ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Адмираловой Александры Николаевны

«Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением»,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки.

В диссертационной работе исследуются многообразия n-мерных представлений и многообразия n-мерных характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением. Диссертация относится к современному направлению алгебры – геометрической теории представлений конечно порожденных групп. Содержание диссертации А.Н. Адмираловой «Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением» полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации.

В пионерской работе М. Кулера, П. Шалена (Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109–147.) показано, что множество всех гомоморфизмов $Hom(G, SL_2(\mathbb{C}))$ конечно порожденной группы $G = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ в группу $SL_2(\mathbb{C})$ можно естественно отождествить с некоторым алгебраическим многообразием $R(G, SL_2(\mathbb{C})) \subset SL\ (\mathbb{C})^k$, которое называют многообразием представлений группы G в $SL_2(\mathbb{C})$. Группа $GL_2(\mathbb{C})$ действует на $R(G, SL_2(\mathbb{C}))$ сопряжением и кольцо инвариантных функций $\mathbb{C}[R(G, SL\ \mathbb{C}))]^{GL_2(\mathbb{C})}$ является конечно порожденным. Это позволяет построить категорный фактор $X(G, SL_2(\mathbb{C})) = R(G, SL\ (\mathbb{C})) / /GL\ (\mathbb{C})$, точки которого соответствуют замкнутым $GL_2(\mathbb{C})$-орбитам, т.е. вполне приводимым представлениям группы G. Поэтому $X(G, SL_2(\mathbb{C}))$ называют многообразием характеров представлений группы G в $SL_2(\mathbb{C})$. М. Кулер, П. Шален в качестве группы G рассматривали фундаментальную группу $\pi(M)$ некоторого 3-мерного топологического многообразия. Изучение свойств многообразия характеров $X(G, SL_2(\mathbb{C}))$

позволило получить много информации о строении многообразия M и найти новые инварианты таких многообразий. Такой подход оказался весьма плодотворным и используется в исследованиях по трехмерной топологии и теории узлов во многих десятках работ различных авторов до настоящего времени (M. Acosta, S. Lawton, G. Bellamy, T. Schedler, E. Falbel, F. Guilloux, P.-V. Koseleff,, F. Rouillier, M. Thistlethwaite, H. Chen, C. Florentino, A. Gonzáles-Prieto, A.S. Sikora, S. Liriano, S. Majewicz и многие другие). При этом в настоящее время используются многообразия представлений и характеров не только в $SL_2(\mathbb{C})$, а и в $SL_k(\mathbb{C})$, $k > 2$, а также в некоторые другие алгебраические группы, например, $SU(2)$ и $Sp(4,\mathbb{R})$.

В монографии А. Любоцкого и Э. Магида 1985 г. были заложены основы современной геометрической теории представлений конечно порожденных групп. В ней изучались общие свойства многообразий n-мерных представлений $R_n(G) = R(G, GL_n(K))$ и соотвествующих многобразий характеров $X_n(G) = X(G, GL_n(K))$, где K – произвольное алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

К настоящему времени в ряде работ получено описание многообразий представлений и характеров для некоторых классов групп. В работах В.В. Беняш-Кривца, А.С. Рапинчука, В.И. Черноусова получено полное описание многообразий представлений и характеров фундаментальных групп компактных поверхностей, в работах В.В. Беняш-Кривца, И.О. Говорушко – многообразий представлений и характеров групп Баумслага-Солитера.

Многообразия представлений и характеров нильпотентных групп описаны в монографии А. Любоцкого и Э. Магида, разрешимых групп – в работе З. Рудника.

В недавнее время появились работы, в которых многообразия характеров находят применение в топологии квантовых вычислений (M. Planat, M.M. Amaral, F. Fang, D. Chester, R. Aschheim, K. Irwin. Character Varieties and Algebraic Surfaces for the Topology of Quantum Computing. 2022. Symmetry, 14(5):915).

В диссертации А.Н. Адмираловой получено описание многообразий n-мерных представлений и характеров для новых классов конечно порожденных групп, что является важным вкладом в геометрическую теорию представлений конечно порожденных групп.

Таким образом, все сказанное свидетельствует об актуальности исследований, выполненных в диссертации.

Степень новизны результатов и научных положений выносимых на защиту.

Все результаты, полученные в диссертации, и научные положения, выносимые на защиту, являются новыми.

Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава носит вспомогательный характер. Она содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации, а также в ней сформулированы известные результаты, необходимые для доказательства результатов диссертационной работы. Основное содержание диссертации представлено в главах 2-4.

В главе 2 рассматриваются многообразия представлений и характеров свободных произведений циклических групп с соотношением коммутаторного типа. Эти группы имеют копредставление

$$G(p,q)=\left\langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g,y_1,\ldots,y_g,t \,\middle|\, a_1^{m_1}=\ldots=a_s^{m_s}=1, tU^pt^{-1}=U^q\right\rangle,$$

где $U=[x_1,y_1]\ldots[x_g,y_g]W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)$. Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений $R_n(G(p,q))$, вычислена их размерность и доказана их рациональность.

В главе 3 рассматриваются многообразия представлений и характеров свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа. Рассмотрены 2 класса групп:

$$G=\left\langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g \,\middle|\, a_1^{m_1}=\ldots=a_s^{m_s}=x_1^2\ldots x_g^2W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)=1\right\rangle,$$

и

$$H(p,q)=\left\langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g,t \,\middle|\, a_1^{m_1}=\ldots=a_s^{m_s}=1, tV^pt^{-1}=V^q\right\rangle,$$

где $V=x_1^2\ldots x_g^2W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)$. Для этих классов групп также найдены неприводимые компоненты многообразий представлений, вычислена их размерность и доказана их рациональность.

Заключительная 4 глава посвящена исследованию следующего вопроса. Пусть $H=\langle h_1,\ldots,h_n\rangle$ – конечно порожденная подгруппа в $GL_n(\mathbb{C})$ и предположим, что все примитивные слова $w(h_1,\ldots,h_n)$ имеют конечный порядок k (слово w в свободной группе F_n называется примитивным, если оно входит в какой либо базис F_n). Верно ли, что группа H конечна? В диссертации построены примеры 2-порожденных бесконечных подгрупп в $GL_3(\mathbb{C})$ и $GL_6(\mathbb{C})$, в которых все примитивные слова от образующих сопряжены между собой и имеют произвольный заданный порядок $n\geq 4$. Для построения таких групп автор диссертации использовала линейные представления групп кос B_4, а также связь между этими представлениями и представлениями группы автоморфизмов $Aut(F_2)$ свободной группы ранга два.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми, достоверными и научно обоснованными. Обоснованность результатов диссертации подтверждается представленными в работе строгими рассуждениями и исчерпывающими доказательствами, изучением существующих результатов, сопоставлением и согласованностью полученных результатов с результатами других авторов. Достоверность результатов опирается на корректное применение существующих и вновь разработанных методов геометрической теории представлений конечно порожденных групп, и подтверждается их апробацией на международных и республиканских научных конференциях, а также публикацией в известных научных журналах по профилю диссертации.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию.

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Полученные в ней результаты вносят значительный вклад в развитие геометрической теории представлений конечно порожденных групп. Эти результаты и развитые при их доказательстве методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях многообразий представлений и характеров новых классов конечно порожденных групп.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати.

Научные результаты диссертации изложены в 16 научных работах, в том числе 6 статей в научных рецензируемых журналах (4 из которых опубликованы в журналах, входящих в базу данных Scopus, 2 статьи опубликованы за рубежом), 2 статьи в материалах международных научных конференций (2 – за рубежом), 8 тезисов докладов на международных научных конференциях (7– за рубежом).

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК.

Оформление диссертационной работы и автореферата соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, утвержденным ВАК Беларуси. Диссертация состоит из всех рекомендуемых ВАКом структурных частей: перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации – 100 страниц, из них 6 страниц занимает список использованных источников, который содержит 72 наименования, из которых 16 – работы автора. Автореферат полно и объективно отражает содержание диссертации и основных положений, выносимых на защиту.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени.

Научный уровень результатов, полученных в диссертационной работе Александры Николаевны Адмираловой, свидетельствует, что научная квалификация ее автора полностью соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Замечания.

Следует отметить, что текст диссертации тщательно вычитан автором и практически не содержит опечаток. Отметим только следующие замечания.

1) В пункте 2 теоремы 3.3.2 три раза используется оборот «Если $n=2,\ g=3$». Достаточно один раз написать «Пусть $n=2,\ g=3$.»

2) В этом же пункте следовало бы более четко писать, что заключительная фраза «Размерности неприводимых компонент $R_n(\Gamma)$ описываются формулой (3.3.1)» относится и к пункту 1 этой теоремы.

Эти замечания носят стилистический характер и не влияют на общую положительную оценку работы.

Заключение.

Диссертация А.Н. Адмираловой «Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением» является завершенной квалификационной научной работой. Ее содержание соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Считаю, что Александра Николаевна Адмиралова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за следующие новые научные результаты:

- описание многообразий n-мерных представлений и соответствующих многообразий характеров для свободных произведений циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа;
- описание многообразий n-мерных представлений для свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа;

- описание многообразий n-мерных представлений группы Баумслага-Солитера $BS(1,-1)$;

- доказательство существования конечно порожденных линейных групп бесконечного порядка, в которых все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой
заведующий кафедрой прикладной
математики и информатики
УО «Брестский государственный
университет имени А.С. Пушкина» ________________ Д.В. Грицук

АДДЗЕЛ КАДРАЎ

Подпіс ... завяраю
Нач. АК БрДУ ...