ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Объект авторского права
УДК 512.543+512.547

АДМИРАЛОВА
Александра Николаевна

МНОГООБРАЗИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ХАРАКТЕРОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Минск, 2024

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель:	**Беняш-Кривец Валерий Вацлавович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета.
Официальные оппоненты:	**Васильев Александр Федорович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»;
	Грицук Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».
Оппонирующая организация:	**УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»**.

Защита состоится 29 ноября 2024 года в 15.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11, конференц-зал; тел. ученого секретаря: (+375 17) 379 17 84, e-mail: tbusel@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан 25 октября 2024 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д 01.02.01
кандидат физико-математических наук Т.С. Бусел

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию многообразий представлений и характеров конечно порожденных групп, а также применению линейных представлений групп в исследовании конечности порядка конечно порожденных групп.

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа, $H \subset \mathrm{G}L_n(K)$ — связная линейная алгебраическая группа над полем K, которое всюду далее предполагается алгебраически замкнутым и имеющим нулевую характеристику. Всякое линейное представление $\rho : G \to H$ однозначно определяется набором элементов

$$(\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)) \in H^m = H \times \cdots \times H,$$

которые удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G. Следовательно, соответствие $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ задает биекцию между множеством гомоморфизмов из G в H и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R(G,H) \subset H^m$. Это многообразие определяется группами G и H однозначно с точностью до бирегулярного изоморфизма и называется многообразием представлений группы G в алгебраическую группу H. В случае $H = \mathrm{G}L_n(K)$ многообразие $R(G, \mathrm{G}L_n(K))$ для краткости будем обозначать через $R_n(G)$ и называть многообразием n-мерных представлений группы G.

Группа H действует на многообразии $R(G,H)$ одновременным сопряжением компонент, при этом орбиты ее элементов находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений группы G. В общем случае орбиты не обязательно замкнуты, так что фактормногообразие орбит не является алгебраическим многообразием. Однако если группа H линейно-редуктивна, то K-алгебра H-инвариантных регулярных функций конечно порождена, и этой K-алгебре можно поставить в соответствие категорный фактор $R(G,H)//H$, обозначаемый $X(G,H)$ и называемый многообразием характеров представлений G в H. Точки этого многообразия параметризуют замкнутые H-орбиты. При $H = \mathrm{G}L_n(K)$ орбита представления замкнута тогда и только тогда, когда это представление вполне приводимо. И поскольку два вполне приводимых представления $\rho, \rho_1 \in R_n(G)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их характеры $\chi_\rho = \chi_{\rho_1}$, точки многообразия $X_n(G) = X(G, \mathrm{G}L_n(K))$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с характерами вполне приводимых представлений группы G в $\mathrm{G}L_n(K)$.

Для конечных групп G описание многообразий представлений $R_n(G)$ и характеров $X_n(G)$ дается классической теорией представлений: каждое представление является вполне приводимым, и с точностью до эквивалентности существует лишь конечное число неприводимых представлений, каждое из которых однозначно определяется своим характером. Поэтому каждая неприводимая компонента $R_n(G)$ является орбитой некоторого вполне приводимого представления группы G, и эти компоненты не пересекаются между собой.

В общем случае структура многообразий $R(G,H)$, $X(G,H)$ к настоящему моменту изучена только для некоторых классов групп. Для бесконечных нильпотентных групп большая часть известных результатов собрана А. Любоцким и Э. Магидом[1]. Ими были описаны многообразия характеров для бесконечных нильпотентных групп G. Впоследствии З. Рудник[2] обобщил эти результаты на разрешимые группы.

Для топологии предметом особого интереса является описание многообразий представлений и характеров фундаментальных групп многообразий, поскольку они представляют собой топологические инварианты многообразия. В частности, достаточно широко изучены многообразия представлений и характеров для фундаментальных групп Δ_g компактных ориентируемых поверхностей рода g, т. е. для групп, имеющих копредставление вида

$$\Delta_g = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g] = 1 \rangle.$$

В У. Голдман[3] нашел количество связных компонент $R(\Delta_g, H)$, где H — полупростая группа Ли, локально изоморфная $\mathrm{PS}L_2(\mathbb{C})$ либо $\mathrm{PS}L_2(\mathbb{R})$. К. Симпсон[4] установил, что $R_n(\Delta_g)$ является связным в комплексной топологии многообразием. В.В. Беняш-Кривец, А.С. Рапинчук и В.И. Черноусов доказали[5,6], что для всех n и всех g многообразие представлений $R_n(\Delta_g)$ является неприводимым $\mathbb{Q}$-рациональным многообразием, размерность которого равна $(2g-1)n^2+1$ при $g>1$ и n^2+n при $g=1$. Ими была установлена неприводимость $R(\Delta_g, \mathrm{S}L_n(K))$ и доказано свойство $\mathbb{Q}$-рациональности для $R_n(\Delta_g)$ и $\mathbb{Q}$-унирациональности для $R(\Delta_g, \mathrm{S}L_n(K))$.

В работах В.В. Беняш-Кривца и В.И. Черноусова детально изучены многообразия представлений и характеров фундаментальных групп Γ_g компактных неориентируемых поверхностей рода g, т. е. групп с копредставлением

$$\Gamma_g = \langle x_1, \ldots, x_g \mid x_1^2 \ldots x_g^2 = 1 \rangle.$$

Ими были описаны[7,8] многообразия представлений и характеров для фунда-

---

[1] Lubotzky, A. Varieties of representations of finitely generated groups / A. Lubotzky, A.R. Magid // Memoirs AMS. — 1985. — Vol. 58. — P. 1–116.

[2] Rudnick, Z. Representation varieties of solvable groups / Z. Rudnick // J. Pure and Applied Algebra. — 1987. — Vol. 45. — P. 261–272.

[3] Goldman, W. M. Topological components of spaces of representations / W. M. Goldman // Invent. Math. — 1988. — Vol. 93. — P. 557–607.

[4] Simpson, C.T. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety, II / C.T. Simpson // Publ. Math. I. H. E. S. — 1994. — Vol. 80. — P. 5–79.

[5] Беняш-Кривец, В.В. Геометрическая теория представлений для фундаментальных групп компактных ориентируемых поверхностей / В.В. Беняш-Кривец, А.С. Рапинчук // Докл. АН СССР. — 1993. — Т. 329, № 1. — С. 140–143.

[6] Benyash-Krivetz, V.V. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces / V.V. Benyash-Krivetz, A.S. Rapinchuk, V.I. Chernousov // Israel Journal of Mathematics. — 1996. — Vol. 93. — P. 29–71.

[7] Беняш-Кривец, В.В. О многообразиях представлений фундаментальной группы бутылки Клейна / В.В. Беняш-Кривец, В.И. Черноусов // Докл. АНБ. — 1996. — Т. 40, № 2. — С. 9–13.

[8] Беняш-Кривец, В.В. О многообразиях характеров фундаментальной группы бутылки Клейна / В.В. Беняш-Кривец // VII Белорусская мат. конференция: Тез. докл. — Минск, 1996. — Часть 1. — С. 90–91.

ментальной группы бутылки Клейна (компактной неориентируемой поверхности рода 2). Для фундаментальных групп Γ_g компактных неориентируемых поверхностей рода $g \geq 3$ было доказано[9,10], что при $(n,g) \neq (2,3)$ многообразие $R_n(\Gamma_g)$ состоит из двух $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент размерности $(g-1)n^2$, а в случае $(n,g) = (2,3)$ многообразие $R_2(\Gamma_3)$ состоит из трех $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент. Кроме того, было установлено, что при $g \geq 3$ многообразие $R(\Gamma_g, \mathrm{S}L_n(K))$ является неприводимым унирациональным многообразием размерности $(g-1)(n^2-1)$.

К. Флорентино и Ш. Лоутон[11] определили необходимые и достаточные условия неприводимости многообразия характеров $X(G,H)$ конечно порожденной абелевой группы G для связных и полупростых групп H. Ими также были найдены аналогичные условия для неприводимости $X(G,H)$ в случае, если G — свободная абелева группа, а H — связная редуктивная группа.

В.В. Беняш-Кривец[12] описал многообразия представлений неевклидовых кристаллографических групп рода $g \geq 3$, т. е. групп вида:

$$\Gamma_g = \left\langle x_1, \ldots x_s, y_1, \ldots, y_g \mid x_1^{m_1} = \ldots = x_s^{m_s} = x_1 \ldots x_s y_1^2 \ldots y_g^2 = 1 \right\rangle,$$

где $m_i \geq 2$ для $i = \overline{1,s}$. Им также были найдены[13] все неприводимые компоненты многообразий представлений фуксовых групп

$$\Gamma = \langle (x_1, \ldots x_s, y_1, \ldots, y_g, z_1, \ldots, z_g) \mid$$
$$x_1^{m_1} = \ldots = x_s^{m_s} = [y_1, z_1] \ldots [y_g, z_g] x_1 \ldots x_s = 1 \rangle$$

и их обобщений вида

$$\Gamma = \langle (x_1, \ldots x_s, t_1, \ldots, t_k, y_1, \ldots, y_g, z_1, \ldots, z_g) \mid$$
$$x_1^{m_1} = \ldots = x_s^{m_s} = W(x_1, \ldots, x_s, t_1, \ldots, t_k)[y_1, z_1] \ldots [y_g, z_g] = 1 \rangle,$$

где $m_i = 0$ или $m_i \geq 2$ для $i = \overline{1,s}$. Кроме того, были изучены[14] многообразия представлений группы $\mathrm{S}L_2(\mathbb{Z})$: найдены неприводимые компоненты $R_n(\mathrm{S}L_2(\mathbb{Z}))$, получены формулы для вычисления их размерности и количества, а также доказано, что каждая их них является гладким рациональным многообразием.

С. Лириано[15] исследовал многообразия представлений $R(G, SL_2(\mathbb{C}))$ групп с одним соотношением

[9] Беняш-Кривец, В.В. О многообразиях представлений фундаментальных групп поверхностей / В.В. Беняш-Кривец, В.И. Черноусов // Докл. РАН. — 1997. — Т. 355, № 4. — С. 439–442.

[10] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей / В.В. Беняш-Кривец, В.И. Черноусов // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188, № 7. — С. 47–92.

[11] Florentino, C. Topology of character varieties of Abelian groups / C. Florentino, S. Lawton // Topology and its Applications. — 2014. — Vol. 173. — P. 32–58.

[12] Многообразия представлений неевклидовых кристаллографических групп / В.В. Беняш-Кривец // Докл. НАНБ. — 2000. — Т. 44, № 4. — С. 37–40.

[13] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений F-групп и их обобщений / В.В. Беняш-Кривец // Докл. НАНБ. — 2001. — Т. 45, № 1. — С. 9–12.

[14] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений группы $SL_2(\mathbb{Z})$ / В.В. Беняш-Кривец // Весцi НАНБ. — 2001. — № 1. — С. 8–11.

[15] Liriano, S. Algebraic geometric invariants for a class of one-relator groups / S. Liriano // J. Pure Appl. Algebra. — 1998. — Vol. 132, No. 1. — P. 105–118.

$$G = \langle x_1, \ldots, x_n, y \mid W(x_1, \ldots, x_n) = y^k \rangle,$$
где $k \geq 2$, а слово $W(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит F_n, свободной группе ранга n с образующими $x_1, \ldots, x_n$. Для таких многообразий представлений были приведены достаточные условия приводимости. Выведена[16] формула, определяющая число четырехмерных неприводимых компонент $R(G, SL_2(\mathbb{C}))$ для групп G с копредставлением $\langle x, y \mid x^p = y^t \rangle$, где p, t — натуральные числа.

Известен ряд результатов для многообразий представлений и характеров групп Баумслага – Солитера
$$\mathrm{BS}(p,q) = \langle a, b \mid ba^p b^{-1} = a^q \rangle.$$

В.В. Беняш-Кривец и И.О. Говорушко[17] рассмотрели многообразия представлений подгрупп конечного индекса в $\mathrm{BS}(p,q)$, а также получили[18,19] описание многообразий представлений $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ для показателей, удовлетворяющих условию $p > |q| > 1$. Однако в общем случае, т. е. для произвольных $p, q \in \mathbb{Z}$, многообразия представлений групп Баумслага – Солитера еще не изучены, и в качестве дальнейшего шага к получению их полного описания в диссертации рассматриваются многообразия представлений группы $R_n(\mathrm{BS}(1,-1))$.

Таким образом, многообразиям представлений и характеров конечно порожденных групп посвящено немало исследований, что свидетельствует об актуальности тематики диссертационной работы. В диссертации эти исследования находят продолжение, и полученные результаты позволяют описать структуру многообразий представлений для нескольких классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением.

Первый из рассматриваемых в диссертации классов групп имеет следующее копредставление:
$$G = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t | t([x_1,y_1]\ldots[x_g,y_g])^p t^{-1} = ([x_1,y_1], \ldots, [x_g,y_g])^q \rangle,$$
где $g \geq 2$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, p и q — взаимно просты. Многообразия представлений также исследованы и для более широкого класса групп:
$$G(p,q) = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g, y_1, \ldots, y_g, t \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q \rangle,$$
где $g \geq 2, m_i \geq 2$ для $i = \overline{1,s}$, p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенству $p > |q| \geq 1$, $U = [x_1,y_1]\ldots[x_g,y_g]W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ для некоторого слова $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ в свободном произведении циклических групп $\langle a_1 \mid a_1^{m_1} \rangle *$

[16] Liriano, S. Irreducible components in an algebraic variety of representations of a class of one-relator groups / S. Liriano // Internat. J. Algebra Comput. — 1999. — Vol. 9, No. 1. — P. 129–133.

[17] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений подгрупп конечного индекса групп Баумслага – Солитера / В.В. Беняш-Кривец, И.О. Говорушко // Труды Института математики. — 2015. — Т. 23, № 2. — С. 24–28.

[18] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага – Солитера / В.В. Беняш-Кривец, И.О. Говорушко // Алгебра, геометрия и теория чисел. Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова. Труды МИАН. — 2016. — Т. 292. — С. 26–42.

[19] Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений групп Баумслага – Солитера в случае не взаимно простых показателей / В.В. Беняш-Кривец, И.О. Говорушко // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2016. — № 1. — С. 52–56.

$*\ldots*\langle a_s \mid a_s^{m_s}\rangle * \langle b_1\rangle * \ldots * \langle b_k\rangle$. Для краткости и удобства изложения будем называть G и $G(p,q)$ группами с соотношением коммутаторного типа.

Вместе с тем в диссертационной работе изучены многообразия представлений групп, имеющих копредставление следующего вида:

$$\Gamma = \langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\, x_1^2\ldots x_g^2 W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k) = 1\rangle,$$

а также

$$H(p,q) = \langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g,t \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^pt^{-1} = U^q\rangle,$$

где $g \geq 3$, $m_i \geq 2$ для $i = \overline{1,s}$, p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенству $p > |q| \geq 1$, $U = x_1^2\ldots x_g^2 W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)$. Группы Γ и $H(p,q)$ будем называть группами с соотношением квадратичного типа.

Кроме того, в диссертации исследованы многообразия представлений $R_n(\mathrm{BS}(1,-1))$ группы Баумслага – Солитера

$$\mathrm{BS}(1,-1) = \langle a,b \mid aba^{-1} = b^{-1}\rangle.$$

Для всех рассматриваемых многообразий представлений найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность.

Линейным представлениям групп в диссертации также уделяется внимание в рамках их применения в изучении вопроса конечности порядка конечно порожденных групп. Используемый подход служит для решения следующей задачи:

Пусть $G = \langle g_1,g_2,\ldots,g_r\rangle$ — конечно порожденная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Предположим, что в подгруппе $G = \langle g_1,g_2,\ldots,g_r\rangle$ из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ для любого примитивного слова $w(g_1,g_2,\ldots,g_r)$ для некоторого фиксированного натурального k справедливо равенство $w(g_1,g_2,\ldots,g_r)^k = 1$. Является ли конечной такая группа?

Этот вопрос можно рассматривать как естественную модификацию задачи У. Бернсайда[20] о периодических группах фиксированного периода:

Пусть $x_1,x_2,...,x_r$ — конечный набор независимых элементов, порождающих группу G, в которой для любого элемента $g \in G$ выполнено соотношение $g^n = 1$, где n — заданное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, каков ее порядок?

Впоследствии группы $B(r,n) = \langle a_1,\ldots,a_m \mid x^n = 1\rangle$, рассматриваемые в задаче Бернсайда, стали называть свободными группами Бернсайда ранга r и экспоненты n. И. Шур[21] доказал, что всякая конечно порожденная периодиче-

[20]Burnside, W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups / W. Burnside // Quart. J. Pure Appl. Math. — Vol. 33 — 1902. — P. 230–238.

[21]Schur, I. Über Gruppen periodischer substitutionen / I. Schur // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — 1911. — P. 619–627.

ская подгруппа $GL_n(\mathbb{C})$ конечна. И.Н. Сановым[22] была установлена конечность $B(r,4)$ для любого натурального r, а М. Холл[23] получил положительный ответ на вопрос Бернсайда для группы $B(r,6)$. Отрицательный же ответ на основной вопрос Бернсайда получили П.С. Новиков и С.И. Адян[24]: было доказано существование бесконечных групп, при этом конечно порожденных и периодических, в случае ограниченных нечетных экспонент свыше 4381. Впоследствии[25] нижняя граница для нечетных n была улучшена до $n \geq 665$. С.В. Иванов[26] доказал, что $B(r,n)$ бесконечна для $r > 1$ и четных $n \geq 2^{48}$, $n \vdots 2^9$. Вопрос о конечности $B(2,5)$ до сих пор открыт и представляет интерес для исследований. Это подтверждает актуальность задачи о конечности порядка конечно порожденных групп, рассматриваемой в диссертации.

Если ослабить ограничение, установленное в задаче Бернсайда, и требовать конечности порядка только для всех примитивных элементов, то оказывается, что такая группа не обязана являться конечной уже для $r = 2$, $n \geq 4$: в частности, в диссертации доказывается, что в $GL_m(\mathbb{C})$ при $m \geq 3$ для любого натурального $k \geq 4$ существуют бесконечные подгруппы с двумя образующими g_1, g_2, такие, что все примитивные слова $w(g_1, g_2)$ имеют конечный порядок k.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена на кафедре высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция», задания «Алгебро-геометрические, топологические и комбинаторные методы в теории алгебр с делением, теории групп и теории квадратичных форм» (№ ГР 20161851, ГПНИ «Конвергенция–2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем» на 2016–2020 годы) и задания «Разработка алгебро-геометрических и представленческих методов исследования конечно порожденных групп, конечномерных алгебр и квадратичных форм» (№ ГР 20212390, ГПНИ «Конвергенция–2025», подпрограмма «Математические модели и методы» на 2021–2025 годы).

Исследования, в ходе которых получены некоторые результаты диссертации, поддерживались Фондом фундаментальных исследований Республики

[22] Санов, И.Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 / И.Н. Санов // Ученые записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. матем. — 1940. — № 55. — С. 166–170.

[23] Hall, M. Jr. Solution of the Burnside Problem for Exponent Six / M. Hall Jr. // Illinois J. of Math. — Vol. 2. — 1958. — P. 764–786.

[24] Новиков, П.С. О бесконечных периодических группах. II / П.С. Новиков, С.И. Адян // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1968. — Т. 32, № 2. — С. 251–524.

[25] Адян, С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах / С.И. Адян – М.: Наука, 1975. — 335 с.

[26] Ivanov, S.I. The free Burnside groups of sufficiently large exponents / S.I. Ivanov // International Journal of Algebra and Computation. — 1994. — Vol. 4, No. 1. — P. 1–308.

Беларусь, проект «Групповые кольца, классы групп и инварианты» (договор № Ф15РМ-025 от 4 мая 2015 года, № ГР 20151037).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Объектом диссертационного исследования являются линейные представления, а также многообразия представлений и характеров некоторых классов конечно порожденных групп. Предметом исследования служат свойства и структура рассматриваемых многообразий.

Основной целью диссертационной работы является описание структуры многообразий представлений и характеров некоторых классов конечно порожденных групп. Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:
– нахождение неприводимых компонент рассматриваемых многообразий;
– вычисление размерностей неприводимых компонент;
– исследование неприводимых компонент на рациональность.

Кроме того, к целям работы относится получение ответа на вопрос о конечности конечно порожденных групп, все примитивные элементы которых имеют конечный порядок. Задачами этого исследования являются построение линейных представлений группы автоморфизмов $Aut(F_2)$ на основании известных представлений группы кос B_4, а также нахождение порядка элементов полученных линейных групп.

Научная новизна

Все полученные результаты в диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Впервые получено описание многообразий n-мерных представлений для некоторых классов групп, являющихся свободным произведением циклических групп с одним соотношением. Также впервые получено описание многообразий n-мерных представлений группы Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,-1)$. Для всех рассматриваемых многообразий представлений найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, а также доказана рациональность. Кроме того, в диссертации исследованы конечно порожденные линейные группы, в которых все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок.

Положения, выносимые на защиту

1. Для класса групп, являющихся свободным произведением циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа, получено описание многообразий n-мерных представлений: найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность. ([2–A; 4–A; 8–A; 9–A; 13–A; 14–A; 15–A])

2. Получено описание многообразий n-мерных представлений свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа:

найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность. ([3–А; 5–А; 10–А; 11–А; 12–А; 14–А; 15–А])

3. Получено описание многообразий n-мерных представлений группы Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,-1)$. ([6–А; 16–А])

4. Доказано существование конечно порожденных линейных групп бесконечного порядка, в которых все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок. ([1–А; 7–А])

Все результаты являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя ученой степени

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Беняш-Кривца Валерия Вацлавовича. Научным руководителем поставлены задачи и предложена методика исследования многообразий представлений некоторых классов конечно порожденных групп. Для рассматриваемых многообразий представлений соискателем решены такие задачи, как нахождение неприводимых компонент, вычисление их размерностей, доказательство рациональности. Результаты проведенных исследований отражены в совместных статьях с научным руководителем ([2–А; 3–А; 4–А; 5–А]). Кроме того, соискателем самостоятельно построены примеры бесконечных линейных групп, в которых все примитивные элементы имеют конечный порядок и сопряжены между собой. Результаты опубликованы в совместной статье с научным руководителем ([1–А]).

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

– на 7-м Европейском математическом конгрессе (18–22 июля 2016 г., Берлин);

– на Международной научной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения В. М. Левчука (24–29 июля 2016 г., Красноярск);

– на XII Белорусской математической конференции (5–10 сентября 2016 г., Минск);

– на 11-й Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 75-летию В.В. Кириченко (3–7 июля 2017 г., Киев);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (23–25 мая 2018 г., Москва);

– на Международной конференции, посвященной 120-летию Эмиля Артина (27 мая – 2 июня 2018 г., Ереван);

– на XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Н.М. Коробова (28–31 мая 2018 г., Тула);

– на Всемирной встрече женщин-математиков (31 июля 2018 г., Рио-де-Жанейро);

– на 28-м Международном математическом конгрессе (1–9 августа 2018 г., Рио-де-Жанейро);

– на XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова (26–29 сентября 2023 г., Тула).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в научных рецензируемых журналах и в 10 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов — 5,2 авторского листа, в том числе: статьи в научных рецензируемых журналах журналах — 4,35 авторского листа, тезисы конференций — 0,85 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и списка использованных источников, включающего 56 наименований библиографического списка и 16 наименований публикаций соискателя. Объем диссертации — 100 страниц, из них 6 страниц занимает список использованных источников.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Валерию Вацлавовичу Беняш-Кривцу за внимание и помощь, оказанные при написании диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В главе 1 «Предварительные сведения» приводятся некоторые определения, теоремы и утвеждения, используемые в дальнейшем. Основное содержание диссертации представлено в главах 2 – 4. Каждая из них заканчивается подведением итогов в разделе «Выводы».

Основной задачей главы 2 является описание структуры многообразий n-мерных представлений свободных произведений циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа. Первый из рассматриваемых в этой главе классов групп имеет следующее копредставление:

$$G = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t | t([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \ldots, [x_g, y_g])^q \rangle, \qquad (1)$$

где $g \geq 2$, p и q — взаимно просты, $p \geq 2$, $q \geq 2$.

Обозначим через $\Omega_{\mathrm{S}L_n(K)}(p,q)$ множество таких матриц $A \in \mathrm{S}L_n(K)$, что A^p и A^q сопряжены. Для построения неприводимых компонент $R_n(G)$ рассмотрим многообразие

$$L_g(A) = \{(x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g) \in \mathrm{G}L_n(K)^{2g} \mid [x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g] = A\}$$

и зададим морфизм $f_{A,t_0}\colon L_g(A)\times Z(A)\times \mathrm{GL}_n(K)\to R_n(G)$ по правилу
$$(x_1,y_1,\dots,x_g,y_g,z,T)\mapsto T(x_1,y_1,\dots,x_g,y_g,t_0z)T^{-1},$$
где t_0 — некоторая фиксированная матрица, для которой $t_0A^pt_0^{-1}=A^q$. Замыкание образа этого морфизма в топологии Зарисского обозначим $W(A)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1 [2–A]. *Пусть G — группа, определенная в* (1). *Справедливы следующие утверждения.*

1. $W(A)\subset R_n(G)$ и размерность $W(A)$ равна $2gn^2+1$.

2. Каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой $R_n(G)$, и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(G)$.

3. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega_{\mathrm{SL}_n(K)}(p,q)$.

4. Каждая неприводимая компонента $R_n(G)$ является рациональным многообразием.

Обозначим через π морфизм факторизации $R_n(G)\to X_n(G)$, ставящий в соответствие представлению $\rho\in R_n(G)$ его характер $\chi(\rho)\in X_n(G)$. Следующая теорема позволяет описать структуру многообразия характеров $X_n(G)$.

Теорема 2.4.1 [2–A]. *Множествами $X(A)=\pi(W(A))$ исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(G)$, и каждая из компонент $X(A)$ имеет размерность $(2g-1)n^2+2$. Число неприводимых компонент многообразия $X_n(G)$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega_{\mathrm{SL}_n(K)}(p,q)$.*

Кроме того, в главе 2 получено описание многообразий представлений $R_n(G(p,q))$ для более широкого класса конечно порожденных групп
$$G(p,q)=\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g,y_1,\dots,y_g,t\mid$$
$$a_1^{m_1}=\ldots=a_s^{m_s}=1,\ tU^pt^{-1}=U^q\rangle,$$
где $g\geq 2$, $m_i\geq 2$ для всех $1\leq i\leq s$, p и q — целые числа, для которых $p>|q|\geq 1$, $U=[x_1,y_1]\dots[x_g,y_g]W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$ для некоторого слова $W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$ в свободном произведении $(s+k)$ циклических групп $\langle a_1\mid a_1^{m_1}\rangle*\ldots*\langle a_s\mid a_s^{m_s}\rangle*\langle b_1\rangle*\ldots*\langle b_k\rangle$.

Для описания структуры многообразий представлений $R_n(G(p,q))$ введем некоторые обозначения. Пусть u_i, v_i — суммы показателей соответственно при a_i и b_i в слове $W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$. Если среди чисел $v_1,\dots,v_k$ не все v_i равны нулю, символом d обозначим их наибольший общий делитель, в противном случае положим $d=1$. Через m обозначим наименьшее общее кратное чисел $m_1,\dots,m_s$ и будем считать δ первообразным корнем из единицы степени dm. Тогда $\varepsilon_i=\delta^{dm/m_i}$ — первообразный корень из единицы степени m_i.

Для каждого i, $1\leq i\leq s$, выберем разбиение $\alpha_i=(k_{i,1},\dots,k_{i,m_i})$ числа n на

m_i неотрицательных слагаемых. Для разбиения α_i положим

$$V_{\alpha_i} = \left\{ XZ_{\alpha_i}X^{-1} \mid X \in \mathrm{GL}_n(K) \right\}, \tag{2}$$

где $Z_{\alpha_i} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_i E_{k_{i,1}}, \varepsilon_i^2 E_{k_{i,2}}, \ldots, \varepsilon_i^{m_i} E_{k_{i,m_i}})$. Если в разбиении α_i некоторое число k_{j,m_j} окажется равным нулю, то соответствующий ему блок в матрице Z_{α_i} будет отсутствовать. Обозначим $V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} = V_{\alpha_1} \times \ldots \times V_{\alpha_s}$ и для $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ рассмотрим следующее многообразие:

$$T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A) =$$
$$= \{(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g,Y_1,\ldots,Y_g) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} \times \mathrm{GL}_n(K)^{k+2g} \mid$$
$$[X_1,Y_1]\ldots[X_g,Y_g]W(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k) = A\}.$$

Теорема 2.5.1 [4–A]. *1) Если среди v_j найдется хотя бы одно, отличное от нуля, то каждое многообразие $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A)$ имеет d неприводимых компонент, которые далее мы будем обозначать $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$, $1 \le i \le d$. Каждая из этих компонент является рациональным многообразием размерности $(2g+s+k-1)n^2 - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j}^2$.*

2) Если все v_i равны нулю, то $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A)$ является пустым множеством в случае $\prod_{i=1}^{s} \det Z_{\alpha_i}^{u_i} \neq \det A$, а в случае $\prod_{i=1}^{s} \det Z_{\alpha_i}^{u_i} = \det A$ является неприводимым рациональным многообразием размерности $(2g+s+k-1)n^2 - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j}^2 + 1$.
В случае непустоты будем обозначать это многообразие $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,1)$.

Для каждого i, $1 \le i \le d$, зададим морфизм

$$\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i,t_0)} \colon T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i) \times \mathrm{GL}_n(K) \times Z(A^h) \to \mathrm{GL}_n(K)^{s+k+2g+1},$$
$$(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1\ldots,X_g,Y_1\ldots,Y_g,C,z) \mapsto$$
$$C(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g,Y_1\ldots,Y_g,t_0z)C^{-1},$$

где t_0 — некоторая фиксированная матрица, для которой $t_0A^pt_0^{-1} = A^q$, $h = \text{НОД}\,(p,q)$, а $Z(A^h)$ — централизатор матрицы A^h.

Обозначим через $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ замыкание образа этого морфизма в топологии Зарисского. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.2 [4–A]. *Многообразия $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ содержатся в $R_n(G(p,q))$ и являются неприводимыми компонентами $R_n(G(p,q))$. Этими многообразиями исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(G(p,q))$. Каждое многообразие $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ является рациональным многообразием размерности $\dim T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i) + n^2 + \dim Z(A^h) - \dim Z(A)$, где $h = \text{НОД}\,(p,q)$, а размерности многообразий $T(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A,i)$ определены в теореме 2.5.1.*

Глава 3 посвящена описанию многообразий n-мерных представлений свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа. Первый из классов групп, рассматриваемых в этой главе, имеет следующее копредставление:

$$\Gamma = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1, x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k) = 1\rangle,$$

где $g \geq 3$, $m_i \geq 2$ всех $1 \leq i \leq s$, $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — некоторый элемент в свободном произведении циклических групп $\langle a_1 \mid a_1^{m_1}\rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s}\rangle * \langle b_1\rangle * * \ldots * \langle b_k\rangle$.

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел $2, v_1, \ldots, v_k$, где v_i — суммы показателей при b_i в слове $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$. Для каждого i, $1 \leq i \leq s$, выберем разбиение $\alpha_i = (k_{i,1}, \ldots, k_{i,m_i})$ числа n на m_i неотрицательных слагаемых и зададим множество V_{α_i} вида (2). Обозначим

$$V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)} = V_{\alpha_1} \times \ldots \times V_{\alpha_s} \times \mathrm{GL}_n(K)^k$$

и для фиксированной матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ рассмотрим многообразие

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A) =$$
$$= \Big\{(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)} \times \mathrm{GL}_n(K)^g \mid$$
$$X_1^2 \ldots X_g^2 W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = A\Big\},$$

а также морфизм $f_W\colon \mathrm{GL}_n(K)^{s+k} \to \mathrm{GL}_n(K)$:

$$f_W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k).$$

Теорема 3.3.1 [5–А]. *1. Предположим, что выполнено одно из условий:*

1) пара (n, g) отлична от $(2, 3)$;

2) $(n, g) = (2, 3)$ и A — не скалярная матрица;

3) $n = 2$, $g = 3$, $A = \alpha E_2$ и $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)})$ содержит более одной точки. Тогда многообразие $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из d неприводимых компонент, каждая из которых является рациональным многообразием.

2. Если $n = 2$, $g = 3$, $A = \alpha E_2$ и $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)})$ состоит из одной точки, то $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из 3 неприводимых компонент, каждая из которых является рациональным многообразием.

При этом во всех описанных случаях размерность любой неприводимой компоненты U многообразия $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ равна

$$\dim U = (g + k + s - 1)n^2 - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} (k_{i,j}^2). \tag{3}$$

В следующей теореме приводится описание структуры многообразий представлений $R_n(\Gamma)$.

Теорема 3.3.2 [5–А]. *1. Если пара (n, g) отлична от $(2, 3)$, то многообразие $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, E_n)$ состоит из d неприводимых компонент многообразия $R_n(\Gamma)$, каждая из которых является рациональным многообразием. Общее число неприводимых компонент $R_n(\Gamma)$ равно $d \prod_{i=1}^{s} C_{n+m_i-1}^{m_i-1}$.*

2. Если $n = 2$, $g = 3$ и образ $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)})$ содержит более одной точки, *то многообразие $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,E_2)$ состоит из d неприводимых компонент многообразия $R_n(\Gamma)$, каждая из которых является рациональным многообразием.*

Если $n=2$, $g=3$ и образ $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)})$ состоит из одной точки, то $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,E_2)$ состоит из 3 неприводимых компонент многообразия $R_2(\Gamma)$, каждая из которых является рациональным многообразием.

Если $n=2$, $g=3$, то многообразие $R_n(\Gamma)$ состоит из $(3-d)f+ + d\prod_{i=1}^{s} C_{n+m_i-1}^{m_i-1}$ компонент, где f — число наборов разбиений $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, для которых образ $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,k)})$ состоит из одной точки.

Размерности неприводимых компонент $R_n(\Gamma)$ описываются формулой (3).

В главе 3 также исследованы многообразия представлений групп вида

$$H(p,q)=\langle a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,x_1,\ldots,x_g,t \mid a_1^{m_1}=\ldots=a_s^{m_s}=1, tU^pt^{-1}=U^q\rangle,$$

где $g\geq 3$, $m_i\geq 2$ для $i=\overline{1,s}$, $U=x_1^2\ldots x_g^2W(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)$, p и q — целые числа, удовлетворяющие неравенству $p>|q|\geq 1$. Символом h обозначим наибольший общий делитель p и q.

Для матрицы $A\in \mathrm{G}L_n(K)$ рассмотрим $M_g(A)$ следующее многообразие:

$$M_g(A)=\bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} P(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A),$$

где объединение выполняется по всем наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ разбиений α_i числа n на m_i неотрицательных частей. Пусть d_A — число неприводимых компонент многообразия $M_g(A)$. Будем обозначать эти неприводимые компоненты $L_i(A)$, $1\leq i\leq d_A$.

Пусть $\Omega_{\mathrm{G}L_n(K)}(p,q)$ — множество таких матриц $A\in \mathrm{G}L_n(K)$, что A^p и A^q сопряжены, а T_0 — некоторая фиксированная матрица, для которой справедливо равенство $T_0A^pT_0^{-1}=A^q$. Для каждой пары матриц A,T_0 и для каждого i, $1\leq i\leq \leq d_A$, рассмотрим морфизм

$$f_{A,i,T_0}\colon L_i(A)\times Z(A^h)\times \mathrm{G}L_n(K)\to \mathrm{G}L_n(K)^{s+k+g+1},$$
$$(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g,z,T)\mapsto$$
$$T(A_1,\ldots,A_s,B_1,\ldots,B_k,X_1,\ldots,X_g,T_0z)T^{-1}.$$

Замыкание образа этого морфизма в топологии Зарисского будем обозначать $W_i(A)$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.4.1 [5–A]. *1. Многообразие $W_i(A)$ является неприводимой компонентной $R_n(H(p,q))$, и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(H(p,q))$.*

2. Размерность компоненты $W_i(A)$ описывается формулой

$$\dim L_i(A)+n^2+\dim Z(A^h)-\dim Z(A),$$

где размерность $\dim L_i(A)$ *вычислена в теореме 3.3.1.*

3. Число неприводимых компонент $R_n(H(p,q))$ равно $\sum_{A\in X} d_A$, где X — множество представителей всех классов сопряженности в $\Omega_{\mathrm{GL}_n(K)}(p,q)$, а числа d_A определены в теореме 3.3.1.

Теорема 3.4.2 [5–А]. *Каждая неприводимая компонента $W_i(A)$ многообразия $R_n(H(p,q))$ является рациональным многообразием.*

В главе 3 также рассмотрены многообразия представлений группы Баумслага – Солитера

$$\Delta = \mathrm{BS}(1,-1) = \langle a,b \mid aba^{-1} = b^{-1}\rangle.$$

Для описания компонент $R_n(\Delta)$ понадобятся следующие обозначения. Для любых $s,t \in \mathbb{Z}$, $0 \le s \le n/2$, $0 \le t \le n-2s$, обозначим через $\varphi_{s,t}$ следующий морфизм:

$$\varphi_{s,t}\colon \mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^{n-2s} \times \mathrm{G}L_2(K)^s \times \mathrm{G}L_n(K) \to \mathrm{G}L_n(K) \times \mathrm{G}L_n(K),$$
$$(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_{n-2s},Z_1,\dots,Z_s,A) \mapsto (X,Y),$$

где $a_i, b_j \in K^*$, а точка (X,Y) определяется следующим образом:

$$X = A\,\mathrm{diag}\,(a_1,-a_1,\dots,a_s,-a_s,b_1,\dots,b_{n-2s})A^{-1},$$
$$Y = A\,\mathrm{diag}\,(Z_1\,\mathrm{diag}\,(a_1,-a_1)Z_1^{-1},\dots,Z_s\,\mathrm{diag}\,(a_s,-a_s)Z_s^{-1},$$
$$-b_1,\dots,-b_t,b_{t+1},\dots,b_{n-2s})A^{-1}.$$

Пусть $V_{s,t}$ — замыкание $\mathrm{Im}\varphi_{s,t}$ в топологии Зарисского. Следующая теорема позволяет описать структуру многообразий представлений $R_n(\Delta)$.

Теорема 3.5.1 [6–А]. *1. Многообразия $V_{s,t}$ являются различными неприводимыми компонентами $R_n(\Delta)$ размерности n^2+s.*

2. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(\Delta)$ равно $(n^2+4n+4)/4$, если n — четно, и $(n^2+4n+3)/4$, если n — нечетно.

3. $V_{s,t}$ — $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие.

Глава 4 «О конечности подгрупп, все примитивные элементы которых имеют конечный порядок» посвящена следующей задаче.

Пусть $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_r\rangle$ — конечно порожденная подгруппа в $\mathrm{G}L_n(\mathbb{C})$. Предположим, что в подгруппе $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_r\rangle$ из $\mathrm{G}L_n(\mathbb{C})$ для любого примитивного слова $w(g_1,g_2,\dots,g_r)$ для некоторого фиксированного $k\in\mathbb{N}$ справедливо равенство $w(g_1,g_2,\dots,g_r)^k = 1$. Является ли конечной такая группа?

В случае малых порядков ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.1.1 [1–А]. *Пусть G — конечно порожденная группа, в которой всякое примитивное слово от образующих имеет порядок: а) 2; б) 3. Тогда G конечна.*

Установлено, что для бóльших порядков подгруппа G не обязана являться конечной: для доказательства этого факта построены примеры таких групп с двумя образующими g_1, g_2, что для любого $k \ge 4$ все примитивные слова $w(g_1,g_2)$ имеют порядок k (и более того, сопряжены), однако группа $G = \langle g_1, g_2\rangle$

бесконечна. В $\mathrm{G}L_3(\mathbb{C})$ такая группа порождается, например, следующими матрицами:

$$A=\begin{pmatrix} -t & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -t^{-1}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -t & 1\\ 0 & -t & 1-t^{-2}\\ t & -t & 1-t^{-1}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 4.3.1 [1–A]. *Пусть матрицы $A,B\in \mathrm{G}L_3(\mathbb{C})$ определены равенством* (4) *и при этом $t=-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}$, где $n\geq 4$. Тогда все примитивные слова $w(A,B)$ сопряжены между собой и имеют порядок n, а группа $G=\langle A,B\rangle$ бесконечна.*

Независимо от (4) построена аналогичная подгруппа в $\mathrm{G}L_6(\mathbb{C})$:

$$A=\begin{pmatrix} q^2t & (-1+q)qt & (-1+q)qt & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1+\frac{1}{q} & 0 & \frac{1}{q} & 0\\ 0 & 1-q & -\frac{(-1+q)^2}{q} & 1 & \frac{-1+q}{q} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & -1+q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-q}{q^2t} & 0 & \frac{1-q}{q^2t} & \frac{1}{q^2t}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1-q}{q^2} & 0 & \frac{1-q}{q^2} & \frac{1}{q^2}\\ 0 & q^2t & \frac{(q-1)\left(tq^3-q+1\right)}{q^2} & 0 & -\frac{(q-1)^2}{q^2} & \frac{q-1}{q^2}\\ 0 & 0 & -\frac{(q-1)^2}{q} & q^2t & \frac{(q-1)\left(tq^2-q+1\right)}{q} & \frac{q-1}{q}\\ 0 & 0 & \frac{q^3-q+1}{q^4t} & 0 & \frac{1-q}{q^4t} & \frac{1-q}{q^4t}\\ 0 & 0 & \frac{1-q}{q^3t} & 0 & \frac{q^2-q+1}{q^3t} & \frac{1-q}{q^3t}\\ q^2 & 0 & \frac{(q-1)\left(tq^3-q+1\right)}{q^3t} & 0 & \frac{(q-1)\left(q^2-q+1\right)}{q^3t} & -\frac{(q-1)^2}{q^3t}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 4.4.1 [1–A]. *Пусть матрицы $A,B\in \mathrm{G}L_6(\mathbb{C})$ определены равенством* (5) *и при этом $t=1$, $q=-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}$, где $n\geq 4$. Тогда все примитивные слова $w(A,B)$ сопряжены между собой и имеют порядок n, а группа $G=\langle A,B\rangle$ бесконечна.*

Теоремы 4.3.1, 4.4.1 показывают, что при $n\geq 3$ в $\mathrm{G}L_n(\mathbb{C})$ существует бесконечная подгруппа, порожденная двумя элементами, в которой все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок и сопряжены между собой. Однако в случае $\mathrm{G}L_2(\mathbb{C})$ бесконечных подгрупп, обладающих таким свойством, не существует. В следующих теоремах приводятся достаточные условия конечности подгрупп $\mathrm{G}L_2(\mathbb{C})$, порожденных двумя элементами конечного порядка.

Теорема 4.5.1 [1–A]. *Пусть $G\subset \mathrm{G}L_2(\mathbb{C})$ — неединичная подгруппа, порожденная матрицами A и B, и пусть все примитивные слова $w(A,B)$ имеют конечный порядок и сопряжены между собой. Тогда G конечна.*

Теорема 4.5.2 [1–A]. *Пусть $G\subset \mathrm{G}L_2(\mathbb{C})$ — подгруппа, порожденная матрицами A, B конечного порядка, и предположим, что G вполне приводима. Тогда*

G конечна.

Теорема 4.5.3 [1–A]. *Пусть $G = \langle A, B \rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — неединичная подгруппа, которая приводима, но не вполне приводима. Тогда найдется примитивный элемент $w(A,B)$ бесконечного порядка.*

Теорема 4.5.4 [1–A]. *Пусть в подгруппе $\langle X, Y \rangle \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ все примитивные элементы $w(X,Y)$ имеют один и тот же конечный порядок. Тогда группа $\langle X, Y \rangle$ конечна.*

Теорема 4.5.5 [1–A]. *Пусть $G = \langle A, B \rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ и все примитивные слова $w(A,B)$ имеют одинаковый порядок p, где p — простое число. Тогда группа G конечна.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертация посвящена исследованию структуры многообразий представлений некоторых классов конечно порожденных групп. Основные результаты следующие:

1. Для класса групп, являющихся свободным произведением циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа, получено описание многообразий n-мерных представлений: найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность. ([2–А; 4–А; 8–А; 9–А; 13–А; 14–А; 15–А])

2. Получено описание многообразий n-мерных представлений свободных произведений циклических групп с одним соотношением квадратичного типа: найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность. ([3–А; 5–А; 10–А; 11–А; 12–А; 14–А; 15–А])

3. Получено описание многообразий n-мерных представлений группы Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,-1)$. ([6–А; 16–А])

4. Доказано существование конечно порожденных линейных групп бесконечного порядка, в которых все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок. ([1–А; 7–А])

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут найти приложения в дальнейших исследованиях многообразий представлений и характеров конечно порожденных групп. Также результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов студентам математических специальностей высших учебных заведений, при написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных рецензируемых журналах

1–А. Адмиралова, А.Н. О линейных группах со свойством конечности порядка всех примитивных слов от образующих / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, № 1. — С. 23–35. (Перевод: Admiralova, A. On Linear groups with the property of order finiteness of all primitive words in generators / A. Admiralova, V. Beniash-Kryvets // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — Vol. 233, N 5. — P. 616–625.)

2–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Вестник БГУ, сер. 1. — 2016. — № 3. — С. 166–172.

3–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений некоторых HNN расширений свободных групп / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2018. — № 2. — С. 10–16.

4–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений одного класса HNN расширений / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 13–24.

5–А. Беняш-Кривец, В.В. О многообразиях представлений некоторых свободных произведений циклических групп с одним соотношением / В.В. Беняш-Кривец, А.Н. Адмиралова // Чебышевский сборник. — 2020. — Т. 21, № 1. — С. 62–81.

6–А. Беняш-Кривец, В.В. Многообразия представлений одной группы Баумслага – Солитера / В.В. Беняш-Кривец, А.Н. Адмиралова // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2023. — Т. 31, № 1. — С. 14–23.

Тезисы докладов конференций

7–А. Admiralova, A. On linear group with the property of order finiteness of all primitive words in generators / A. Admiralova // 7th European Congress of Mathematics: abstract of talks, Berlin, July 18–22, 2016. / TU Berlin. — Berlin, 2016. — P. 623.

8–А. Адмиралова, А.Н. О неизморфных группах, имеющих изоморфные многообразия n-мерных представлений / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Междунар. конф. «Алгебра и логика: теория и приложения», посвящ. 70-летию со дня рождения В.М. Левчука: тез. докл., Красноярск, 24–29 июля 2016 г. / Сибирский федеральный университет; редкол.: В.М. Левчук [и др.]. — Красноярск, 2016. — С. 3–4.

9–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений и характеров некоторых классов групп / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // XII Бе-

лорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г.: в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси. — Минск, 2016. — Ч. 5 — С. 3–4.

10–А. Admiralova, A.N. On representation varieties of some HNN extensions of free groups / A.N. Admiralova, V.V. Beniash-Kryvets // The 11th International Algebraic Conference in Ukraine to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko: Abstract of reports, Kyiv, July 3–7, 2017 / Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine; Progr. Com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. — Kyiv, 2017. — P. 13.

11–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений некоторых HNN-расширений свободных произведений циклических групп / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 23–25 мая 2018 г. / М.: Издательство МГУ. — Москва, 2018. — С. 26–29.

12–А. Admiralova, A.N. On varieties of two-dimensional representations of a family of one-relator groups / A.N. Admiralova, V.V. Beniash-Kryvets // Emil Artin International Conference (Dedicated to the 120th Anniversary of Emil Artin): Abstracts, Yerevan, May 27 – June 2, 2018. — Yerevan, 2018. — P. 14–15.

13–А. Адмиралова, А.Н. О многообразиях представлений одного класса конечно порожденных групп / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XV Междунар. конф., посвященной столетию со дня рождения профессора Н.М. Коробова: Тула, 28–31 мая 2018 г. / ТГПУ им. Л.Н. Толстого. — Тула, 2018. — С. 65–67.

14–А. Admiralova, A. On representation and character varieties of some one-relator groups / A. Admiralova // Proceedings of the First World Meeting for Women in Mathematics $(\mathrm{WM})^2$, Rio de Janeiro, Brazil, July 31, 2018. — Rio de Janeiro, 2018. — P. 5.

15–А. Admiralova, A. On representation and character varieties of some one-relator groups / A. Admiralova // Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Book of Abstracts, Rio de Janeiro, August 1–9, 2018. — Rio de Janeiro, 2018. — P. 29.

16–А. Адмиралова, А.Н. Многообразия представлений одного HNN расширения бесконечной циклической группы / А.Н. Адмиралова, В.В. Беняш-Кривец // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова: Тула, 26–29 сентября 2023 г. / ТГПУ им. Л.Н. Толстого. — Тула, 2023. — С. 28–30.

РЭЗЮМЭ

Адміралава Аляксандра Мікалаеўна

Мнагастайнасці выяўленняў і характараў некаторых класаў свабодных здабыткаў цыклічных груп з адным судачыненнем

Ключавыя словы: конца парожданая група, лінейнае выяўленне групы, мнагастайнасць выяўленняў, мнагастайнасць характараў, непрыводная кампанента мнагастайнасці, памернасць мнагастайнасці, рацыянальная мнагастайнасць

Мэта працы: апісанне структуры мнагастайнасцей выяўленняў і характараў некаторых класаў конца пароджаных груп; атрыманне адказу на пытанне аб концасці конца пароджаных груп, усе прымітыўныя элементы якіх маюць концы парадак.

Метады даследавання: метады тэорыі выяўленняў і алгебраічнай геаметрыі.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Апісана структура мнагастайнасцей n-мерных выяўленняў для класа груп, якія з'яўляюцца свабодным здабыткам цыклічных груп з адным судачыненнем камутатарнага тыпу. Таксама атрымана апісанне мнагастайнасцей n-мерных выяўленняў для некаторых класаў груп, якія з'яўляюцца свабодным здабыткам цыклічных груп з адным судачыненнем квадратычнага тыпу. Даследавана структура мнагастайнасцей n-мерных выяўленняў групы Баумслага – Солітара $\mathrm{BS}(1,-1)$. Для ўсіх разгляданых мнагастайнасцей выяўленняў знойдзены непрыводныя кампаненты, вылічаны іх памернасці, даказана іх рацыянальнасць.

Акрамя таго, у дысертацыі даследаваны конца пароджаныя лінейныя групы, у якіх усе прымітыўныя словы ад утваральных элементаў маюць концы парадак. Даказана, што сярод такіх груп існуюць групы бясконцага парадку.

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў далейшых даследаваннях мнагастайнасцей выяўленняў і характараў конца пароджаных груп, а таксама ў адукацыйным працэсы пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Вобласць ужывання: геаметрычная тэорыя выяўленняў груп.

РЕЗЮМЕ

Адмиралова Александра Николаевна

Многообразия представлений и характеров некоторых классов свободных произведений циклических групп с одним соотношением

Ключевые слова: конечно порожденная группа, линейное представление группы, многообразие представлений, многообразие характеров, неприводимая компонента многообразия, размерность многообразия, рациональное многообразие

Цель работы: описание структуры многообразий представлений и характеров некоторых классов конечно порожденных групп; получение ответа на вопрос о конечности конечно порожденных групп, все примитивные элементы которых имеют конечный порядок.

Методы исследования: методы теории представлений и алгебраической геометрии.

Полученные результаты и их новизна. Описана структура многообразий n-мерных представлений для класса групп, являющихся свободным произведением циклических групп с одним соотношением коммутаторного типа. Также получено описание многообразий n-мерных представлений для некоторых классов групп, являющихся свободным произведением циклических групп с одним соотношением квадратичного типа. Исследовано строение многообразий n-мерных представлений группы Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,-1)$. Для всех рассматриваемых многообразий представлений найдены неприводимые компоненты, вычислены их размерности, доказана их рациональность.

Кроме того, в диссертации исследованы конечно порожденные линейные группы, в которых все примитивные слова от образующих элементов имеют конечный порядок. Доказано, что среди таких групп существуют группы бесконечного порядка.

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях многообразий представлений и характеров конечно порожденных групп, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов в университетах, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область использования: геометрическая теория представлений групп.

SUMMARY

Admiralova Alexandra Nikolaevna

Representation and character varieties of some classes of one-relator free products of cyclic groups

Keywords: finitely generated group, linear representation of a group, representation variety, character variety, irreducible component of a variety, dimension of a variety, rational variety

Research aim: description of the structure of the representation and character varieties of some classes of finitely generated groups; obtaining an answer to the finiteness question for the finitely generated groups in which all primitive elements have finite order.

Research methods: methods of representation theory and algebraic geometry.

The results obtained and their novelty. The structure of the varieties of n-dimensional representations is described for the class of one-relator free products of cyclic groups with one commutator-type relation. The description of the varieties of n-dimensional representations is also obtained for some one-relator free products of cyclic groups with one quadratic-type relation. The structure of the varieties of n-dimensional representations is investigated for the Baumslag – Solitar group $\mathrm{BS}(1,-1)$. For all the representation varieties under consideration their irreducible components are described, their dimensions are calculated and their rationality is proved.

In addition, the thesis inquires into finitely generated linear groups in which all primitive words in generators have finite order. It is proved that among such groups there exist groups of infinite order.

All the obtained results are new.

Recommendations for use. The obtained results are of theoretical nature. They can be used in further research of the representation and character varieties of finitely generated groups, as well as in the educational process, while delivering special courses at universities, writing terms papers and graduation projects, master of philosophy and doctor of philosophy theses.

Application field: geometric theory of group representations.

АДМИРАЛОВА Александра Николаевна

МНОГООБРАЗИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ХАРАКТЕРОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Отпечатано в РУП “Издательский дом “Белорусская наука”
Подписано в печать 25.10.2024.
Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,29.
Тираж 60 экз. Заказ № 228.