под *компактными* понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации, построенных на минимальных шаблонах. Хотя такой термин официально применяли А.И. Толстых и В.И. Паасонен в 90-е годы, основополагающей работой по этой тематике для классических уравнений математической физики с самосопряженным эллиптическим оператором является работа А.А. Самарского<sup>1</sup>, которая опубликована в 1963 году.

При численном решении дифференциальных уравнений с использованием разностных методов входные данные, включая правые части уравнений, краевые и начальные условия, могут быть заданы неточно, то есть, с определенной погрешностью. В процессе нахождения разностного решения также возникают неизбежные ошибки, связанные с округлением либо малыми возмущениями на ЭВМ всех входных данных, включая и коэффициенты. Отсюда ясно, насколько важна устойчивость решения разностного алгоритма, чтобы численное решение было найдено корректно. Под устойчивостью по входным данным или просто устойчивостью понимается свойство непре-

---

<sup>1</sup>Самарский, А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А.А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 5. — С. 812–840.

рывной зависимости разностного решения от входных данных. Для исследования устойчивости разностных схем используются различные подходы, включая сеточный аналог метода энергетических неравенств<sup>2</sup>, метод Фон Неймана, теорему эквивалентности Лакса либо общую теорию устойчивости операторно-разностных схем А.А. Самарского<sup>3</sup> с операторами, действующими в конечномерных пространствах Гильберта.

При исследовании корректности начально-краевых задач для нестационарных уравнений математической физики основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным, граничным условиям и правой части. Однако, как упоминалось ранее, в процессе нахождения решения разностной задачи коэффициенты уравнения, могут быть также возмущены. Отсюда ясно, что в более общей ситуации необходимо рассматривать непрерывную зависимость решения и от возмущения коэффициентов уравнения. В этом случае говорят о *сильной устойчивости*, под которой понимается устойчивость решения разностной задачи по отношению к малому возмущению начальных и граничных условий, правой части и коэффициентов уравнения.

Волновое уравнение - гиперболическое уравнение второго порядка - является важным дифференциальным уравнением в частных производных в математической физике. Оно используется в таких областях физики, как ионно-звуковые волны в плазме, световые и электромагнитные волны, колебания струн, стержней и мембран. Изучение волновых процессов широко применяются в сотовой связи, радиотехнике, рентгеновских аппаратах, электромагнитных системах управления, лазерах, гаммателескопах и т.д. Среди волновых уравнений важное место занимает уравнение Клейна-Гордона, которое используется при изучении солитонов; дифракции внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости на полубесконечном барьере, находящемся в этой жидкости; в физике конденсированного вещества, плазме, твердого тела.

Для приближенного решения нестационарных задач математической физики такого типа наиболее часто используются разностные или конечно-элементные аппроксимации. В последние годы резко возрос интерес к построению компактных схем. В связи с этим отметим, например, работы В.И. Пасонена, Стивена Бритта (Steven Britt) и др., Х. Дина (H. Ding) и Ю. Чжана (Yu. Zhang), А. Злотника (A. Zlotnik) и Р. Чегиса (R. Ciegis). В большинстве этих работ доказывается необходимое условие устойчивости разностных схем

---

<sup>2</sup>Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. —М.: Наука, 1989. — 616 с.

<sup>3</sup>Самарский, А.А. Разностные схемы с операторными множителями / А.А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. — Минск: "ЦОТЖ", 1998. — 442 с.

с помощью спектрального метода.

В настоящей диссертационной работе основное внимание уделяется построению и исследованию компактных разностных схем порядков аппроксимации  $4+2$  и  $4+4$  для гиперболических уравнений второго порядка и гиперболо-параболических уравнений, включая линейные уравнения с переменными коэффициентами и квазилинейные уравнения. Для получения априорных оценок устойчивости и сходимости разностных решений используются метод энергетических неравенств и теория трёхслойных операторно-разностных схем А.А Самарского.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Белорусского государственного университета. Решением Ученого совета факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета от 25.02.2020, протокол № 06 утверждена тема диссертации.

Диссертационные исследования проводились в соответствии с заданиями государственной программы научных исследований («Конвергенция – 2020») на 2016–2020 гг. – задание 1.5.01 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения задач для дифференциальных уравнений», № госрегистрации 20160176; государственной программы научных исследований («Конвергенция – 2025») на 2021–2025 гг. – задание 1.4.01 «Методы вычислительной математики и математического моделирования физических, технических и технологических процессов», НИР1 «Численные методы моделирования физических, технических и технологических процессов», № госрегистрации 20210251.

### **Цель и задачи исследования**

*Целью диссертационной работы* является построение и исследование компактных и устойчивых разностных схем для гиперболических и гиперболо-параболических уравнений второго порядка.

Для достижения этой цели в ходе работы над диссертацией были поставлены следующие задачи:

– построить и исследовать компактные разностные схемы для одномерных гиперболических уравнений второго порядка в линейном и квазилинейном случаях; доказать устойчивость и сильную устойчивость разностных алгоритмов, использующихся для аппроксимации линейных уравнений;

– доказать устойчивость и сходимость решений разностных схем, аппроксимирующих многомерное линейное уравнение Клейна-Гордона, в сеточных нормах  $L_2$ ,  $W_2^1$ ,  $C$ ;

– построить устойчивые компактные разностные схемы четвёртого порядка аппроксимации для гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами в одномерном и двумерном случаях.

*Объект исследования* – разностные схемы, аппроксимирующие линейное уравнение Клейна-Гордона, квазилинейное гиперболическое уравнение второго порядка, линейное и квазилинейное гиперболо-параболические уравнения.

*Предмет исследования* – компактность и устойчивость разностных схем, сходимость разностных решений.

### **Научная новизна**

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Их новизна состоит в том, что

1. для одномерных линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка построены компактные разностные схемы, доказаны устойчивость и сильная устойчивость разностных методов для линейных уравнений;

2. получены априорные оценки устойчивости и сходимости решений разностных схем, аппроксимирующих многомерное линейное уравнение Клейна-Гордона, в слабых и сильных сеточных нормах;

3. для одномерных и двумерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами построены устойчивые компактные разностные схемы четвёртого порядка аппроксимации.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Компактные разностные схемы для одномерных линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка. Условия устойчивости и сильной устойчивости решения разностных методов для линейных уравнений.

2. Априорные оценки устойчивости и сходимости решений разностных схем, аппроксимирующих многомерное линейное уравнение Клейна-Гордона, в слабых и сильных сеточных нормах.

3. Устойчивые компактные разностные схемы четвёртого порядка аппроксимации для одномерных и двумерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Основные результаты диссертационной работы и положения, выноси-

мые на защиту получены автором лично. Работы [1–3, 5, 6] опубликованы в соавторстве с научным руководителем доктором физико-математических наук, профессором, членом-корреспондентом НАН Беларуси П.П. Матусом. Научному руководителю принадлежат постановка задач и общие рекомендации относительно методов их решения, а автору диссертации – реализация этих рекомендаций и доказательство соответствующих результатов. Вычислительный эксперимент, представленный в первой части четвертой главы, получен совместно с кандидатом наук Д. Пылак (D. Pylak).

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- на XVII Международной конференции «Молодежь в науке – 2020» (г. Минск, 2020);
- на 78-ой научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (г. Минск, 2021);
- на XVIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке – 2021» (г. Минск, 2021);
- на XXXIV Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях-ММТТ-34» (г. Минск, 2021);
- на Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (г. Минск, 2021);
- на X Международной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г. Саранск, 2022);
- на II Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» посвященная 90-летию БГПИ-БГУ (г. Улан-Удэ, 2022);
- на XXXV Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях-ММТТ-35» (г. Минск, 2022).

### **Опубликованность результатов диссертации**

Материалы диссертации опубликованы в 15 научных работах, из них 7 статей в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РБ (общим

объемом - 4,58 авторских листа), 8 тезисов в сборниках материалов конференций.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из содержания, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Полный объем диссертации составляет 102 страницы, включая 4 рисунка и 12 таблиц, встроенных в текст. Список использованных источников на 12 страницах включает 126 источников (с учетом 15 собственных публикаций автора).



## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы и изложены результаты, полученные в диссертации.

В **первой главе** дается аналитический обзор литературы по теме исследований.

**Вторая глава** посвящена построению и исследованию компактных разностных схем порядка аппроксимации  $4+2$  для одномерных линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка.

В **разделе 2.1** приводятся вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования разностных схем.

В **разделе 2.2** в области  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  для уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - mu + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

рассматривается начально-краевая задача

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{v}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Здесь и далее будем предполагать, что:

1) решение дифференциальных задач существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных задачи (корректность по Ж. Адамару);

2) все функции, входящие в дифференциальные уравнения, обладают всеми непрерывными и ограниченными в  $\bar{Q}_T$  производными, необходимыми по ходу изложения.

В дальнейшем используем безиндексные обозначения, введенные в гл. VI, §3 монографии А.А. Самарского<sup>4</sup>.

В области  $\bar{Q}_T$  вводится равномерная сетка узлов  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \bar{Q}_T\}$ , где  $\bar{\omega}_h$  и  $\bar{\omega}_\tau$  определены соответственно соотношениям

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = l/N\} = \omega_h \cup \{0, l\}, \quad (4)$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{0\}. \quad (5)$$

На построенной сетке  $\bar{\omega}$  дифференциальную задачу заменим разностной задачей:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y^{(\sigma_*, \sigma_*)} - m \left( y + \frac{h^2}{12} \Lambda y \right) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (6)$$

<sup>4</sup>Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. —М.: Наука, 1989. —616 с.

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \quad (8)$$

в которой

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x}, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda f, \quad \sigma_* = \sigma - \frac{h^2}{12\tau^2},$$

$$y^{(\sigma_*, \sigma_*)} = \sigma_* \hat{y} + (1 - 2\sigma_*)y + \sigma_* \check{y},$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2} [u_0''(x) - mu_0(x) + f(x, 0)], \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Здесь и далее  $\sigma$  – константа.

Наряду с разностной схемой (6) – (8) рассматривается соответствующая ей возмущенная задача с возмущенным коэффициентом  $\tilde{m}$

$$\tilde{y}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \Lambda \tilde{y}^{(\sigma_*, \sigma_*)} - \tilde{m} \left( \tilde{y} + \frac{h^2}{12} \Lambda \tilde{y} \right) + \tilde{\varphi}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (9)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (10)$$

$$\tilde{y}(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad \tilde{y}(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \quad (11)$$

в которой  $\tilde{y}$  – возмущенное решение, полученное по разностной схеме (6) – (8) с возмущенной правой частью  $\tilde{f}$  и возмущенными начальными условиями  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ .

Вычитая из уравнений (9) – (11) соответствующие уравнения (6) – (8), получим задачу для возмущения  $\bar{y} = \tilde{y} - y$ , которую сразу запишем в операторном виде:

$$D \bar{y}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{A}_1 \bar{y} = \bar{\varphi} - (\tilde{A}_1 - A_1)y, \quad \bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1,$$

$$D = E + \sigma_* \tau^2 A, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{m}E + \left( 1 - \frac{\tilde{m}h^2}{12} \right) A,$$

$$A_1 = mE + \left( 1 - \frac{mh^2}{12} \right) A, \quad Ay = -\Lambda y.$$

Здесь и в дальнейшем  $\bar{u}_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \quad \bar{u}_1 = \tilde{u}_1 - u_1, \quad \bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi$ .

При применении общей теории операторно-разностных схем А.А. Самарского<sup>5</sup> доказана следующая теорема о сильной устойчивости разностной задачи.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\sigma = 1$  и выполнены следующие нестандартные условия на шаги сетки:

$$\sigma_* = 1 - \frac{h^2}{12\tau^2} \geq 0, \quad \frac{h}{\sqrt{6}} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}}}, \quad \bar{m} = \max\{m, \tilde{m}\}.$$

<sup>5</sup>Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. —М.: Наука, 1989. — 616 с.

Тогда решение разностной схемы (6) – (8) сильно устойчиво и для его возмущения имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left\{ \|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \left( \|\tilde{\varphi}^s - \varphi^s\| + \frac{4}{3} K_s |\tilde{m} - m| \right) \right\},$$

$$n = \overline{1, N_0 - 1},$$

$$\text{где } K_s = \sqrt{2} \left( \|u_0\|_D + \delta^{-1} \|Du_1\| + \delta^{-1} \sum_{r=1}^{s-1} \tau \|\varphi^r\| \right), \quad \delta = 8/l^2.$$

Рассматривается задача для погрешности метода  $z = y - u$ :

$$z_{\bar{t}t} = \Lambda z^{(\sigma_*, \sigma_*)} - m \left( z + \frac{h^2}{12} \Lambda z \right) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = \overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$z(0, t + \tau) = 0, \quad z(l, t + \tau) = 0, \quad t \in \omega_\tau.$$

Далее будем использовать обозначения для норм и скалярного произведения в  $L_2(\omega_h)$ :

$$\|y\|_{C_h} = \|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|y\|_{\bar{C}_h} = \|y\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{C_{h\tau}} = \max_{t \in \omega_\tau} \|y(t)\|_{C_h}, \quad \|y\|_{\bar{C}_{h\tau}} = \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_{\bar{C}_h},$$

$$\sqrt{(y, y)} = \|y\| = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h(y_i^n)^2 \right)^{1/2}, \quad \|y_{\bar{x}}\| = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^N h(y_{\bar{x},i}^n)^2 \right)^{1/2},$$

Имеет место следующая теорема о сходимости решения разностной задачи.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\sigma = 1$  и выполнены следующие условия

$$h/\sqrt{6} \leq \tau \leq 1/\sqrt{m}.$$

Тогда решение разностной схемы (6) – (8) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1) – (3) в сеточной норме  $\bar{C}_{h\tau}$  и для её решения имеет место оценка точности вида

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_{\bar{C}} \leq M_2(h^4 + \tau^2), \quad M_2 = \text{const} > 0.$$

В разделе 2.3 в области  $\bar{Q}_T$  для уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - mu + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (12)$$

рассматривается начально-краевая задача (2), (3). Здесь  $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$ .

На сетке  $\bar{\omega}$  исходную дифференциальную задачу аппроксимируем разностной схемой вида

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12} \Lambda (p y_{\bar{t}\bar{t}}) - m \left[ y^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12} \Lambda (p y^{(\sigma, \sigma)}) \right] + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (13)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (14)$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau. \quad (15)$$

Здесь

$$\Lambda y = (a(x, t_n) y_{\bar{x}})_x, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda (p f), \quad p(x, t) = \frac{1}{k(x, t)},$$

$$a(x, t) = 6[p(x - h, t) + 4p(x - 0.5h, t) + p(x, t)]^{-1}, \quad 0 < c_1 \leq a(x, t) \leq c_2,$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2} [(k(x, 0)u'(x, 0))' - mu(x, 0) + f(x, 0)], \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Рассматривается задача для возмущения  $\bar{y} = \tilde{y} - y$ :

$$\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda \bar{y}^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12} \Lambda (p \bar{y}_{\bar{t}\bar{t}}) - m \left[ \bar{y}^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12} \Lambda (p \bar{y}^{(\sigma, \sigma)}) \right] + \bar{\varphi}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad \bar{y}_t(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$\bar{y}(0, t + \tau) = 0, \quad \bar{y}(l, t + \tau) = 0, \quad t \in \omega_\tau.$$

Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\sigma = 0.5$ ,  $k = k(x)$  и выполнены условия

$$h \leq h_0, \quad h_0 = \sqrt{3c_1}/\sqrt{m}, \quad \tau \geq \max \{1, 2/\sqrt{3c_1}\} h.$$

Тогда имеет место оценка

$$Q_{n+1} \leq e^{ct_n} \left( Q_1 + c \sum_{k=1}^n \tau \|\bar{\varphi}(t_k)\|^2 \right), \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1,$$

означающая  $\rho$ -устойчивость решения разностной схемы (13) – (15) по начальным данным, правой части в сеточных нормах  $L_2$ ,  $W_2^1$ ,  $\overline{C}_{h\tau}$ .

Здесь  $Q_n = \|\overline{y}_t\|^2 + \frac{1}{2}(a, (\overline{y}_x)^2 + (\check{y}_x)^2) + \frac{m}{2}(\|\overline{y}\|^2 + \|\check{y}\|^2) - \frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \overline{y}_{\check{x}t}^2) - \frac{mh^2}{24}(ap_{(-1)}, (\overline{y}_x)^2 + (\check{y}_x)^2)$ ,  $p_{(-1)} = p(x - ih)$ ,  $c > 0$  - константа, зависящая от входных данных и в каждом конкретном случае своя. В диссертации  $c$  и другие константы не зависят от шагов сетки.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда решение разностной схемы (13) – (15) сходится к точному решению дифференциальной задачи (12), (2), (3) в сеточной норме  $\overline{C}_{h\tau}$  и для её решения имеет место оценка точности

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_{\overline{C}} \leq M_2(h^4 + \tau^2)$$

где  $M_2 = const > 0$ .

**Раздел 2.4** посвящен построению компактной разностной схемы для одного типа квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка, изучению ее погрешность аппроксимации и реализации.

В **разделе 2.5** представлены численные результаты тестовых расчетов, иллюстрирующих повышенный порядок точности предложенных компактных разностных схем на минимальных шаблонах.

В **третьей главе** изучаются компактные схемы для линейного и квазилинейного многомерного уравнения Клейна-Гордона.

В **разделе 3.1** приводятся вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования разностных схем. Рассматривается новый класс аддитивных операторно-разностных схем с весами.

**Раздел 3.2** посвящен изучению компактных схем порядков аппроксимации  $4+2$  и  $4+4$  для линейного многомерного уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами.

Пусть  $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$  является  $p$ -мерным прямоугольным параллелепипедом,  $\Gamma$  – его граница, так что  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . В цилиндре  $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$  рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u - mu + f(x, t), \quad m > 0, \quad (x, t) \in Q_T = G \times [0 < t \leq T], \quad (16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \overline{v}_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (17)$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

где  $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ .

В  $\bar{Q}_T$  построим разностную сетку  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ , где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p); i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}; h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha; \alpha = \overline{1, p}\} = \omega_h \cup \gamma_h, \quad (19)$$

$\bar{\omega}_\tau$  определена соотношением (5). Сетка  $\bar{\omega}_h$  равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь  $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$  – множество узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , которые принадлежат границе  $\Gamma$ .

На сетке узлов  $\bar{\omega}$  напомним для исходной задачи (16) – (18) следующую разностную схему порядка аппроксимации 4+2:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^{(\sigma_\alpha, \sigma_\alpha)} + \frac{1}{12} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p h_\alpha^2 \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y - m y - m \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha y + \varphi, \\ (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (20)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (21)$$

$$y(x, t + \tau) = \mu(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (22)$$

где

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha f, \quad \sigma_\alpha = \sigma - \frac{h_\alpha^2}{12\tau^2}, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u(x, 0) - m u(x, 0) + f(x, 0) \right], \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Для изучения сильной устойчивости разностных схем рассматривается разностную задачу (20) – (22), когда имеет место возмущение коэффициента  $\tilde{m}$ :

$$\tilde{y}_{\bar{t}\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha \tilde{y}^{(\sigma_\alpha, \sigma_\alpha)} + \frac{1}{12} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p h_\alpha^2 \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \tilde{y} - \tilde{m} \tilde{y} - \tilde{m} \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha \tilde{y} + \tilde{\varphi},$$

$$(x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$\tilde{y}(x, t + \tau) = \mu(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau.$$

Аналогично случаю одномерного уравнения задача для возмущения  $\bar{y} = \tilde{y} - y$  в двумерном случае  $p = 2$  может быть записана в операторном виде

$$D\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + \tilde{A}_0 \bar{y} = \bar{\varphi} - (\tilde{A}_0 - A_0)y,$$

$$\bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1,$$

в котором

$$D = E + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \sigma_\alpha A_\alpha, \quad \tilde{A}_0 = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^p \frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12} A_\alpha A_\beta + \tilde{m} E - \frac{\tilde{m}}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2 A_\alpha,$$

$$A_0 = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2 + m E - \frac{m}{12} (h_1^2 A_1 + h_2^2 A_2), \quad A_\alpha \bar{y} = -\bar{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Доказана следующая теорема о сильной устойчивости.

**Теорема 3.1.** Пусть  $p = 2$  и выполнены следующие соотношения

$$\frac{1 + \varepsilon}{4} + \frac{|h|^2}{12\tau^2} \leq \sigma, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{(1 + \varepsilon)\bar{m}}}, \quad \bar{m} = \max\{m, \tilde{m}\}.$$

Тогда решение разностной схемы (20) – (22) сильно устойчиво и для её возмущения  $\bar{y} = \tilde{y} - y$  имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \left\{ \|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\tilde{\delta}} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tilde{\delta}} \sum_{s=1}^n \tau \left( \|\tilde{\varphi}^s - \varphi^s\| + \frac{1}{3} |\tilde{m} - m| K_s \right) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1.$$

Здесь  $K_s = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \left\{ \|u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|Du_1\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi^s\| \right\}$ ,  $\delta = (4l_0 + m)/3$ ,  $\tilde{\delta} = (4l_0 + \tilde{m})/3$ ,  $l_0 = \min\{8/l_1^2, 8/l_2^2\}$ .

Далее рассматривается другая разностная схема порядка аппроксимации 4+2:

$$y_{\tilde{t}\tilde{t}} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^{(\sigma_\alpha, \sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\beta^2}{12} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y^{(\sigma_\alpha, \sigma_\alpha)} - m y^{(\sigma_{p+1}, \sigma_{p+1})} - m \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha y^{(\sigma_{p+1}, \sigma_{p+1})} + \varphi,$$

$$(x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (23)$$

в которой  $\varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha f$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma - \frac{h_\alpha^2}{12\tau^2}$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ ,  $\sigma_{p+1}$  - константа.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Пусть  $p = 2$  и выполнены условия

$$\sigma \geq \frac{1 + \varepsilon}{4} + \frac{\delta |h|^2 - 12}{12\delta\tau^2}, \quad \sigma_3 \geq \frac{1 + \varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}.$$

Тогда решение разностной задачи (23), (21), (22) сходится к точному решению дифференциальной задачи (16) – (18) и имеют место оценки

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_A \leq M(|h|^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0,$$

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_{\bar{C}} \leq M_0 |\ln |h|^{-1}|^{1/2} (|h|^4 + \tau^2), \quad M_0 = \text{const} > 0,$$

где  $A = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{A}_\alpha$ ,  $\bar{A}_1 \bar{y} = -\bar{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \frac{h_2^2}{12} \bar{y}_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ ,  $\bar{A}_2 \bar{y} = -\bar{y}_{\bar{x}_2 x_2} - \frac{h_1^2}{12} \bar{y}_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ ,  $\bar{A}_3 \bar{y} = m \left( \bar{y} + \frac{h_1^2}{12} \bar{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{h_2^2}{12} \bar{y}_{\bar{x}_2 x_2} \right)$ .

Рассматривается разностная задача (23), (21), (22) при

$$\sigma = \sigma_3 = \frac{1}{12}, \quad \varphi = f^{(\sigma, \sigma)} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2 \Lambda_\alpha f^{(\sigma, \sigma)},$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \left( \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{24} \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha - m \frac{\tau^3}{24} \right) \left[ \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u_0(x) - m u_0(x) + f(x, 0) \right] + \\ + \frac{\tau^2}{6} \left[ \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha \bar{v}_0(x) - m \bar{v}_0(x) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) \right] + \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, 0).$$

Данная схема аппроксимирует исходную задачу (16) – (18) с четвертым порядком как по пространству, так и по времени. При  $p = 2$ ,  $h_1 = h_2 = h \leq h_0$ ,  $h_0 = 1/\sqrt{m}$  она устойчива по начальным данным, если выполнено условие типа Куранта:  $\tau \leq h/\sqrt{6}$ .

Целью **раздела 3.3** является исследование устойчивости и сходимости разностных схем порядка аппроксимации 4+2 для смешанной задачи для многомерного уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами в сильных сеточных нормах. Для компактных разностных схем 4+4 получены оценки для невязки разностного решения и второго начального условия.

В цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$  для многомерного уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u - m u + f(x, t), \quad m > 0, \quad (x, t) \in Q_T = G \times [0 < t \leq T], \quad (24)$$

рассматривается начально-краевая задача (17), (18). Здесь

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_2, \quad \alpha = \overline{1, p}.$$



На равномерной сетке узлов  $\bar{\omega}$  дифференциальную задачу (24), (17), (18) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$\begin{aligned}
y_{\bar{t}t} &= \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y^{(\sigma, \sigma)} - \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} (q_{\alpha} y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} \left( q_{\alpha} \Lambda_{\beta} y^{(\sigma, \sigma)} \right) - m y^{(\sigma, \sigma)} - \\
&\quad - m \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} (q_{\alpha} y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_{\tau}, \\
y(x, 0) &= u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\
y(x, t + \tau) &= \mu(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_{\tau},
\end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{\alpha} y = (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \quad q_{\alpha}(x, t) = \frac{1}{k_{\alpha}(x, t)}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} (q_{\alpha} f),$$

$$0 < c_2^{-1} \leq q_{\alpha}(x, t) \leq c_1^{-1},$$

$$a_{\alpha} = a_{\alpha}(x, t) = 6 \left[ q_{\alpha(-)}(x, t) + 4q_{\alpha(-0.5)}(x, t) + q_{\alpha}(x, t) \right]^{-1},$$

$$0 < c_1 \leq a_{\alpha}(x, t) \leq c_2, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$v_{\alpha(-)} = v_{\alpha}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha} - h_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p),$$

$$v_{\alpha(-0.5)} = v_{\alpha}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha} - 0.5h_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p),$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u(x, 0) - m u(x, 0) + f(x, 0) \right], \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

При  $p = 2$ ,  $\mu(x, t) = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , разностная задача примет вид

$$\begin{aligned}
y_{\bar{t}t} &= \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y^{(\sigma, \sigma)} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} (q_{\alpha} y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^2 \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} \left( q_{\alpha} \Lambda_{\beta} y^{(\sigma, \sigma)} \right) - m y^{(\sigma, \sigma)} - \\
&\quad - m \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} (q_{\alpha} y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_{\tau},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
y(x, 0) &= u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\
y(x, t + \tau) &= 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_{\tau}.
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
y(x, t + \tau) &= 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_{\tau}.
\end{aligned} \tag{27}$$

В дальнейшем используем следующие обозначения

$$\|v_{\bar{x}_1}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 v_{\bar{x}_1, i_1 i_2}^2, \quad \|v_{\bar{x}_2}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1 h_2 v_{\bar{x}_2, i_1 i_2}^2.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 3.3.** Пусть  $\sigma = 0.5$ ,  $k_\alpha = k_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$  и выполнены условия

$$|h| \leq h_0, \quad \tau \geq |h|, \quad h_0 = \frac{1}{3c}.$$

Тогда разностная схема (25) – (27)  $\rho$ -устойчива по начальным данным, правой части и имеет место оценка

$$\|y^{n+1}\|_A^2 \leq M_2 \left( R_0 + c \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi^s\|^2 \right), \quad n = \overline{1, N_0 - 1},$$

в которой

$$R_0 = \frac{3}{2} m \|y^0\|^2 + (1 + m\tau^2) \|y_t^0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 c_2 (3 \|y_{\bar{x}_\alpha}^0\|^2 + 2\tau^2 \|y_{t\bar{x}_\alpha}^0\|^2),$$

$$Ay = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad M_2 = \frac{6}{c_1} e^{cT}.$$

**Теорема 3.4.** Пусть  $p = 2$ ,  $\mu(x, t) = 0$  и выполнены условия теоремы 3.3. Тогда решение разностной схемы (25) – (27) сходится к точному решению дифференциальной задачи (24), (17), (18) и имеют место оценки

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_A \leq M(|h|^4 + \tau^2),$$

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_{\bar{C}} \leq M_0 |\ln |h|^{-1}|^{1/2} (|h|^4 + \tau^2),$$

где  $M$ ,  $M_0$  – положительные константы.

В разделе 3.4 строятся компактные разностные схемы порядка аппроксимации 4+2 для многомерного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка и исследуется ее погрешность аппроксимации.

В разделе 3.5 представлены численные результаты тестовых расчётов для компактных разностных схем порядков аппроксимации 4+2 и 4+4 для двумерного уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами.

**Четвёртая глава** посвящена построению и исследованию компактных разностных схем четвертого порядка аппроксимации для одномерных и многомерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами.

В разделе 4.1 приводятся вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования разностных схем.

В разделе 4.2 изучаются компактные разностные схемы порядков аппроксимации 4+2 и 4+4 для одномерного гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. Полученные результаты обобщаются на квазилинейные уравнения.

В области  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Omega = \{0 < x < l\}$  рассматривается начально-краевая задача

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (29)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in (0, T]. \quad (30)$$

Здесь  $Lu = k(\partial^2 u / \partial x^2)$ , коэффициенты  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$ ,  $k > 0$  являются константами.

На равномерной сетке узлов  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \bar{Q}_T\}$ , в которой  $\bar{\omega}_h$  и  $\bar{\omega}_\tau$  определены соответственно соотношениям (4), (5), заменим дифференциальную задачу (28) – (30) разностной схемой порядка аппроксимации 4+4 с весами

$$\left( \rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{tt} + \rho_2 y_t^\circ + \rho_2 \left( \frac{h^2}{12} - \frac{k \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{t\bar{x}\bar{x}}^\circ = k y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma_*, \sigma_*)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (31)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (32)$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \quad (33)$$

в которой

$$\sigma_* = \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{\rho_1 h^2}{k \tau^2} \right), \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{\tau^2}{12} f_{tt} + \frac{\rho_2 \tau^2}{\rho_1 12} f_t^\circ,$$

$$u_1(x) = (1 - \rho_2 c_\tau) \bar{v}_0(x) + k c_\tau u_0''(x) + \left( \frac{\tau^2}{6\rho_1} - \frac{\rho_2 \tau^3}{\rho_1^2 12} \right) k \bar{v}_0''(x) + \frac{k^2 \tau^3}{24 \rho_1^2} u_0^{(4)}(x) +$$

$$+ c_\tau f(x, 0) + \left( \frac{\tau^2}{6\rho_1} - \frac{\rho_2 \tau^3}{\rho_1^2 24} \right) \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau^3}{24} \left( \frac{k}{\rho_1^2} f'' + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)(x, 0), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$c_\tau = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\tau}{2} - \frac{\rho_2 \tau^2}{\rho_1 6} + \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \frac{\tau^3}{24} \right). \quad (34)$$

Доказывается, что разностная схема (31) – (33) устойчива по начальным данным и правой части при  $\gamma = a\tau/h = 1$ ,  $a = \sqrt{k}/\sqrt{\rho_1}$ , т.е. при  $\tau = \sqrt{\rho_1}h/\sqrt{k}$ .

В разделе 4.3 строится и изучается компактная разностная схема четвёртого порядка аппроксимации для многомерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами. Полученные результаты обобщаются на случай уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$  является  $p$ -мерным прямоугольным параллелепипедом с границей  $\Gamma$ , т.е.  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ . В цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$  рассматривается начально-краевая задача

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t \in (0, T], \quad (35)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (36)$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T]. \quad (37)$$

Здесь  $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$ , коэффициенты  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$ ,  $k_\alpha > 0$  являются константами,  $\alpha = \overline{1, p}$ .

На сетке узлов  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ , в которой  $\bar{\omega}_h$  и  $\bar{\omega}_\tau$  определены соответственно соотношениям (19), (5), исходную задачу (35) – (37) аппроксимируем разностной схемой вида

$$\begin{aligned} & \left( \rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{\bar{t}\bar{t}} + \sum_{\alpha=1}^p \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha y_{\bar{t}\bar{t}} + \rho_2 y_{\bar{t}} + \rho_2 \sum_{\alpha=1}^p \left( \frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} - \frac{\tau^2}{12 \rho_1} \right) \Lambda_\alpha y_{\bar{t}} = \\ & = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \end{aligned} \quad (38)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (39)$$

$$y(x, t + \tau) = \mu_1(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (40)$$

где

$$\Lambda_\alpha y = k_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \sigma = \frac{1}{12}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha f + \frac{\tau^2}{12} f_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{\rho_2 \tau^2}{\rho_1 12} f_{\bar{t}},$$

$$\begin{aligned} u_1(x) = & (1 - \rho_2 c_\tau) \bar{v}_0(x) + \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha \left[ c_\tau u_0(x) + \left( \frac{\tau^2}{6 \rho_1} - \frac{\rho_2 \tau^3}{\rho_1^2 12} \right) \bar{v}_0(x) + \frac{\tau^3}{24 \rho_1^2} \sum_{\beta=1}^p L_\beta u_0(x) \right] + \\ & + c_\tau f(x, 0) + \left( \frac{\tau^2}{6 \rho_1} - \frac{\rho_2 \tau^3}{\rho_1^2 24} \right) \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau^3}{24} \left( \frac{1}{\rho_1^2} \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha f + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)(x, 0), \end{aligned}$$

параметр  $c_\tau$  определен в (34).

В двумерном случае ( $p = 2$ ) рассматривается для возмущения  $\bar{y} = \tilde{y} - y$  задача с однородными граничными условиями, которую можно записать в канонической форме

$$D\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + B\bar{y}_{\bar{t}} + A\bar{y} = \varphi, \quad \bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_{\bar{t}}(0) = \bar{u}_1, \quad (41)$$

$$D = \left( \rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) E + \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\tau^2}{12} - \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12k_\alpha} \right) A_\alpha,$$

$$A = \sum_{\alpha=1}^2 A_\alpha - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^2 \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} A_\alpha A_\beta, \quad B = \rho_2 \left( E + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\tau^2}{12\rho_1} A_\alpha - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} A_\alpha \right),$$

$$A_\alpha \bar{y} = -\Lambda_\alpha \bar{y}, \quad (A_\alpha \bar{y}, \bar{y}) = k_\alpha \|\bar{y}_{\bar{x}_\alpha}\|^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Обозначим

$$\gamma_\alpha = \frac{\sqrt{k_\alpha} \tau}{\sqrt{\rho_1} h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\rho_2 > 0$  и выполнено условие

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда разностная схема (41) устойчива по начальным данным и правой части, а для ее решения имеет место оценка

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_A \leq \sqrt{2} \left( \|\bar{u}_0\|_A + \|\bar{u}_1\|_D + \sqrt{\frac{3}{2\rho_2}} \left[ \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}(t_s)\|^2 \right]^{1/2} \right), \quad n = \overline{1, N_0 - 1}.$$

Имеет также место следующий результат.

**Теорема 4.2.** Пусть  $p = 2$  и выполнены условия теоремы 4.1. Тогда решение разностной задачи (38) – (40) сходится к точному решению дифференциальной задачи (35) – (37) и имеют место оценки

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_A \leq M_2 (|h|^4 + \tau^4), \quad M_2 = \text{const} > 0,$$

$$\max_{0 \leq n \leq N_0} \|y^n - u^n\|_{\bar{C}} \leq M_3 |\ln |h|^{-1}|^{1/2} (|h|^4 + \tau^4), \quad M_3 = \text{const} > 0.$$

В разделе 4.4 представлены численные результаты тестовых расчетов, иллюстрирующих повышенный порядок точности предложенных компактных разностных схем для одномерных и двумерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Основные научные результаты диссертации

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем для гиперболических и гиперболо-параболических уравнений второго порядка.

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. для одномерных линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка построены компактные разностные схемы; доказаны устойчивость и сильная устойчивость решения разностных методов для линейных уравнений [1–3, 8, 9];

2. получены априорные оценки устойчивости и сходимости решений разностных схем, аппроксимирующих многомерное линейное уравнение Клейна-Гордона, в слабых и сильных сеточных нормах [4, 5, 10–12];

3. для одномерных и двумерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами построены устойчивые компактные разностные схемы четвёртого порядка аппроксимации [6, 7, 13–15].

## Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы при построении и исследовании компактных разностных схем для различных типов гиперболических задач и математическом моделировании. Они могут быть полезными при чтении специальных курсов по теории разностных схем.

# СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

## Статьи в рецензируемых научных журналах

1. Матус, П.П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2020. — Т. 64, № 5. — С. 526–533.

2. Матус, П.П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2021. — Т. 65, № 1. — С. 25–32.

3. Матус, П.П. Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 963–975.

4. Ань, Х.Т.К. Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна-Гордона / Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2022. — Т. 66, № 1. — С. 12–20.

5. Матус, П.П. Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна-Гордона / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 1. — С. 120–138.

6. Матус, П.П. Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань, Д. Пылак // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1284–1293.

7. Ань, Х.Т.К. Компактные разностные схемы для многомерного гиперболо-параболического уравнения / Х. Т. К. Ань // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2022. — Т.58, № 4. — С. 370–380.

## Материалы конференций

8. Ань, Х.Т.К. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона / Х. Т. К. Ань // Молодежь в науке – 2020: тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. Молодых ученых, Минск, 22–25 сентября, 2020 г. / Нац. акад. наук Беларуси, Совет молодых ученых; редкол.: В.Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск, 2020. — С. 409–410.

9. Ань, Х.Т.К. Компактные разностные схемы для одномерного уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами / Х. Т. К. Ань // 78-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета [Электронный ресурс]: материалы конф. В 3 ч. Ч. 1, Минск,

10–21 мая 2021г. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: В. Г. Сафонов (гл. ред.) [и др.]. — Минск: БГУ, 2021. — С. 13–17.

10. Ань, Х.Т.К. Устойчивость компактных разностных схем для многомерного уравнения Клейна-Гордона / Х. Т. К. Ань // Молодежь в науке – 2021: тез. докл. XVIII Междунар. науч. конф. молодых ученых (Минск, 27–30 сентября 2021 г.). В 2 ч. Ч. 2. Медицинские, физико-математические, физико-технические науки, химии и науки о Земле / Нац. акад. наук Беларуси, Совет молодых ученых; редкол.: В. Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск: Беларуская навука, 2021. — С. 197–198.

11. Ань, Х.Т.К. Высокоточные разностные схемы для многомерного волнового уравнения / Х. Т. К. Ань // Математические методы в технологиях и технике. — 2021 г. — № 12. — С. 7–10.

12. Ань, Х.Т.К. Разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения Клейна-Гордона / Х. Т. К. Ань // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г. В 2 ч. / Ред. В.В. Лепин — Часть 2. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси. Минск: Беларуская навука, 2021. — С. 56–57.

13. Ань, Х.Т.К. Компактные разностные схемы для гиперболо-параболических уравнений / Х. Т. К. Ань // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: аннотации докл. X Междунар. науч. молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского, Саранск, 14–18 июля, 2022 г. / Нац. исслед. Мордовский гос. ун-т; редкол.: О.С. Язовцева [и др.]. — Саранск, 2022. — С. 23–24.

14. Anh, H.T.K. Higher order accuracy finite-difference schemes for hyperbolic-parabolic equations / H. T. K. Anh // II Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» посвященная 90-летию БГПИ-БГУ: тезисы докладов Междунар. науч. конф., Улан-Удэ, 22–25 августа, 2022 г. / Бурятский гос. ун-т имени Доржи Банзарова, Ин-т матем. им. С.Л. Соболева СО РАН, Восточно-Сибирский гос. ун-т технологий и управления, Бурятская гос. сельскохозяйственная акад. им. В.Р. Филиппова; ред. Р.Р. Ховалыг. — Улан-Удэ, 2022. — С. 3–4.

15. Ань, Х.Т.К. Схемы повышенного порядка точности для многомерных линейных гиперболо-параболических уравнений / Х. Т. К. Ань // Математические методы в технологиях и технике. — 2022 г. — № 11. — С. 16–19.



## РЭЗЮМЭ

Хаанг Тхі Кіеў Ань

### Рознасныя схемы павышанага парадку дакладнасці для гіпербалічных ураўненняў

**Ключавыя словы:** кампактная рознасная схема, апрыёрныя адзнакі, раўнанне Клейна-Гардона, гіпербала-парабалічнае раўнанне, устойлівасць, збежнасць

**Мэтай дысертацыйнай працы** з'яўляецца пабудова і даследаванне кампактных рознасных схем для гіпербалічных і гіпербала-парабалічных ураўненняў другога парадку.

**Метады даследавання:** метады тэорыі рознасных схем.

У дысертацыі атрыманы наступныя **навуковыя вынікі**.

1. Для аднамерных лінейных і квазілінейных гіпербалічных раўнанняў другога парадку распрацаваны кампактныя рознасныя схемы; даказаны ўстойлівасць і моцная ўстойлівасць рашэння рознасных метадаў для лінейных раўнанняў [1, 2, 3, 8, 9].

2. Даказаны апрыёрныя ацэнкі ўстойлівасці і збежнасці рашэнняў кампактных рознасных схем ў слабых і моцных сеткавых нормах, якія апраксімуюць шматмернае лінейнае раўнанне Клейна-Гардона [4, 5, 10, 11, 12].

3. Для аднамерных і двухмерных гіпербала-парабалічных раўнанняў з пастаяннымі каэфіцыентамі пабудаваны ўстойлівыя кампактныя рознасныя схемы чацвёртага парадку апраксімацыі, даказана збежнасць рознасных схем для шматмерных раўнанняў [6, 7, 13, 14, 15].

**Рэкамендацыі па практычным выкарыстанні.** Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны пры пабудове і даследаванні кампактных рознасных схем для розных тыпаў гіпербалічных задач і матэматычным мадэляванні. Яны могуць быць карыснымі пры чытанні спецыяльных курсаў па тэорыі рознасных схем.

**Галіна прымянення:** Тэорыя рознасных схем

## РЕЗЮМЕ

Хоанг Тхи Киеу Ань

### Разностные схемы повышенного порядка точности для гиперболических уравнений

**Ключевые слова:** компактная разностная схема, априорные оценки, уравнение Клейна-Гордона, гиперболо-параболическое уравнение, устойчивость, сходимост

**Целью диссертационной работы** является построение и исследование компактных разностных схем для гиперболических и гиперболо-параболических уравнений второго порядка.

**Методы исследования:** методы теории разностных схем.

В диссертации получены следующие **научные результаты**.

1. Для одномерных линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка разработаны компактные разностные схемы; доказаны устойчивость и сильная устойчивость решения разностных методов для линейных уравнений [1, 2, 3, 8, 9].

2. Доказаны априорные оценки устойчивости и сходимости решений компактных разностных схем в слабых и сильных сеточных нормах, аппроксимирующих многомерное линейное уравнение Клейна-Гордона [4, 5, 10, 11, 12].

3. Для одномерных и двумерных гиперболо-параболических уравнений с постоянными коэффициентами построены устойчивые компактные разностные схемы четвёртого порядка аппроксимации, доказана сходимост разностных схем для многомерных уравнений [6, 7, 13, 14, 15].

**Рекомендации по практическому использованию.** Полученные результаты могут быть использованы при построении и исследовании компактных разностных схем для различных типов гиперболических задач и математическом моделировании. Они могут быть полезными при чтении специальных курсов по теории разностных схем.

**Область применения:** Теория разностных схем

## SUMMARY

Hoang, Thi Kieu Anh

### **Difference schemes of high order accuracy for hyperbolic equations**

**Keywords:** compact difference scheme, a priori estimates, Klein-Gordon equation, hyperbolic-parabolic equation, stability, convergence

**The purpose of the work** is the construction and study of compact difference schemes for the second-order hyperbolic and hyperbolic-parabolic equations

**The methods of investigation:** methods of the theory of difference schemes.

The following **scientific results** were obtained in the dissertation:

1. Compact difference schemes are developed for one-dimensional linear and quasi-linear second-order hyperbolic equations; the stability and strong stability of the difference schemes for linear equations are proved [1, 2, 3, 8, 9].

2. A priori estimates for the stability and convergence of the difference solutions of compact difference schemes, approximating multidimensional linear Klein-Gordon equation, are proved in weak and strong grid norms [4, 5, 10, 11, 12].

3. For one-dimensional and two-dimensional hyperbolic-parabolic equations with constant coefficients, the stable compact fourth order difference schemes are constructed, the convergence of difference schemes for multidimensional equations is proved [6, 7, 13, 14, 15].

**Recommendations on the practical application of the results.** The obtained results can be used to construct and study the compact difference schemes for various types of hyperbolic problems and mathematical modeling. They can be useful when reading special courses on the theory of difference schemes.

**Application field:** Theory of difference schemes

