ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
Адмираловой Александры Николаевны
«Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки

Диссертация относится к активно развивающемуся современному направлению алгебры – геометрической теории представлений конечно порожденных групп. В диссертации исследуются многообразия представлений и характеров некоторых классов конечно порожденных групп. Содержание диссертации А.Н. Адмираловой полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации

Истоки теории можно отнести еще к работам А. Пуанкаре, который исследовал группы монодромии линейных однородных дифференциальных уравнений и в связи с этим поставил вопрос о классификации n-мерных представлений свободной группы ранга d с точностью до эквивалентности. Позднее это направление исследований привело к классическим работам по теории инвариантов, в которых описаны базисы полиномиальных инвариантных функций на d-наборах матриц порядка n (например, работа К. Прочези 1974 г.). Другой источник современной теории – это серия работ А. Вейля, в которых он рассматривал произвольную группу Ли G и ее дискретную кокомпактную подгруппу H. В этом случае множество $R(H,G)$ всех гомоморфизмов из H в G является аналитическим многообразием. А. Вейль доказал, что подмножество $R^0(H,G)$ всех точных представлений с дискретным и кокомпактным образом в G является открытым в $R(H,G)$. Основы геометрической теории представлений конечно порожденных групп содержатся в монографии А. Любоцкого и Э. Магида (Lubotzky A., Magid A.R. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, N 336. P. 1-116.). Исследование геометрической структуры многообразий n-мерных представлений $R_n(G)$ и соответствующих многообразий характеров $X_n(G)$ во многих случаях позволяет получить важную информацию о комбинаторных свойствах исходной группы G. Например, в работах Г. Баумслага и П. Шалена такой геометрический подход используется для доказательства бесконечности одного класса конечно порожденных групп. Многообразия представлений в $SL_2(\mathbb{C})$ и соответствующие многообразия характеров играют роль важного инструмента при доказательстве альтернативы Титса для обобщенных треугольных и обобщенных тетраэдральных групп (работы Дж. Хови, Г. Розенбергера и многих других авторов).

В работе М. Кулера, П. Шалена (Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109-147.)

заложены основы применения многообразия характеров $X(\pi(M), SL_2(\mathbb{C}))$ фундаментальной группы $\pi(M)$ трехмерного многообразия M в $SL_2(\mathbb{C})$ для исследования топологических свойств этого многообразия. С тех пор эта техника активно используется в трехмерной топологии и теории узлов. К настоящему времени имеется обширная литература по этому направлению. Только за 2023-2024 гг. можно найти более десяти статей по этой тематике (C. Florentino, S. Lawton, H. Chen, A. Gonzalez-Prieto, J. Martinez, V. Munoz и др.).

В работах В.В. Беняш-Кривца, А.С. Рапинчука, В.И. Черноусова получено полное описание многообразий представлений и характеров фундаментальных групп поверхностей, в работах В.В. Беняш-Кривца, И.О. Говорушко – многообразий представлений и характеров групп Баумслага-Солитера. Исследования в этой области активно продолжаются и в настоящее время. В последние годы в этом направлении появилось большое количество работ зарубежных математиков (A.S. Sikora, S. Lawton, M.T. Lozano, M. Kapovich, D. Long, J.J. Millson, W. Goldman, A. Lubotzky и многие другие).

В настоящее время многообразия характеров стали находить применение в топологии квантовых вычислений (Planat M., Amaral M.M., Fang F., Chester D., Aschheim R., Irwin K. Character Varieties and Algebraic Surfaces for the Topology of Quantum Computing. 2022. Symmetry, 14(5):915).

Таким образом, рассматриваемые в диссертации задачи, связанные с описанием многообразий представлений и характеров новых классов конечно порожденных групп, лежат в русле современных исследований и являются весьма актуальными.

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Все результаты, полученные в диссертации, и научные положения, выносимые на защиту, являются новыми. В диссертации получено описание многообразий n-мерных представлений для свободных произведений циклических групп с одним соотношением коммутаторного и квадратичного типа, а также группы Баумслага-Солитера $BS(1,-1)$ – найдены неприводимые компоненты многообразий представлений, вычислены их размерности, доказана их рациональность; доказано существование конечно порожденных линейных групп бесконечного порядка, в которых все примитивные слова от образующих имеют один и тот же конечный порядок $n, n \geq 4$.

Диссертация состоит из всех рекомендуемых ВАК Республики Беларусь структурных частей: перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава носит вспомогательный характер. Она содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации, а также основные используемые в дальнейшем сведения из алгебраической геометрии, теории представлений, многообразий представлений и многообразий характеров конечно порожденных групп.

В главе 2 рассматриваются многообразия представлений и характеров групп, которые автор назвала группами с соотношением коммутаторного типа. В разделе 2.2 доказан важный для дальнейшего вспомогательный результат. Результат В.В. Беняш-Кривца, А.С. Рапинчука, В.И. Черноусова о неприводимости и рациональности многообразий представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых поверхностей перенесен на коммутаторные многообразия

$$L_g(A)=\{(x_1,y_1,\dots,x_g,y_g)\in GL_n(K)^{2g} \mid [x_1,y_1]\cdots[x_g,y_g]=A\}.$$

Далее исследуются многообразия представлений и характеров следующего класса групп:

$$G(p,q)=\left\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g,y_1,\dots,y_g,t \mid a_1^{m_1}=\dots=a_s^{m_s}=1, tU^pt^{-1}=U^q\right\rangle,$$

где $m_i\geq 2$ для $i=\overline{1,s}$, $p>|q|\geq 1$, $U=[x_1,y_1]\cdots[x_g,y_g]W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$.

Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений, вычислена их размерность и доказана их рациональность. Кроме того, отдельно рассмотрены группы $G(p,q)$ в случае, когда $s=k=0$.

В главе 3 рассматриваются многообразия представлений и характеров свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа.

В параграфе 3.2 результат В.В. Беняш-Кривца и В.И. Черноусова о строении многообразий представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей перенесен на многообразия вида

$$V_g(A)=\{(x_1,\dots,x_g)\in GL_n(K)^g \mid y_1^2\cdots y_g^2=A\}.$$

Далее рассмотрены два класса групп, один из которых имеет копредставление

$$G=\left\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g, \mid a_1^{m_1}=\dots=a_s^{m_s}=x_1^2\cdots x_g^2W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)=1\right\rangle,$$

а второй –

$$H(p,q)=\left\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g,t \mid a_1^{m_1}=\dots=a_s^{m_s}=1, tU^pt^{-1}=U^q\right\rangle,$$

где $g\geq 3, m_i\geq 2$ для $i=\overline{1,s}$, $U=x_1^2\cdots x_g^2W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$, p и q – целые числа, удовлетворяющие неравенству $p>|q|\geq 1$.

Для этих классов групп также найдены неприводимые компоненты многообразий представлений, вычислена их размерность и доказана их рациональность. Отметим, что все выбранные для исследования классы конечно порожденных групп получены с помощью конструкции свободного произведения циклических групп. Поэтому интуитивно они воспринимаются как естественный и понятный объект для исследования. Эти соображения укрепляют нас в мысли, что обсуждаемые выше результаты являются важными и интересными.

Заключительная глава посвящена исследованию проблемы конечности конечно порожденных подгрупп в $GL_n(\mathbb{C})$, обладающих следующим свойством: все примитивные слова от образующих имеют фиксированный порядок $k>1$. Классический результат И. Шура (1911 г.) говорит, что если G – периодическая конечно порожденная подгруппа в $GL_n(\mathbb{C})$, то она конечна. Используя линейные представления групп кос B_4 и связанные с ними представления групп $Aut(F_2)$ автоморфизмов свободных групп ранга 2, автор диссертации построила примеры 2-порожденных бесконечных подгрупп в $GL_3(\mathbb{C})$ и $GL_6(\mathbb{C})$, в которых все примитивные слова от образующих сопряжены между собой и имеют произвольный заданный порядок $n\geq 4$. Эти примеры контрастируют с известными результатами о том, что Бернсайдовы группы $B(2,4)$, $B(2,6)$ конечны.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все выносимые на защиту результаты диссертации обоснованы и достоверны. Все утверждения диссертации, их доказательства, заключительные выводы и рекомендации сформулированы корректно, строго математически обоснованы, достоверны и имеют законченный характер. Все основные научные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых авторитетных научных журналах и докладывались на ряде международных научных конференций, в том числе на 7-м Европейском математическом конгрессе в Берлине (2016 г.) и Международном математическом конгрессе в Рио-де-Жанейро (2018 г.). Диссертация содержит все необходимые библиографические ссылки, имеющие отношение к ее теме или используемым в ней методам доказательств.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее научная значимость следует хотя бы из того факта, что в ней содержатся решения ряда задач, прямо связанных и нетривиально развивающих результаты специалистов высокого международного уровня. Результаты диссертации, а также методы, разработанные для их доказательства, могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрической теории представлений конечно порожденных групп и их приложений, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России и других стран ближнего и дальнего зарубежья.

Практическая значимость результатов состоит в возможности их использования в алгебраической топологии, в частности, в топологии квантовых вычислений, а также, в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Основные положения и результаты диссертации в полном объеме опубликованы в 16 научных работах, в том числе: 6 – статьи в научных рецензируемых журналах в соответствии с п.19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (4 из которых входят в наукометрическую базу данных Scopus, 2 – за рубежом), 2 – статьи в материалах международных научно-практических конференций (2 – за рубежом), 8 – тезисы докладов (7– за рубежом).

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с требованиями ВАК. Автореферат полно и объективно отражает содержание диссертации и основных положений, выносимых на защиту.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени

Анализ содержания диссертации и уровень полученных результатов и опубликованных работ показывают, что научная квалификация Александры Николаевны Адмираловой полностью соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Замечания

Диссертация оформлена аккуратно в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь, написана ясным языком. Имеются некоторые замечания и пожелания: в разделе 1.3 не лишне было бы привести определение регулярного элемента, которое неоднократно используется при доказательстве ряда результатов в главах 2 и 3; на с. 6 в 8-ой строке снизу и с. 25 в 8-ой строке сверху вместо «$=([x_1, y_1],...,[x_g, y_g])^q$», а также на с. 25 в 12-ой строке сверху и с. 45 в 12-ой строке сверху вместо «$=([x_1, y_1]...,[x_g, y_g])^q$» нужно «$=([x_1, y_1]\cdots[x_g, y_g])^q$»; на с. 12 в 18-ой строке снизу вместо «$C_\tau(\rho)=\{\lambda\otimes\rho\,|$» нужно «$C_\tau(\rho_i)=\{\lambda\otimes\rho_i\,|$»; имеются некоторые опечатки орфографического и синтаксического характера. Замеченные недочеты немногочисленны, имеют технический характер и не снижают общего весьма благоприятного впечатления о диссертации.

Заключение

Диссертационная работа А.Н. Адмираловой «Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением» представляет собой завершенную квалификационную научную работу. Ее содержание соответствует требованиям ВАК Республики Беларусь, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по заявленной специальности.

Считаю, что Александра Николаевна Адмиралова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за следующие новые научные результаты:

- описание неприводимых компонент (количество, размерность, рациональность) многообразий n-мерных представлений и соответствующих многообразий характеров для свободных произведений циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа;
- описание неприводимых компонент (количество, размерность, рациональность) многообразий n-мерных представлений для свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа;
- доказательство существования конечно порожденных линейных групп бесконечного порядка, в которых все примитивные слова от образующих имеют один и тот же конечный порядок.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
алгебры и геометрии
УО «Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины» А.Ф. Васильев

18 ноября 2024

Подпіс А. Ф. Васильева
ЗАВЯРАЮ
Начальнік аддзела кадраў установы
адукацыі «Гомельскі дзяржаўны
універсітэт імя Францыска Скарыны»
Ю. Т. Бабицева
18.11.2024